СВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НИЛЬСЕНА ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ К УРАВНЕНИЯМ ЧАПЛЫГИНА

Бл. Долапчиев

(София)

Пусть на механическую систему с обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_l$, кинетической энергией $T = T(t, q, q^{\cdot})$ и обобщенными силами $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ наложены неголономные связи, определяемые $k - l$ уравнениями вида

$$q_\rho^{\cdot} = \sum_{\lambda=1}^{l} a_{\rho\lambda} q_\lambda^{\cdot} + a_\rho \qquad (\rho = l+1, l+2, \ldots, k) \tag{1}$$

Уравнения движения такой системы можно записать [1] в форме

$$\frac{\partial R_1^*}{\partial q_\lambda^{\cdot}} = N_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{2}$$

где функция R_1^* получена из функции

$$R_1 = T^{\cdot} - 2T_0^{\cdot} \tag{3}$$

заменой всех $q_\rho^{\cdot}$ их выражениями (1), т. е.

$$R_1^* (t, q_\varkappa q_\lambda^{\cdot}) = R_1 (t, q_\varkappa, q_\lambda^{\cdot}, a_{\rho\lambda} q_\lambda^{\cdot} + a_\rho) \begin{pmatrix} \varkappa = 1, \ldots, k \\ \rho = l+1, \ldots, k \end{pmatrix} \tag{4}$$

Буквой T_0 обозначено выражение кинетической энергии T, в котором обобщенные скорости $q_\varkappa^{\cdot}$ предполагаются фиксированными

$$N_\lambda = Q_\lambda + \sum_{\rho=l+1}^{k} Q_\rho a_{\rho\lambda} \tag{5}$$

Покажем, что уравнения (2), которые можно назвать редуцированными уравнениями Нильсена [2], сводятся к уравнениям П. В. Воронца [3], а для неголономных систем Чаплыгина — к уравнениям С. А. Чаплыгина [4].

В самом деле, из соотношения (4) следует, что

$$\frac{\partial R_1^*}{\partial q_\lambda^{\cdot}} = \frac{\partial R_1}{\partial q_\lambda^{\cdot}} + \sum_{\rho=l+1}^{k} \frac{\partial R_1}{\partial q_\rho^{\cdot}} a_{\rho\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{6}$$

Воспользуемся тождеством

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa^{\cdot}} \equiv \frac{\partial T^{\cdot}}{\partial q_\varkappa^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k) \tag{7}$$

и очевидными соотношениями

$$\frac{\partial T_0^{\cdot}}{\partial q_\varkappa^{\cdot}} = \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k) \tag{8}$$

которые вместе с (3) дают

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\lambda^{\cdot}} = \frac{\partial R_1}{\partial q_\lambda^{\cdot}} + \frac{\partial T}{\partial q_\lambda}, \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_\rho^{\cdot}} = \frac{\partial R_1}{\partial q_\rho^{\cdot}} + \frac{\partial T}{\partial q_\rho} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \ldots, l \\ \rho = l+1, \ldots, k \end{pmatrix} \tag{9}$$

Обозначим через T^* выражение кинетической энергии T после подстановки туда уравнений (1), т. е.

$$T^* (t, q_\varkappa, q_\lambda^{\cdot}) = T (t, q_\varkappa, q_\lambda^{\cdot}, a_{\rho\lambda} q_\lambda^{\cdot} + a_\rho) \tag{10}$$

Отсюда

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda^{\cdot}} = \frac{\partial T}{\partial q_\lambda^{\cdot}} + \sum_{\rho=l+1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_\rho^{\cdot}} a_{\rho\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{11}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda} = \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} + \sum_{\rho=l+1}^{k} \frac{\partial T}{\partial q_\rho^{\cdot}} \frac{\partial q_\rho^{\cdot}}{\partial q_\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{12}$$

Дифференцируя соотношение (11) по времени и вычитая из полученного выражения соотношение (12), находим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda^{\cdot}}-\frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\lambda^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}+\sum_{\rho=l+1}^{k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\rho^{\cdot}}\right)a_{\rho\lambda}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial T}{\partial q_\rho^{\cdot}}\left(a_{\rho\lambda}^{\cdot}-\frac{\partial q_\rho^{\cdot}}{\partial q_\lambda}\right)\right] \tag{13}$$

Используя соотношения (9) и (6), получаем из (13) выражение, которое позволяет записать редуцированные уравнения Нильсена (2) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda^{\cdot}}-\frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda}+\sum_{\rho=l+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_\rho^{\cdot}}\left(\frac{\partial q_\rho^{\cdot}}{\partial q_\lambda}-a_{\rho\lambda}^{\cdot}\right)-\sum_{\rho=l+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_\rho}a_{\rho\lambda}=N_\lambda \tag{14}$$

В этой записи они совпадают с уравнениями П. В. Воронца. Нетрудно видеть, что для систем Чаплыгина, т. е. когда $a_\rho\equiv 0$, коэффициенты $a_{\rho\lambda}$, кинетическая энергия и обобщенные силы не зависят от обобщенных координат $q_{l+1}, q_{l+2},\ldots, q_k$, уравнения (14) превращаются в уравнения Чаплыгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda^{\cdot}}-\frac{\partial T^*}{\partial q_\lambda}+\sum_{\rho=l+1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_\rho^{\cdot}}\left[\sum_{\mu=1}^{l}\left(\frac{\partial a_{\rho\mu}}{\partial q_\lambda}-\frac{\partial a_{\rho\lambda}}{\partial q_\mu}\right)q_\mu^{\cdot}\right]=Q_\lambda$$
$$(\lambda=1, 2, \ldots, l)$$

Поступила 5 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Долапчиев Бл. Об уравнениях Нильсена — Ценова и их применении к неголономным системам с нелинейными связями. Докл. АН СССР, 1966, т. 171, № 4.
2. Nielsen J. Vorlesungen über elementare Mechanik. Berlin, Springer, 1935.
3. Воронец П. Об уравнениях движения для неголономных систем, Матем. сб., 1901, т. 22, вып. 4.
4. Чаплыгин С. А. Исследования по динамике неголономных систем, М.— Л., Гостехиздат, 1949.

ОДНА ИЗ МОДЕЛЕЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ МИКРОСТРУКТУРЫ

Е. А. Ильюшина

(Москва)

На основании микромодели линейной цепочки дается метод построения сплошной среды, обладающей некоторыми свойствами дискретной структуры. Метод позволяет достаточно точно определить спектр исходной дискретной системы уже в длинноволновом приближении. Динамика построенной сплошной среды описывается уравнениями для смещения центра масс макроячейки и для моментов различного порядка; спектр этой среды с увеличением числа моментов будет приближаться к полному спектру линейной цепочки (как для простой, так и для сложной цепочки).

1. Рассмотрим простую линейную цепочку с периодом a. Уравнения движения

$$ms_\mu^{\cdot\cdot}=\sum C_{\mu\nu}(s_\nu-s_\mu)\qquad\left(s_\mu^{\cdot\cdot}\equiv\frac{d^2s_\mu}{dt^2}\right) \tag{1.1}$$

Здесь s_μ — смещение μ частицы от ее равновесного положения, $C_{\mu\nu}$ — силовые константы, характеризующие взаимодействие μ и ν частиц, в случае взаимодей-