7. Пожарицкий Г. К. О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
8. Арнольд В. И. Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
9. Куницын А. Л. Качественное исследование движений в одном предельном варианте задачи двух неподвижных центров. Тр. Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы, Теоретическая механика, 1966, т. 17, вып. 4.
10. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes. Acta math. Chap. 3, t. 22, 1899, pp. 257—273.
11. Duhem P. Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme. J. Math. pures et appl., Sér. 5, 1902, t. 8, p. 5.
12. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
13. Duhem P. Traité d'energétique ou de thermodynamique générale. t. 2. Paris, Gautheir-Villars, 1911.
14. Шостак Р. Я. О признаке условной определенности квадратичной формы n переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функции n переменных. Усп. матем. н., 1954, т. 9, вып. 2.
15. Кузьмин П. А. Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения. Тр. межвузовской конф. по прикл. теор. устойчивости движения и аналитической механике, Казань, 1964, стр. 93—99.
16. Пожарицкий Г. К. Об устойчивости перманентных вращений твердого тела с закрепленной точкой, находящегося в ньютоновском центральном поле сил. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА, БЛИЗКИХ К КУСОЧНО-ГАМИЛЬТОНОВЫМ

Н. Н. Серебрякова

(Горький)

Указывается, каким условиям должны удовлетворять аппроксимирующие функции, чтобы результат, известный для систем, близких к гамильтоновым с аналитическими правыми частями [1], сохранялся и для систем с кусочно-аналитическими правыми частями.

Теорема. Пусть $H(x, y) = h$ — семейство замкнутых кривых C_h, зависящих от параметра h, сшитых из кусков $H_i(x, y) = h$ на интервалах $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$. Функции $H_i(x, y)$ — аналитические по каждому из аргументов.

Тогда система

$$\dot{x} = H_y'(x, y) + \mu p(x, y), \quad \dot{y} = -H_x'(x, y) + \mu q(x, y) \tag{1}$$

имеет при $\mu \neq 0$ единственный предельный цикл в окрестности замкнутой кривой $C_{h_0^\circ}$, если $\partial H / \partial y$ непрерывна в точках сшивания $x = x_i$.

Здесь $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — аналитические функции в каждом из интервалов $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, а h_0° — корень уравнения

$$\Psi(h^\circ{}_0) \equiv \int_{C_{h_0^\circ}} q(x, y)\,dx - p(x, y)\,dy = 0, \quad \Psi'(h_0^\circ) \neq 0$$

Предельный цикл будет устойчивым, если $\Psi'(h_0^\circ) < 0$ и неустойчивым, если $\Psi'(h_0^\circ) > 0$.

Доказательство. Обозначим через $S_i^{(1)}$ полупрямые $x = x_i$ при $y > 0$, а через $S_i^{(2)}$ полупрямые $x = x_i$ при $y < 0$ и рассмотрим фазовые траектории системы (1) при $\mu = 0$ и при $\mu \neq 0$, удовлетворяющие одним и тем же начальных условиям

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{при } t = 0 \tag{2}$$

Предполагая, что траектория системы (1), удовлетворяющая условиям (2), при $\mu = 0$, пересекает полупрямые $S_k^{(j)}$ в точках $P_{k0}^{(j)}$ $(x_k, y_{k0}^{(j)})$, а при $\mu \neq 0$ в точках $P_k^{(j)}$ $(x_k, y_k^{(j)})$, докажем сначала, что точечное преобразование полупрямой $S_0^{(1)}$ в полупрямую $S_k^{(1)}$ имееет вид

$$y_k{}^{(1)} = y_{k0}{}^{(1)} + \frac{\mu}{\partial H_{k-1}(x_k, y_{k0}{}^{(1)})/dy} \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_k, y_{k0}{}^{(1)})} q(x, y)\, dx - p(x, y)\, dy + \mu^2 (\ldots) \qquad (3)$$

если функция $\partial H / \partial y$ непрерывна при $x = x_i$.

Рассмотрим точечное преобразование полупрямой $S_0^{(1)}$ в полупрямую $S_1^{(1)}$. Решение системы (1), удовлетворяющее условиям (2), при $\mu = 0$, представляется в виде

$$x = x_0(h_0, \ t + \varphi_0), \quad y = y_0(h_0, \ t + \varphi_0) \quad (x_0 < x < x_1) \qquad (4)$$
$$(h_0, \ \varphi_0 = \text{const})$$

Будем искать решение системы (1) при $\mu \neq 0$ в виде

$$x = x_0[\alpha_0(t), \ \ t + \beta_0(t)] \equiv \xi_0(t) \qquad (5)$$
$$y = y_0[\alpha_0(t), \ t + \beta_0(t)] \equiv \eta_0(t)$$

Здесь $\alpha_0(t)$ и $\beta_0(t)$ — некоторые функции времени t.

Подставляя (5) в уравнения (1), получим

$$\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_0} \frac{d\alpha_0}{dt} + \frac{\partial x_0}{\partial \beta_0} \frac{d\beta_0}{dt} = \mu p \, [\xi_0(t), \eta_0(t)]$$
$$\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_0} \frac{d\alpha_0}{dt} + \frac{\partial y_0}{\partial \beta_0} \frac{d\beta_0}{dt} = \mu q \, [\xi_0(t), \eta_0(t)] \qquad (6)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial x_0}{\partial \beta_0} = \frac{\partial H_0 [\xi_0(t), \eta_0(t)]}{\partial y}, \quad \frac{\partial y_0}{\partial \beta_0} = - \frac{\partial H_0 [\xi_0(t), \eta_0(t)]}{\partial x}$$
$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial x} \frac{\partial x_0}{\partial h_0} + \frac{\partial H_0}{\partial y} \frac{\partial y_0}{\partial h_0} \right)_{x = \xi_0(t), \ y = \eta_0(t)} \equiv 1$$

находим из (6)

$$\frac{d\alpha_0}{dt} = \mu \left\{ q \, [\xi_0(t), \eta_0(t)] \frac{\partial x_0}{\partial t} - p \, [\xi_0(t), \eta_0(t)] \frac{\partial y_0}{\partial t} \right\} \qquad (7)$$
$$\frac{d\beta_0}{dt} = \mu \left\{ p \, [\xi_0(t), \eta_0(t)] \frac{\partial y_0}{\partial h_0} - q \, [\xi_0(t), \eta_0(t)] \frac{\partial x_0}{\partial h_0} \right\}$$

Функции $\alpha_0(t)$ и $\beta_0(t)$ должны удовлетворять начальным условиям

$$\alpha_0(t) = h_0, \quad \beta_0(t) = \varphi_0 \quad \text{при } t = 0$$

Представляя $\alpha_0(t)$ и $\beta_0(t)$ в виде ряда по степеням μ, получим

$$\alpha_0(t) = h_0 + \mu \alpha_{01}(t) + \mu^2 (\ldots), \qquad \beta_0(t) = \varphi_0 + \mu \beta_{01}(t) + \mu^2 (\ldots) \qquad (8)$$
$$\alpha_{01}(t) = \int\limits_0^t \left\{ q \, [\xi_0(t), \eta_0(t)] \frac{\partial x_0}{\partial t} - p \, [\xi_0(t), \eta_0(t)] \frac{\partial y_0}{dt} \right\}_{\mu = 0} dt$$

(Выражение для β_{01} (t) в дальнейшем не используется.)

Пусть $t = t_1$ — наименьший промежуток времени, за который изображающая точка по траектории системы (1) достигнет полупрямой $S_1^{(1)}$ в точке $(x_1, y_1^{(1)})$.

Подставляя $t = t_1$ в (5) и разлагая полученные соотношения в ряд по степеням μ, получим

$$t_1 = t_{10} + \mu t_{11} + \mu^2(\ldots)$$

$$x_1 = x_0(h_0, t_{10} + \varphi_0) + \mu \left\{ \frac{\partial x_0}{\partial t}[t_{11} + \beta_{01}(t)] + \frac{\partial x_0}{\partial h_0} \alpha_{01}(t) \right\}_{t=t_1,\ \mu=0} + \mu^2(\ldots)$$

$$y_1^{(1)} = y_{10}^{(1)} + \mu \left\{ \frac{\partial y_0}{\partial t}[t_{11} + \beta_{01}(t)] + \frac{\partial y_0}{\partial h_0} \alpha_{01}(t) \right\}_{t=t_1,\ \mu=0} + \mu^2(\ldots)$$

Отсюда, исключая $t_{11} + \beta_{01}(t_{10})$, будем иметь

$$y_1^{(1)} = y_{10}^{(1)} + \frac{\mu}{\partial H_0(x_1, y_{10}^{(1)}) / \partial y} \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_{10}^{(1)})} q(x, y)\,dx - p(x, y)\,dy + \ldots \tag{9}$$

Интеграл берется по кривой системы (1) при $\mu = 0$, проходящей через точку (x_0, y_0).

Рассмотрим точечное преобразование полупрямой $S_0^{(1)}$ в полупрямую $S_2^{(1)}$. Решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$x = x_1, \quad y = y_1^{(1)} \quad \text{при} \quad t = t_1 \tag{10}$$

представим в виде

при $\mu = 0$

$$x = x_1(h_1,\ t + \varphi_1), \quad y = y_1(h_1, t + \varphi_1) \tag{11}$$

при $\mu \neq 0$

$$x = x_1[\alpha_1(t),\ \ t + \beta_1(t)] \equiv \xi_1(t), \quad y = y_1[\alpha_1(t),\ \ t + \beta_1(t)] \equiv \eta_1(t) \tag{12}$$

Представляя $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(t)$ в виде ряда по степеням μ, аналогично предыдущему получим

$$\alpha_1(t) = h_1 + \mu\alpha_{11}(t) + \mu^2(\ldots), \quad \beta_1(t) = \varphi_1 + \mu\beta_{11}(t) + \mu^2\ (\ldots) \tag{13}$$

$$\alpha_{11}(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \left\{ q[\xi_1(t), \eta_1(t)] \frac{\partial x_1}{\partial t} - p[\xi_1(t), \eta_1(t)] \frac{\partial y_1}{\partial t} \right\}_{\mu=0} dt$$

Пусть $t = t_2$ — момент времени, в который изображающая точка по траектории системы (1) достигнет полупрямой $S_2^{(1)}$.

Подставляя $t = t_2$ в (12) и разлагая полученные соотношения в ряд по степеням μ, будем иметь

$$t_2 = t_{20} + \mu t_{21} + \mu^2(\ldots)$$

$$h_1 = h_{10} + \mu h_{11} + \mu^2(\ldots), \quad \varphi_1 = \varphi_{10} + \mu\varphi_{11} + \mu^2(\ldots)$$

$$y_2^{(1)} = y_{20}^{(1)} + \frac{\mu}{\partial H_1(x_2, y_{20}^{(1)}) / \partial y}[h_{11} + \alpha_{11}(t_{20})] + \mu^2(\ldots)$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$h_1 = H_1(x_1, y^{1(1)}), \quad \frac{\partial h_1}{\partial \mu} = h_{11} = \frac{\partial H_1(x_1, y_{10}^{(1)})}{\partial y} \left. \frac{\partial y_1^{(1)}}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$$

и учитывая (9), получим

$$y_2^{(1)} = y_{20}^{(1)} + \frac{\mu}{\partial H_1(x_2, y_{20}^{(1)}) / \partial y} \left[\int\limits_{(x_1, y_{10}^{(1)})}^{(x_2, y_{20}^{(1)})} q(x, y)\,dx - p(x, y)\,dy + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial H_1(x_1, y_{10}^{(1)}) / \partial y}{\partial H_0(x_1, y_{10}^{(1)}) / \partial y} \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_{10}^{(1)})} q(x, y)\,dx - p(x, y)\,dy \right] + \mu^2(\ldots) \tag{14}$$

Здесь интегралы берутся по кривой C_{h_0}, проходящей через точку $P_0(x_0, y_0)$, причем $h_0 = H_0(x_0, y_0)$.

Если функция $\partial H / \partial y$ непрерывна при $x = x_i$, то

$$\partial H_1(x_1, \quad y_{10}^{(1)}) / \partial y = \partial H_0(x_1, \quad y_{10}^{(1)}) / \partial y$$

и выражение (14) записывается в виде (3) при $k = 2$.

Предполагая, что формула (3) справедлива при преобразовании полупрямой $S_0^{(1)}$ в полупрямую S_{k-1}^1, можно показать, что она справедлива и при преобразовании полупрямой $S_0^{(1)}$ в полупрямую $S_k^{(1)}$, если функция $\partial H / \partial y$ непрерывна при $x = x_i$.

Подобным же образом с учетом непрерывности функции $\partial H / \partial y$ можно показать, что при преобразовании полупрямой $S_0^{(1)}$ в полупрямую $S_k^{(2)}$ (при переходе изображающей точки через прямую $y = 0$) имеет место соотношение (3), если в нем заменить $\partial H_{k-1}(x_k, y_{k0}^{(1)}) / \partial y$ на $\partial H_k(x_k, y_{k0}^{(2)})\, \partial y$, а индекс $^{(1)}$ заменить индексом $^{(2)}$.

Для преобразования полупрямой $S_k^{(2)}$ в нижней полуплоскости в исходную полупрямую $S_0^{(1)}$ в верхней полуплоскости справедливо все, что сказано о преобразовании полупрямой $S_0^{(1)}$ в $S_k^{(2)}$.

Точечное преобразование полупрямой $S_0^{(1)}$ в себя в окрестности замкнутой кривой C_{h_0}, проходящей через точку $P_0(x_0, y_0)$, имеет вид

$$y_0^{(1)} = y_0 + \frac{\mu}{\partial H_0(x_0, y_0) / \partial y} \int\limits_{C_{h_0}} q(x, y)\, dx - p(x, y)\, dy + \qquad (15)$$

$$+ \mu^2(\ldots) \equiv y_0 + \frac{\mu}{\partial H_0(x_0, y_0) / \partial y} \Psi(h_0) + \mu^2(\ldots)$$

Очевидно, если

$$\Psi(h_0^\circ) = 0, \quad \Psi'(h_0^\circ) \neq 0$$

то преобразование (15) имеет единственную неподвижную точку $P_0(x_0, y_0^\circ + \mu y_1)$, стремящуюся к точке $P(x_0, y_0^\circ)$ при $\mu \to 0$ $(h_0^\circ = H_0(x_0, y_0^\circ))$

Система (1) при этом имеет единственный предельный цикл, расположенный вблизи кривой $C_{h_0}{}^\circ$ и стремящийся к кривой $C_{h_0}{}^\circ$ при $\mu \to 0$.

Из теоремы Кенигса [2] следует, что неподвижная точка $P_0(x_0, y_0^\circ + \mu y_1)$ и соответствующий ей предельный цикл устойчивы, если $\Psi'(h_0^\circ) < 0$ и неустойчивы, если $\Psi'(h_0^\circ) > 0$.

Если функции $\partial H/\partial x$, $\partial H/\partial y$, $p(x,y)$ и $q(x,y)$ — периодические по x с периодом 2π, то фазовое пространство системы (1) будет периодическим с отождествленными прямыми $x = x_0$ и $x = x_0 + 2\pi$. Доказанная выше теорема дает в этом случае условия существования и устойчивости предельного цикла системы (1), охватывающего фазовый цилиндр.

Автор благодарит Н. Н. Баутина за ценные советы.

Поступила 6 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ, 1934, т. 2, вып. 9.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Изд. 2. М., Физматгиз, 1959.