

Дифференцируя соотношение (11) по времени и вычитая из полученного выражения соотношение (12), находим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} + \sum_{\rho=l+1}^k \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} \right) a_{\rho\lambda} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} \left( a_{\rho\lambda} \dot{\phantom{q}} - \frac{\partial q_\rho}{\partial q_\lambda} \right) \right] \quad (13)$$

Используя соотношения (9) и (6), получаем из (13) выражение, которое позволяет записать редуцированные уравнения Нильсена (2) в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda} + \sum_{\rho=l+1}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} \left( \frac{\partial q_\rho}{\partial q_\lambda} - a_{\rho\lambda} \right) - \sum_{\rho=l+1}^k \frac{\partial T}{\partial q_\rho} a_{\rho\lambda} = N_\lambda \quad (14)$$

В этой записи они совпадают с уравнениями П. В. Воронца. Нетрудно видеть, что для систем Чаплыгина, т. е. когда  $a_\rho \equiv 0$ , коэффициенты  $a_{\rho\lambda}$ , кинетическая энергия и обобщенные силы не зависят от обобщенных координат  $q_{l+1}, q_{l+2}, \dots, q_k$ , уравнения (14) превращаются в уравнения Чаплыгина

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\lambda} - \frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda} + \sum_{\rho=l+1}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} \left[ \sum_{\mu=1}^l \left( \frac{\partial a_{\rho\mu}}{\partial q_\lambda} - \frac{\partial a_{\rho\lambda}}{\partial q_\mu} \right) q_\mu \right] = Q_\lambda$$

( $\lambda = 1, 2, \dots, l$ )

Поступила 5 V 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д о л а п ч и е в Бл. Об уравнениях Нильсена — Ценова и их применении к неголономным системам с нелинейными связями. Докл. АН СССР, 1966, т. 171, № 4.
2. N i e l s e n J. Vorlesungen über elementare Mechanik. Berlin, Springer, 1935.
3. В о р о н е ц П. Об уравнениях движения для неголономных систем, Матем. сб., 1901, т. 22, вып. 4.
4. Ч а п л ы г и н С. А. Исследования по динамике неголономных систем, М.—Л., Гостехиздат, 1949.

#### ОДНА ИЗ МОДЕЛЕЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ

Е. А. Ильюшина

(Москва)

На основании микромоделей линейной цепочки дается метод построения сплошной среды, обладающей некоторыми свойствами дискретной структуры. Метод позволяет достаточно точно определить спектр исходной дискретной системы уже в длинноволновом приближении. Динамика построенной сплошной среды описывается уравнениями для смещения центра масс макроячейки и для моментов различного порядка; спектр этой среды с увеличением числа моментов будет приближаться к полному спектру линейной цепочки (как для простой, так и для сложной цепочки).

1. Рассмотрим простую линейную цепочку с периодом  $a$ . Уравнения движения

$$m s_\mu'' = \sum C_{\mu\nu} (s_\nu - s_\mu) \quad \left( s_\mu'' \equiv \frac{d^2 s_\mu}{dt^2} \right) \quad (1.1)$$

Здесь  $s_\mu$  — смещение  $\mu$  частицы от ее равновесного положения,  $C_{\mu\nu}$  — силовые константы, характеризующие взаимодействие  $\mu$  и  $\nu$  частиц, в случае взаимодей-

ствия ближайших соседей имеют вид

$$ms_{\mu}'' = C(s_{\mu+1} - 2s_{\mu} + s_{\mu-1}) \quad (1.2)$$

Движение этой же цепочки можно рассматривать, объединяя в макроячейки группы из  $N$  соседних атомов;  $\mu$  частица попадет в макроячейку номера  $r$  и будет иметь в ней номер  $n$  такой, что

$$\mu = N(r-1) + n, \quad x_{\mu} \equiv x_r^n = aN(r-1) + an \quad (1.3)$$

Система (1.2) тогда переписывается следующим образом:

$$ms_r^{n''} = C(s_r^{n+1} - 2s_r^n + s_r^{n-1}) \quad (n = 1, \dots, N) \quad (1.4)$$

$$(s_r^0 \equiv s_{r-1}^N, s_r^{N+1} \equiv s_{r+1}^1)$$

Общая система уравнений (1.1) запишется в форме

$$ms_r^{n''} = \sum_k C_{nk}^{r,r+p} (s_{r+p}^k - s_r^n) \quad (1.5)$$

Как известно [1], при помощи нормальных колебаний

$$s_r^n = A \exp i(kx_r^n - \omega t) \quad (1.6)$$

уравнений (1.1) можно найти спектральную кривую

$$\omega = \varphi(k), \quad 0 \leq k \leq 2\pi/a \quad (1.7)$$

Функция  $\varphi(k)$  будет четной относительно осей  $k = 0, \pi/a, 2\pi/a, \dots$ . В частном случае (1.4) и при  $N = 2$

$$\varphi(k) = \sqrt{4C/m} |\sin^{1/2} ka| \quad (1.8)$$

Спектральная кривая (1.7) может быть построена методом зеркальных отображений многозначной кривой

$$\omega = \varphi_p(k_1), \quad 0 \leq k_1 \leq 2\pi/aN \quad (1.9)$$

определенной на укороченном интервале. Каждому значению  $k_1$  из (1.9) при фиксированном  $p$  ставим в соответствие  $k = k_p$

$$k_p = \frac{2\pi p}{aN} - k_1 \quad (p = 2\nu), \quad k_p = \frac{2\pi p}{aN} + k_1 \quad (p = 2\nu + 1) \quad (1.10)$$

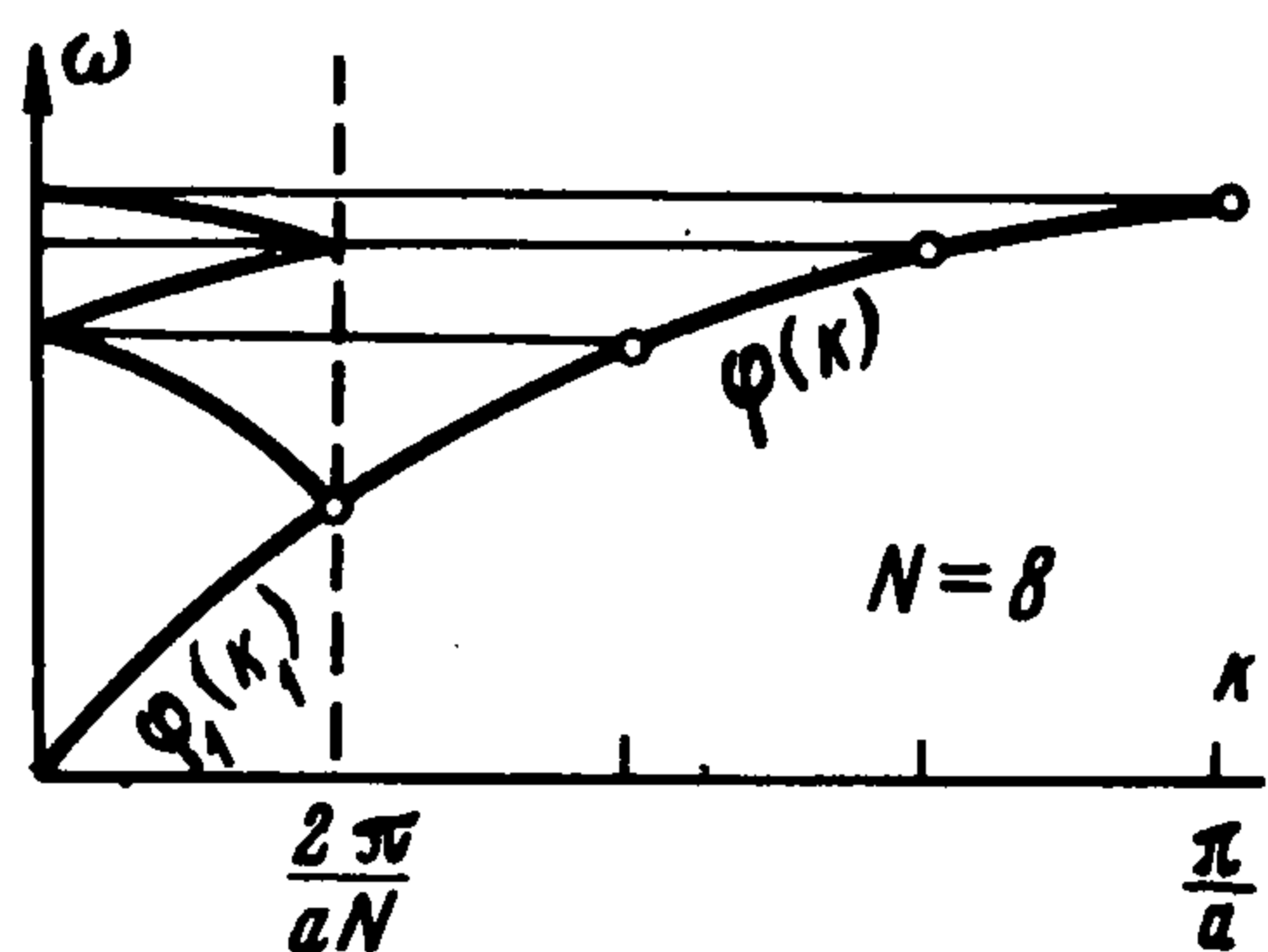
Используя эти значения  $k_p$ , из (1.6) получим

$$s_r^n = A \exp(i2\pi pn/N) \exp(i(\mp k_1 x_r^n - \omega t)) \quad (1.11)$$

Подставим (1.11) в (1.5), тогда для каждого  $p$  определим свою спектральную кривую (1.7). Значения частот  $\omega$  в (1.7) для любого  $k_p$  находятся также и из (1.9) при  $k_1$ , связанных с  $k_p$  (1.10), т. е. имеем

$$\varphi(k_p) = \varphi_p(k_1), \quad 0 \leq k_1 \leq 2\pi/aN \quad (k_p = 2\pi p/aN \mp k_1) \quad (1.12)$$

Соотношения (1.12) представляют закон зеркального отображения (фигура). Кривая  $\varphi_p(k_1)$  при фиксированном четном  $p$  зеркально отражается относительно оси



$k = 2\pi/aN$  и переносится на соответствующий интервал значений  $k_p$ ; при нечетном  $p$  кривая  $\varphi_p(k_1)$  просто переносится на свой интервал значений  $k_p$ . Заметим, что нечетного  $N$  кривая  $\varphi(k)$  на интервале

$$\frac{\pi}{a} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \leq k_p \leq \frac{\pi}{a} \left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

переходит при отражении сама в себя. Таким образом строится вся функция  $\varphi(k)$  на интервале от 0 до  $2\pi/a$ .

Этот факт, не имеющий существенного значения для исследования дискретных систем, становится важным для построения моментной механики сплошной среды при помощи длинноволновых приближений, так как при достаточно большом числе час-

тиц, включаемых в макроячейку, в интервале  $0 \leq k_1 \leq 2\pi/aN$  кривые  $\varphi_p(k_1)$  могут быть заменены касательными к ним в точке  $k_1 = 0$ .

Введем вместо системы точечных функций  $s_r^n(t)$  систему  $N$  непрерывно дифференцируемых функций координаты и времени  $s_n(x, t)$ , совпадающих с  $s_r^n$  в точках  $x = x_r^n$  и удовлетворяющих системе уравнений, полученной формальным переходом к непрерывному из уравнений (1.5). В частном случае близкого действия эти уравнения, как видно из (1.4), имеют вид

$$ms_n'' = C[s_{n+1}(x+a) - 2s_n(x) + s_{n-1}(x-a)] \quad (n = 1, \dots, N) \quad (1.13)$$

$$s_0(x-a) \equiv s_N(x-a), \quad s_{N+1}(x+a) \equiv s_1(x+a)$$

$$\text{Полагая } s_r^n = A_n \exp i(kx_r^n - \omega t) \quad (1.14)$$

$$s_n = B_n \exp i(kx - \omega t)$$

и подставляя соответственно (1.14) в (1.4), (1.13), найдем, что соответствующие секулярные уравнения совпадают; значит, спектр сплошной среды, которая описывается уравнениями (1.13), полностью совпадает со спектром исходной линейной цепочки.

Пусть  $n$  — число взаимодействующих частиц. Если в разложении  $s_i(x \pm na)$  в окрестности точки  $x$  ограничиться вторыми производными (длинноволновое приближение), то спектр системы (1.13) будет, очевидно, состоять из касательных к соответствующим кривым  $\varphi_p(k_1)$  при  $k_1 = 0$  и, как указано выше, их набор будет тем точнее приближаться к полному спектру дискретной системы, чем больше число  $N$ , объединяемых в макроячейку частиц.

Аналогичным образом можно получить непрерывную среду с уточненным спектром, если исходить из сложной линейной цепочки, ячейка которой состоит, для простоты, из двух различных частиц массами  $m_1, m_2$ , с периодом  $a$  и учитывать, например, взаимодействие ближайших ячеек; уравнения движения этой системы имеют вид

$$m_1 s_r^{1''} = C_1 (s_r^2 - s_r^1) + C_2 (s_{r-1}^2 - s_r^1) + C_3 (s_{r+1}^1 - 2s_r^1 + s_{r-1}^1) + C_4 (s_{r-1}^2 - s_r^1) \quad (1.15)$$

$$m_2 s_r^{2''} = C_1 (s_r^1 - s_r^2) + C_2 (s_{r+1}^1 - s_r^2) + C_3 (s_{r+1}^2 - 2s_r^2 + s_{r-1}^2) + C_4 (s_{r-1}^1 - s_r^2)$$

где  $r$  — по-прежнему номер ячейки;  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — константы взаимодействия. Объединим в макроячейки группы из  $N$  соседних ячеек и перенумеруем частицы (вместо  $r$  и  $n = 1, 2$  вводится номер макроячейки  $R$  и номер частицы в макроячейке  $\mu = 1, 2, \dots, 2N$ ) так, что

$$2r + (n - 2) = 2N(R - 1) + \mu \quad (1.16)$$

$$x_r^n = ar + x^n, \quad x^1 = 0, \quad x^2 = b$$

$$x_R^\mu = aNR + x^\mu, \quad x_\mu = \begin{cases} 1/2(\mu - 2)a + b, & \mu - \text{четное} \\ 1/2(\mu - 1)a, & \mu - \text{нечетное} \end{cases}$$

Тогда вместо (1.15) получим

$$m_{1,2} s_R^{\mu''} = C_1 (s_R^{\mu \pm 1} - s_R^\mu) + C_2 (s_R^{\mu \mp 1} - s_R^\mu) + C_3 (s_R^{\mu+2} - 2s_R^\mu + s_R^{\mu-2}) + C_4 (s_R^{\mu \pm 3} - s_R^\mu) \quad (1.17)$$

$$\mu = 1, 2, \quad s_R^0 \equiv s_{R-1}^{2N}, \quad s_R^{-1} \equiv s_{R-1}^{2N-1}$$

$$\mu = 2N - 1, 2N, \quad s_R^{2N+1} \equiv s_{R-1}^1, \quad s_R^{2N+2} \equiv s_{R+1}^2$$

Рассматривая решение уравнений (1.15) в виде (1.6), причем волновой вектор  $0 \leq k \leq 2\pi/a$ , определим из (1.15) спектральные кривые

$$\omega = \varphi_1(k), \quad \omega = \varphi_2(k) \quad (1.18)$$

Эти же частоты находятся методом, приведенным выше, из двух многозначных кривых, заданных на укороченном интервале

$$\omega = \varphi_{1p}(k_1), \quad \omega = \varphi_{2p}(k_1), \quad 0 \leq k_1 \leq 2\pi/aN \quad (1.19)$$

если каждому  $k_1$  при фиксированном  $p$  ставится в соответствие  $k_p$  по (1.10).

В этом случае подстановка

$$s_r^n = A_n \exp i (\mp k_1 x_r^n - \omega t) \exp i \frac{2\pi p}{N} (\mu - 2N - 1) \quad (n = 1) \quad (1.20)$$

$$s_r^n = A_n \exp i (\mp k_1 x_r^n - \omega t) \exp i \frac{2\pi p}{N} \left( \frac{b}{a} - \frac{2N - \mu}{2} \right) \quad (n = 2)$$

в (1.15) определяет кривые (1.19) такие, что

$$\Phi_{1p}(k_1) = \Phi_1(k_p), \quad \Phi_{2p}(k_1) = \Phi_2(k_p) \quad (1.21)$$

т. е. для построения  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  по  $\Phi_{1p}$  и  $\Phi_{2p}$  получается тот же закон зеркального отображения. Переходя далее к полю, т. е. вводя вместо  $s_r^n(t)$  непрерывно дифференцируемые  $s_\mu = s_\mu(x, t)|_{x=x_{R\mu}} = s_{R^\mu}(t)$ , потребуем, чтобы они удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} m_1 s_\mu^{**} = & C_1 [s_{\mu+1}(x+b) - s_\mu(x)] + C_2 [s_{\mu-1}(x-b+a) - s_\mu] + \\ & + C_3 [s_{\mu+2}(x+a) - 2s_\mu + s_{\mu-2}(x-a)] + C_4 [s_{\mu+3}(x+a+b) - s_\mu] \\ & \mu = 1, 3 \dots 2N - 1 \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} m_2 s_\mu^{**} = & C_1 [s_{\mu-1}(x-b) - s_\mu(x)] + C_2 [s_{\mu+1}(x+b-a) - s_\mu] + \\ & + C_3 [s_{\mu+2}(x+a) - 2s_\mu + s_{\mu-2}(x-a)] + C_4 [s_{\mu-3}(x-a-b) - s_\mu] \\ & \mu = 2, 4 \dots 2N \end{aligned}$$

Легко убедиться, что секулярные уравнения для (1.17), (1.22) совпадают. Следовательно, и для сплошной среды, соответствующей сложной линейной цепочке, в длинноволновом приближении спектр будет состоять из касательных к  $\Phi_{1p}(k_1)$  и  $\Phi_{2p}(k_1)$  в точке  $k_1 = 0$ , набор которых при больших  $N$  будет достаточно хорошо описывать полный спектр дискретной системы. Изложенный метод, естественно, распространяется на пространственные периодические структуры. Соответствующие полевые уравнения движения при достаточно большом числе частиц, включаемых в макроячейки будут отражать динамические свойства микроструктуры среды.

2. Классическая теория упругости, основанная на понятиях средних плотности, скорости и перемещения, а также тензоров деформации и напряжения, с рассматриваемой точки зрения, является длинноволновым приближением и содержит в себе информацию только о движении центров масс макроячеек. Моментная теория упругости за счет вводимых феноменологически полевых понятий (внутренних моментов) — имеет целью дать более полное описание поведения твердого тела и, по-видимому, в целом правильно описывает поведение системы частиц в акустической зоне спектра [2]. Однако в моментной теории упругости рассматриваются колебания, относящиеся также к оптической ветви спектральной кривой [3], и потому представляется целесообразным и другой подход к построению этой теории, содержащий уточненное описание движения макроячеек.

Рассмотрим сложную линейную цепочку с периодом  $l$ , каждая ячейка которой состоит из  $N$  различных частиц. Будем считать взаимодействие таким, чтобы соответствующие ряды в разложении потенциальной энергии сходились. Уравнение движения  $n$ -й частицы в  $r$ -й ячейке имеет вид

$$m_n s_r^{n**} = \sum_{p, k} C_{nk}^{r, r+p} (s_{r+p}^k - s_r^n) = C \sum_{p, k} \alpha_{nk}^{r, r+p} (s_{r+p}^k - s_r^n) \quad (2.1)$$

$$C \equiv C_1 r_2^r, \quad \alpha_1 r_2^r = 1$$

Здесь  $\alpha_{nk}^{r, r+p}$  — безразмерные константы взаимодействия, обладающие следующими свойствами:

$$\alpha_{nk}^{r, r+p} = \alpha_{kn}^{r+p, r}, \quad \alpha_{nn}^{r, r+p} = \alpha_{nn}^{r, r-p} \quad (2.2)$$

$$\sum_{n,p} \alpha_{nk}^{r, r+p} = \sum_{k,p} \alpha_{nk}^{r, r+p} = 0$$

Вместо абсолютных смещений каждой частицы ячейки  $s_r^n$  рассмотрим относительные смещения  $u_r^n$  и смещение центра масс ячейки  $s_r$ . Координата центра масс ячейки  $x_r$  как обычно равна

$$x_r = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n x_r^n = \sum_{n=1}^N \mu_n x_r^n \quad (2.3)$$

$$M = \sum_{n=1}^N m_n, \quad \sum_{n=1}^N \mu_n = 1$$

Здесь  $x_r^n$  — абсолютная координата  $n$ -й частицы в  $r$ -й ячейке. Абсолютное смещение  $s_r^n$  есть

$$s_r^n = s_r + u_r^n, \quad s_r = x_r - X_r = x_r - \sum_{n=1}^N \mu_n X_r^n \quad (2.4)$$

Здесь  $X_r^n$  — равновесное положение  $n$ -й частицы в  $r$ -й ячейке. Из (2.3) следует

$$\sum_{n=1}^N \mu_n u_r^n = 0 \quad (2.5)$$

Определим для каждого  $r$  систему из  $(N - 1)$  линейно независимых переменных, которые будем называть моментами и считать отнесенными к центру масс  $r$ -ячейки

$$m_r^k = \sum_{n=1}^N \mu_n u_r^n (\xi^n)^k \quad (k = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (2.6)$$

Здесь  $\xi^n$  — равновесная координата  $n$ -й частицы относительно центра масс ячейки (в силу симметрии цепочки в положении равновесия  $\xi^n$  не зависит от номера ячейки). Из (2.5) видно, что  $m_r^0 = 0$ . Разрешая систему линейных уравнений (2.6) относительно  $\mu_n u_r^n$ , получим

$$u_r^n = \frac{1}{\mu_n} \sum_{k=1}^{N-1} \beta_{nk} m_r^k \quad (2.7)$$

Матрицы  $\beta_{nk}$  — отнесенные к  $D$  миноры определителя

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^{N-1} & \xi^N \\ (\xi^1)^2 & (\xi^2)^2 & \dots & (\xi^{N-1})^2 & (\xi^N)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi^1)^{N-1} & (\xi^2)^{N-1} & \dots & (\xi^{N-1})^{N-1} & (\xi^N)^{N-1} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Механический смысл введенных моментов выясняется из выражений кинетической энергии  $T_r$  и моментов количества движения различных порядков  $Q_r^k$  для ячейки. На основании (2.6) имеем

$$T_r = \frac{M}{2} \left[ \sum_{n,k} b_{nk} m_r^n m_r^k + s_r^2 \right], \quad b_{nk} = \sum_{i=1}^N \frac{\beta_{in} \beta_{ik}}{\mu_i} \quad (2.9)$$

$$Q_r^k = \sum_{i=1}^N m_i u_r^i (\xi^i)^k = M m_r^k$$

Обычное в моментной теории упругости выражение плотности кинетической энергии через дополнительный параметр («микродисторсию») вытекает из (2.9) при переходе к полевым функциям с учетом только первого момента.

На основании (2.3), (2.4) уравнение для  $s_r$  получается суммированием (2.1) по  $n$  при учете (2.6), (2.7)

$$Ms_r'' = CF_r$$

$$F_r = \sum_p' \left[ \alpha^{r, r+p} (s_{r+p} - s_r) + \sum_{k=1}^{N-1} (\alpha_k^{r, r+p} m_{r+p}^k - \alpha_k^{r+p, r} m_r^k) \right] \quad (2.10)$$

$$\alpha^{r, r+p} = \sum_{n, k=1}^N \alpha_{n, k}^{r, r+p}, \quad \alpha_k^{r, r+p} = \sum_{n, l=1}^N \alpha_{nl}^{r, r+p} \frac{\beta_{lk}}{\mu_l}$$

Уравнения для  $m_r^k$  получаются умножением (2.1) на  $(\xi^n)^k$  и суммированием по  $n$  с использованием (2.6), (2.7), (2.10)

$$Mm_r^{k''} = C\Phi_r^k \quad (2.11)$$

$$\Phi_r^k = \sum_p' \gamma_k^{r, r+p} (s_{r+p} - s_r) + \sum_{q=1}^{N-1} m_r^q \rho_{qk}^r + \sum_{p, q} \gamma_{qk}^{r, r+p} m_{r+p}^q$$

$$\gamma_k^{r, r+p} = \sum_{n, l=1}^N \alpha_{nl}^{r, r+p} \left[ (\xi^n)^k - \sum_{q=1}^{N-1} \mu^q (\xi^q)^k \right] \quad (2.12)$$

$$\gamma_{qk}^{r, r+p} = \sum_{i, j=1}^N \alpha_{ij}^{r, r+p} \frac{\beta_{jq}}{\mu_j} \left[ (\xi^i)^k - \sum_{n=1}^{N-1} \mu_n (\xi^n)^q \delta_{qk} \right]$$

$$\rho_{qk}^r = \sum_{i, j=1}^N \alpha_{ij}^{r, r} \frac{\beta_{jq}}{\mu_j} [(\xi^i)^k - (\xi^j)^k] - \sum_p' \alpha_{ij}^{r, r+p} \frac{\beta_{jk}}{\mu_j} \left[ (\xi^j)^k - \sum_{n=1}^{N-1} \mu_n (\xi^n)^q \delta_{qk} \right]$$

Здесь  $\delta_{qk}$  — символ Кронекера; штрих у знака суммы означает суммирование по всем  $p$ , кроме  $p = 0$ .

Из (2.10), (2.11) уравнения движений одномерной сплошной среды находятся при помощи процедуры, описанной в п. 1 с учетом того, что функции  $s_r$  и  $m_r^k$  заданы в точках  $x_r$ , в то время как  $s_r^n$  при фиксированном  $r$  заданы в различных точках  $x_r^n$ . Ограничиваясь в разложении функций вторыми производными уравнениями движения для  $s(x, t)$ ,  $m_k(x, t)$ , запишем в виде

$$s'' = \frac{C}{l\rho} \left[ \alpha s'' + \sum_{k=1}^{N-1} \rho_{k1} m_k + \rho_{k2} m_k' + \rho_{k3} m_k'' \right]$$

$$m_k'' = \frac{C}{l\rho} \left[ \alpha_{k1} s' + \alpha_{k2} s'' + \sum_{q=1}^{N-1} \rho_{kq1} m_q + \rho_{kq2} m_q' + \rho_{kq3} m_q'' \right]$$

$$\left( \rho \equiv \frac{M}{l}, \quad m_k' \equiv \frac{\partial m_k}{\partial x} \right)$$

$$\alpha \equiv \frac{l^2}{2} \sum_{p, i, j} \alpha_{ij}^{\circ p} p^2, \quad \rho_{k1} \equiv - \sum_{i, j=1}^N \alpha_{ij}^{\circ} \left( \frac{\beta_{jk}}{\mu_j} - \frac{\beta_{ik}}{\mu_i} \right)$$

$$\rho_{k2} \equiv l \sum_{\substack{p > 0 \\ i, j}} p \alpha_{ij}^{\circ p} \left( \frac{\beta_{jk}}{\mu_j} - \frac{\beta_{ik}}{\mu_i} \right), \quad \rho_{k3} \equiv \frac{l^2}{2} \sum_{p, i, j} p^2 \alpha_{ij}^{\circ p} \frac{\beta_{jk}}{\mu_j}$$

$$\alpha_{k1} \equiv l \sum_{p > 0, i, j} p \alpha_{ij}^{\circ p} [(\xi^i)^k - (\xi^j)^k] \quad (2.13)$$

$$\alpha_{k2} \equiv \frac{l^2}{2} \sum_{p, i, j} p^2 \alpha_{ij}^{\circ p} \left[ (\xi^i)^k - \sum_{n=1}^{N-1} \mu_n (\xi^n)^k \right]$$

$$\rho_{kq1} \equiv \sum_{i, j} (\xi^i)^k \frac{\beta_{jk}}{\mu_j} \left[ \alpha_{ij}^{\circ} - \sum_p \alpha_{ij}^{\circ p} \right]$$

$$\rho_{kq2} \equiv l \sum_{p, i, j} p \alpha_{ij}^{\circ p} \frac{\beta_{jq}}{\mu_j} \left[ (\xi^i)^k - \sum_{n=1}^{N-1} \mu_n (\xi^n)^q \delta_{qk} \right]$$

$$\rho_{kq3} \equiv \frac{l^2}{2} \sum_{p, j, i} p^2 \alpha_{ij}^{\circ p} \frac{\beta_{jq}}{\mu_j} \left[ (\xi^i)^k - \sum_{n=1}^{N-1} \mu_n (\xi^n)^q \delta_{qk} \right]$$

Если понимать под  $N$  совокупность тождественных частиц или тождественных ячеек, то уравнения (2.13) существенно не упростятся, но возникнут дополнительные условия на входящие в них константы взаимодействия. В этом случае будем иметь сплошную среду, построенную при помощи макроячеек, которая в длинноволновом приближении описывается уравнениями для смещения центра масс ячейки и для моментов различного порядка, причем увеличению числа частиц в макроячейке будет соответствовать уточнение спектра исходной дискретной системы. Заметим, что если макроячейка совпадает с истинной ячейкой дискретной системы, то уравнения (2.13) позволяют судить как об акустических, так и об оптических колебаниях системы только при малых  $k$ . Чтобы уточнить спектр, необходимо включить в макроячейку по крайней мере две ячейки исходной цепочки.

Поступила 3 VI 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбфрид Г. Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов. М.—Л., Физматгиз, 1963.
2. Кунин И. А. Теория упругости с пространственной дисперсией. Одномерная сложная структура. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
3. Mindlin R. D. Microstructure in linear elasticity Arch. Rational Mech. and Analysis, 1964, vol. 16, № 1, pp. 51—78 (Рус. перев.: Миндлин Р. Д. Микроструктура в линейной упругости. Механика. Период. сб. переводов иностр. стат., 1964, № 4).

#### О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Л. И. Рубина

(Свердловск)

Рассматривается вопрос о слабых разрывах для квазилинейных гиперболических систем. Получены уравнения переноса, когда характеристические поверхности системы имеют постоянную кратность. Исследуются слабые разрывы в магнитной газовой динамике, когда характеристическая поверхность примыкает к области покоя.

Распространение слабых разрывов для линейных гиперболических систем, когда искомые функции системы и их производные до порядка  $n$  непрерывны при переходе через поверхность  $G$ , а производные порядка  $n$  ( $n \geq 1$ ) имеют конечный разрыв, исследовано в работе [1]. Для квазилинейных систем, когда величина скачка производных при переходе через поверхность разрыва мала, уравнение переноса получено в [2]. Случай распространения слабых разрывов для уравнений газовой динамики, когда поверхность  $G$  примыкает к области покоя, рассмотрен в работах [3, 4]. В работе [5] под-