Легко заметить, что $W = -(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)$ и что $\gamma_k > 0$. Все константы в (4.7) могут быть найдены из (4.6), например, вычисляя вычет в начале координат, можно получить следующую формулу $V = U_1 (1 + \rho h/m)^{-1}$, которая легко получается также из соображений сохранения количеств движения.

Поступила 27 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е., О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью. Собр. соч., т. 2. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
2. Моисеев Н. Н. Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
3. Ладыженская О. М. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Физматгиз, 1961.
4. Румянцев Б. Н. О движении твердого тела, содержащего полости, заполненные вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 28, № 6.
5. Ламб X. Гидродинамика. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
6. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
7. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
8. Киселев А. А., Ладыженская О. А. О решении линеаризированных уравнений плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1954, т. 95, № 6.

О ТЕОРЕМЕ РАУСА И МЕТОДЕ ЧЕТАЕВА ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ИЗ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

В. Н. Рубановский, С. Я. Степанов

(Москва)

Первые исследования по устойчивости стационарных движений принадлежат Раусу [1, 2]. Метод Рауса базируется на его основной теореме [2], которая была затем существенно дополнена Ляпуновым [3]. Устойчивость стационарных движений можно исследовать также на основании теоремы Ляпунова [4] об устойчивости, строя функцию Ляпунова по методу Четаева [4–6] из интегралов уравнений движения. Указанные два подхода являются основными в исследовании устойчивости стационарных движений.

В работе показано, что при достаточно общих предположениях условия устойчивости, получаемые применением теоремы Рауса и метода Четаева построения функции Ляпунова (в случае полной связки интегралов), совпадают. Близкий к этому результат содержится в [7]. Рассмотрена бифуркация стационарных движений. Отмечены две теоремы об условной знакоопределенности квадратичных форм. Показана применимость теоремы Рауса для нахождения стационарных движений и условий их устойчивости твердого тела с полостью, целиком заполненной идеальной или вязкой жидкостью по отношению к параметрам, характеризующим состояние движения тела, и некоторым другим параметрам, интегральным образом характеризующим движение жидкости. Такая постановка задачи об устойчивости движения тела с жидкостью предложена В. В. Румянцевым [6] и была решена им построением функции Ляпунова по методу Четаева в виде связки интегралов уравнений движения. В отличие от работ В. И. Арнольда (см., например, [8]), в которых исследовалась устойчивость стационарных течений жидкости, здесь устойчивость стационарных движений системы тело — жидкость исследуется по отношению к конечному числу параметров.

§ 1. Теорема Рауса с дополнениями была дана Ляпуновым в следующем виде [3]. Когда для дифференциальных уравнений движения какой-либо системы найдено некоторое число интегралов, не зависящих от времени, и когда в числе этих интегралов существует такой, который может иметь минимум или максимум при данных величинах остальных интегралов, обращаясь в этот минимум или максимум для некоторых определенных значений входящих в него переменных, то эти значения будут соответствовать вообще одному из действительных движений системы, и притом движение это будет устойчиво по отношению к этим переменным по крайней мере для возмущений, не изменяющих величин остальных интегралов. Если же рассматриваемый интеграл имеет минимум или максимум также и при всяких достаточно близких к данным величинах остальных интегралов и если значения переменных, обращающие его в минимум или максимум, суть непрерывные функции величин этих интегралов, то рассматриваемое движение будет устойчиво для всяких возмущений.

Ляпунов не привел доказательства этой теоремы. Однако, используя установленную им впоследствии теорему об устойчивости [4], можно показать [7, 9], что в случае непрерывности интегралов проверку требования Ляпунова, касающегося безусловной устойчивости, можно не производить.

Теорема 1. Пусть уравнения движения какой-либо системы допускают не зависящие от времени интегралы

$$U_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0, \quad U_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, \quad U_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_k \tag{1.1}$$

непрерывные по отношению к входящим в них величинам $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и пусть U_0 имеет изолированный минимум (максимум)

$$U_0(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) = c_0^\circ$$

при фиксированных значениях остальных интегралов

$$U_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1^\circ, \ldots, U_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_k^\circ \tag{1.2}$$

обращаясь в этот минимум (максимум) при значениях $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ входящих в него переменных, тогда эти значения будут соответствовать одному из действительных движений системы, и это движение будет устойчиво по отношению к $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Доказательство. Рассмотрим движение системы, для которого в момент времени t° будет $x_1 = x_1^\circ$, $x_2 = x_2^\circ, \ldots, x_n = x_n^\circ$. Допустим, что в некоторый момент t^* будет $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*, \ldots, x_n = x_n^*$ и хотя бы одно из значений $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ не совпадает с соответствующим значением $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$. Тогда по определению интеграла будем иметь

$$U_0(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = U_0(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) = c_0^\circ$$

Так как c_0° есть минимум (максимум) U_0 при условиях (1.2), должно быть

$$U_0(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) > U_0(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) = c_0^\circ \qquad (U_0(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) < c_0^\circ)$$

что противоречит предыдущему равенству. Следовательно, в рассматриваемом движении величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сохраняют постоянные значения $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$.

Далее, рассмотрим функцию [10, 7, 9]

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=0}^{k} V_i^2, \quad V_i = U_i - c_i^\circ, \quad i = 0, 1, \ldots, k$$

Она в силу условий теоремы положительно определена по отношению к возмущениям $y_i = x_i - x_i^\circ$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и является интегралом системы, удовлетворяя тем самым требованиям теоремы Ляпунова об устойчивости [4]. Теорема доказана.

Доказательство устойчивости может быть также проведено [10, 11] аналогично доказательству теоремы Лагранжа, данному Лежен — Дирихле.

Замечание 1. В приведенном доказательстве вид уравнений движения исследуемой системы нигде не был использован. Следовательно, теорема Рауса может быть применена для исследования стационарных движений не только систем с конечным числом степеней свободы, но и с бесконечным.

Замечание 2. Приведенное доказательство сохраняет силу и в том случае, когда U_0 есть не интеграл, а некоторая функция (или функционал), не возрастающая (не убывающая) вдоль движений системы [12].

Замечание 3. Теорема 1 применима также в случае, когда переменные $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ стеснены некоторыми соотношениями вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

В этом случае последние должны быть учтены при определении минимума (максимума) U_0 наравне с условиями (1.2). Эти соотношения могут выражать голономные или неголономные связи [12, 13], а также частные интегралы системы (в последнем случае можно сделать заключение только об условной устойчивости).

Замечание 4. Для консервативных систем с циклическими координатами требования теоремы 1 сводятся к требованию минимума измененной потенциальной энергии системы [1].

§ 2. Рассмотрим метод Чатаева и его связь с теоремой Рауса. Пусть значения переменных

$$x_1 = x_1^\circ,\ x_2 = x_2^\circ,\ \ldots,\ x_n = x_n^\circ$$

отвечают некоторому стационарному движению системы. По методу Четаева функция Ляпунова для этого движения разыскивается в виде связки интегралов

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i V_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i V_i^2 \tag{2.1}$$

$$V_i = U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - U_i(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$$

Если постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ возможно выбрать так, чтобы V представляла знакоопределенную по отношению к $y_i = x_i - x_i^\circ (i = 1, 2, \ldots, n)$ функцию, то стационарное движение устойчиво по отношению к $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на основании теоремы Ляпунова об устойчивости. Если в (2.1) квадраты некоторых из интегралов $V_1, V_2, \ldots$ $\ldots, V_k$ отсутствуют, то такую связку интегралов условимся называть неполной.

Далее интегралы (1.1) будем предполагать дважды непрерывно дифференцируемыми и остановимся на том основном случае, когда условия положительной определенности функции V и условного минимума U_0 (случай отрицательной определенности V и условного максимума U_0 сводится к рассматриваемому изменением знака интеграла U_0) определяются как условия Сильвестра знакоопределенности или условной знакоопределенности [14] некоторых квадратичных форм.

Теорема 2. При указанных предположениях условия устойчивости, получаемые из теоремы Рауса и по методу Четаева построения функции Ляпунова в виде полной связки интегралов с использованием одних и тех же интегралов, совпадают.

Доказательство. Сопоставим условия устойчивости, получаемые из теоремы 1 и по методу Четаева.

Значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых U_0 имеет стационарные значения при условиях (1.2), могут быть определены по методу неопределенных множителей Лагранжа из уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = U_1 - c_1^\circ = 0, \ldots, \frac{\partial W}{\partial \lambda_k} = U_k - c_k^\circ = 0,\ \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n} = 0 \tag{2.2}$$

$$W = U_0 + \lambda_1 (U_1 - c_1^\circ) + \ldots + \lambda_k (U_k - c_k^\circ)$$

Пусть

$$\lambda_1 = \lambda_1^\circ, \ldots, \lambda_k = \lambda_k^\circ,\quad x_1 = x_1^\circ, \ldots, x_n = x_n^\circ \tag{2.3}$$

решение системы (2.2). Введем обозначения

$$A = \| a_{ij} \|_{i,\, j=1}^{i,\, j=n} = \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \quad B = \| b_{ij} \|_{i,\, j=1}^{i=k,\, j=n} = \left\| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\|$$

где производные вычисляются при значениях (2.3). Будем предполагать, что

$$\det \| b_{ij} \|_{i,\ j=1}^{i,\ j=k} \neq 0 \tag{2.4}$$

Значения $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ будут отвечать условному минимуму интеграла U_0, если квадратичная форма

$$(Ay, y) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j \tag{2.5}$$

положительно определена при условиях

$$(By)_i = b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + \ldots + b_{in} y_n = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{2.6}$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta = (-1)^k \begin{vmatrix} \theta & B \\ B^\tau & A \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

где θ есть $(k \times k)$ нуль-матрица, а символ τ означает операцию транспонирования. Этот определитель с точностью до множителя $(-1)^k$ равен якобиану системы (2.2) и гессиану W по $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, x_1, x_2, \ldots, x_n$ при значениях (2.3). Для положительной определенности квадратичной формы (2.5) при условиях (2.6) необходимо и достаточно [14], чтобы главные диагональные миноры определителя Δ, начиная с минора $(2k + 1)$-го порядка, были положительны

$$\Delta_{k+1} > 0, \ldots, \Delta_n > 0 \tag{2.8}$$

где Δ_i означает главный диагональный минор $(k + i)$-го порядка. Таким образом, при выполнении условий (2.8) требования теоремы 1 будут выполнены.

В методе Четаева постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ следует выбирать так, чтобы уничтожалась линейная часть связки (2.1), и, очевидно, они совпадают со значениями (2.3). При этом

$$V = (Cy, y) + o(|y|^2), \qquad \lim_{s \to 0} o(s)/s = 0$$

$$(Cy, y) = (Ay, y) + \sum_{\nu=1}^{k} \mu_\nu (By)_\nu^2, \quad |y|^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2 \tag{2.9}$$

Легко показать, что главные диагональные миноры $D_1, D_2, \ldots, D_n$ дискриминанта квадратичной формы (Cy, y) соответственно равны главным диагональным минорам, начиная с минора $(k + 1)$-го порядка, определителя D

$$D = (-1)^k \mu_1 \ldots \mu_k \begin{vmatrix} Q & B \\ B^\tau & A \end{vmatrix}, \quad Q = -\operatorname{diag}(\mu_1^{-1}, \ldots, \mu_k^{-1})$$

Условия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы (2.9) запишем в разложенном по степеням $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ виде

$$D_1 = \mu_1 b_{11}^2 + \mu_2 b_{12}^2 + \ldots + \mu_k b_{1k}^2 + a_{11} > 0 \tag{2.10}$$

$$D_\nu = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_\nu = 1}^{k} \mu_{\alpha_1} \ldots \mu_{\alpha_\nu} \begin{vmatrix} b_{\alpha_1 1} & \ldots & b_{\alpha_1 \nu} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{\alpha_\nu 1} & \ldots & b_{\alpha_\nu \nu} \end{vmatrix}^2 + \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_{\nu-1} = 1}^{k} \mu_{\alpha_1} \ldots \mu_{\alpha_{\nu-1}} \Delta_\nu^{\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-1}} +$$

$$+ \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_{\nu-2} = 1}^{k} \mu_{\alpha_1} \ldots \mu_{\alpha_{\nu-2}} \Delta_\nu^{\alpha_1 \ldots \alpha_{\nu-2}} + \ldots + \Delta_\nu^\circ > 0 \quad (\nu = 2, 3, \ldots, k)$$

$$D_\varkappa = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k \Delta_\varkappa + \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_{k-1} = 1}^{k} \mu_{\alpha_1} \ldots \mu_{\alpha_{k-1}} \Delta_\varkappa^{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} +$$

$$+ \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_{k-2} = 1}^{k} \mu_{\alpha_1} \ldots \mu_{\alpha_{k-2}} \Delta_\varkappa^{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-2}} + \ldots + \Delta_\varkappa^\circ > 0 \quad (\varkappa = k + 1, \ldots, n)$$

Здесь $\Delta_\sigma^{\alpha_1 \ldots \alpha_\rho}$ — главные диагональные миноры порядка $\sigma + \rho$ определителя $\Delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_\rho}$, аналогичного Δ, но отвечающего не всем условиям (2.6), а только с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$, а

$$\Delta_\sigma{}^\circ = \det \| a_{ij} \|_{i,\ j=1}^{i,\ j=\sigma}$$

При выполнении условий (2.8) и достаточно больших $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ условия (2.10) будут выполнены в силу (2.8) и (2.4). Тогда квадратичная форма (2.9) и функция V будут положительно определенными. Наоборот, если при некоторых $\mu_1, \ldots, \mu_k$ условия (2.10) выполнены, то квадратичная форма (2.9) будет положительно определена, и тем более положительно определена при условиях (2.6), при которых (2.9) совпадает с 2.5), а тогда условия (2.8) будут выполнены в силу их необходимости. Теорема 2 доказана.

Отметим вытекающую из приведенного доказательства теорему о знакоопределенности квадратичных форм, отражающую содержание связи метода Четаева с теоремой Рауса и соприкасающуюся с «методом штрафных функций».

Теорема 3. Квадратичная форма (2.5) положительно определена при условиях 2.6) тогда и только тогда, когда положительно определена при достаточно больших $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ квадратичная форма (2.9) [1].

Из теоремы 3 следует, что если возмущения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ подчинены соотношениям вида

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (F(0, 0, \ldots, 0) = 0) \tag{2.11}$$

то левые части этих соотношений можно включить в связку (2.1) наравне с интегралами $V_1, V_2, \ldots, V_k$. Полученные таким образом условия устойчивости будут эквивалентны тем, которые могут быть получены либо после исключения зависимых переменных, либо из условной положительной определенности связки (2.1); при этом, если соотношения вида (2.11) выражают наложенные на систему голономные или неголономные связи, то получаемая устойчивость является безусловной; если же соотношения вида (2.11) выражают условия, накладываемые на решения системы (например, являются частными интегралами системы), то получаемая устойчивость будет носить условный характер.

Замечание 5. Для вычисления определителей (2.8) иногда представляется целесообразным использовать теорему Лапласа об определителях, раскладывая его по первым k строкам и столбцам.

§ 3. Условия условной знакоопределенности (2.8) квадратичной формы (2.5) сохраняют силу, если предположение (2.4) заменить более слабым требованием [15]

$$\operatorname{rang} \| b_{ij} \|_{i=1,\ j=1}^{i=k,\ j=k+1} = k$$

Однако при исследовании областей устойчивости в пространстве параметров и это предположение может вызывать определенные неудобства.

Укажем симметричный по отношению к $y_1, y_2, \ldots, y_n$ вид условий (2.8), предполагая лишь независимость уравнений (2.6).

Теорема 4. Для положительной определенности квадратичной формы (2.5) при независимых условиях (2.6) необходимо и достаточно выполнения условий

$$S_{k+1} > 0, \ \ldots, \ S_n = \Delta > 0 \tag{3.1}$$

где S_i означают суммы всевозможных диагональных миноров $(k + i)$-го порядка определителя (2.7), окаймляющих его главный диагональный минор k-го порядка, состоящий из нулей.

[1] После сдачи статьи в редакцию авторам любезно указали, что аналогичное утверждение высказывалось профессором П. А. Кузьминым.

Доказательство. Введем n-мерное эвклидово пространство R с ортогональными осями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и через Q обозначим его $n - k$-мерное подпространство, определяемое уравнениями (2.6). Приведем квадратичную форму (2.5) на подпространстве Q к каноническому виду, для чего определим ее стационарные значения на единичной сфере

$$(x,\ x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \tag{3.2}$$

в подпространстве Q. Уравнения для определения стационарных точек квадратичной формы (2.5) при условиях (2.6) и (3.2) запишем с множителями Лагранжа σ, λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ в виде

$$\partial F/\partial x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad 2F = (Ax, x) - \sigma(x, x) + 2\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (Bx)_j \tag{3.3}$$

Для решений системы (2.6), (3.3), (3.2) необходимо должен уничтожаться определитель линейной относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, x_1, \ldots, x_n$ подсистемы (2.6), (3.3)

$$D^*(\sigma) = \begin{vmatrix} \theta & B \\ B^\tau & A - \sigma E_n \end{vmatrix} = \sum_{\nu=0}^{n-k} (-1)^{n+\nu} a_\nu \sigma^{n-k-\nu} = 0 \tag{3.4}$$

Здесь

$$a_0 = S_k,\ a_1 = S_{k+1}, \ldots, a_{n-k} = S_n = \Delta \tag{3.5}$$

Аналогично теореме Сильвестра можно показать, что все корни $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-k}$ уравнения (3.4), являющегося естественным обобщением векового уравнения, вещественны и равны искомым стационарным значениям формы (2.5) на сфере (3.2).

В осях $z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}$ с ортогональным нормированным базисом, определяемым решениями системы (3.2), (2.6), (3.3) при $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-k}$, квадратичная форма (2.5) на подпространстве Q примет вид

$$(Ay,\ y)_{(2.6)} = \sigma_1 z_1^2 + \sigma_2 z_2^2 + \ldots + \sigma_{n-k} z_{n-k}^2 \tag{3.6}$$

В уравнении (3.4) величина a_0 положительна, так как она равна сумме квадратов всевозможных определителей k-го порядка, которые можно составить из столбцов матрицы B.

Согласно признаку Льенара и Шипара, для положительности корней уравнения (3.4) необходимо выполнение условий

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \ \ldots, \ a_{n-k} > 0 \tag{3.7}$$

которые, очевидно, являются и достаточными, в чем легко убедиться от противного. Из (3.7) с учетом (3.5) и (3.6) следует утверждение теоремы.

Используя очевидные из (3.4) соотношения

$$a_{n-k} = D^*|_{\sigma=0} = \Delta, \quad a_{n-k-\nu} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{d^\nu D^*}{d\sigma^\nu}\bigg|_{\sigma=0} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-k-1)$$

условия (3.1) можно представить в виде

$$D^*|_{\sigma=0} > 0, \quad (-1)^\nu \frac{d^\nu D^*}{d\sigma^\nu}\bigg|_{\sigma=0} > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-k-1) \tag{3.8}$$

В случае $k \geqslant 1$ стационарные движения (2.3) и левые части неравенств, входящих в условия устойчивости (2.8), (3.1) или (3.8) этих стационарных движений, можно рассматривать как функции от $c_1°, c_2°, \ldots, c_k°$, непрерывные по известной теореме о неявных функциях по крайней мере при $\Delta \neq 0$. Из условия $\Delta \neq 0$ следует также независимость уравнений (2.6).

Если в какой-либо точке пространства параметров $c_1°, c_2°, \ldots, c_k°$ условия (2.8) или (3.1) выполнены, то движения (2.3) будут устойчивы при всяких $c_1°, c_2°, \ldots, c_k°$ из связной области, определяемой условием $\Delta > 0$ и содержащей указанную точку. Действительно, при непрерывном изменении параметров условия (3.1) могут нарушиться только при обращении в ноль одного из корней уравнения (3.4), что имеет место только при $a_{n-k} = \Delta = 0$. Этот факт тесно связан с теорией Пуанкаре — Четаева бифуркации равновесий [4].

§ 4. Рассмотрим стационарные движения твердого тела с одной неподвижной точкой и полостью, целиком заполненной однородной несжимаемой идеальной или вязкой жидкостью, и их устойчивость в центральном поле тяготения [1]. Введем подвижную прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в неподвижной точке тела O, отстоящей от центра притяжения N на расстояние R, и осями, направленными по главным осям эллипсоида инерции системы для точки O. Для простоты вычислений будем считать, что главные оси эллипсоида инерции жидкости для точки O совпадают с осями x_1, x_2, x_3 и введем обозначения: A_i, B_i, C_i — моменты инерции относительно оси x_i соответственно тела, жидкости и всей системы, ω_i, G_i, g_i — проекции на оси x_i соответственно вектора мгновенной угловой скорости тела и векторов кинетического момента относительно точки O жидкости в ее абсолютном и относительном движениях, u_i — проекции на те же оси вектора относительной скорости $\mathbf{u}$ частицы жидкости с координатами x_1, x_2, x_3; τ — объем полости, ρ — плотность жидкости, μ — коэффициент вязкости, M и x_i° — масса и координаты центра инерции системы, g — ускорение тяготения на расстоянии R от центра притяжения, γ_i — направляющие косинусы «вертикали» NO относительно осей x_i, причем

$$\Gamma = \gamma_1^2 + \gamma_1^2 + \gamma_3^2 = 1$$

Тогда кинетическая [6] и потенциальная энергии системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(A_i\omega_i^2 + \frac{Gi^2}{B_i} + w_i^2\right), \qquad \Pi \quad \sum_{i=1}^{3}\left(Mgx_i^\circ\gamma_i + \frac{3g}{2R}\, C_i\gamma_i^2\right)$$

$$G_1 = B_1\omega_1 + g_1, \qquad w_1^2 = \int_\tau \rho\,[u_1 + (\omega_2 - G_2 / B_2)\,x_3 - (\omega_3 - G_3 / B_3)\,x_2]^2 d\tau \qquad (123)$$

Теоремы о кинетической энергии и кинетическом моменте приводят к соотношениям

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}(T + \Pi) = -\mu\int_\tau (\operatorname{rot}\mathbf{u})^2\, d\tau$$

$$K = \sum_{i=1}^{3}(A_i\omega_i + G_i)\,\gamma_i = \text{const}$$

При

$$n = 12,\ k = 2,\ U_0 = H,\ U_1 = K,\ U_2 = \Gamma,\ \lambda_1 = -\omega$$

$$\lambda_2 = -\sigma, \quad x_i = \omega_i, \quad x_{3+i} = G_i, \quad x_{6+i} = \gamma_i, \quad x_{9+i} = w_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

уравнения стационарных движений (2.2) имеют решения (ω и σ — произвольные постоянные)

$$\omega_1 = \omega\gamma_1,\ G_1 = \omega B_1\gamma_1,\ w_1 = 0 \qquad (u_1 = 0) \qquad (4.1)$$

$$[\sigma + (\omega^2 - \varkappa^2)\,C_1]\,\gamma_1 = Mgx_1^\circ \qquad (\varkappa^2 = 3g / R) \qquad (123)$$

описывающие стационарные вращения всей системы как единого целого вокруг «вертикали» $\boldsymbol{\gamma}$ с постоянной угловой скоростью ω. При этом оси вращения в теле, как и в случае одного твердого тела [15], лежат на конусе Штауде

$$x_1^\circ(C_2 - C_3)\gamma_2\gamma_3 + x_2^\circ(C_3 - C_1)\gamma_3\gamma_1 + x_3^\circ(C_1 - C_2)\gamma_1\gamma_2 = 0$$

Условия устойчивости (2.8) $\Delta_i > 0$ ($i = 3, \ldots, 12$) стационарных движений (4.1) приводятся к следующим двум неравенствам

$$\Omega L > 0, \quad 4\Omega\omega^2 L + \Omega^2 SJ > 0 \qquad (4.2)$$

совпадающим с полученными П. А. Кузьминым [15] для одного твердого тела.

[1] Эта задача для одного твердого тела решена Г. К. Пожарицким [16] и П. А. Кузьминым [15].

Здесь обозначено

$$L = \sum_{(123)} (\lambda - C_1)(C_2 - C_3)^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2, \quad S = \sum_{(123)} (\lambda - C_2)(\lambda - C_3)\gamma_1^2$$

$$J = C_1\gamma_1^2 + C_2\gamma_2^2 + C_3\gamma_3^2, \quad \Omega = \omega^2 - \varkappa^2 = -\sigma / \lambda$$

а знак суммирования с символом (123) означает, что два других слагаемых получаются из написанного круговой перестановкой индексов 1, 2, 3.

Итак, условия (4.2) являются достаточными условиями устойчивости стационарных вращений (4.1) твердого тела с закрепленной точкой и полостью, целиком заполненной идеальной или вязкой жидкостью, в центральном поле тяготения по отношению к величинам ω_i, G_i, γ_i, w_i $(i = 1, 2, 3)$.

Однако вычисления могут быть значительно упрощены, если учесть замечание 4.

Выражение W^* для измененной потенциальной энергии имеет вид [5, 6, 13]

$$W^* = \Pi + \frac{k_0^2}{2J}$$

где J — момент инерции системы относительно «вертикали» NO, а k_0 — значение постоянной интеграла площадей для стационарного движения.

Стационарные точки функции W^* отвечают стационарным вращениям всей системы как единого целого вокруг «вертикали» $\boldsymbol{\gamma}$ с постоянной угловой скоростью ω. Отсюда, учитывая геометрическое соотношение $\Gamma = 1$, получим (4.1).

Условия минимума функции W^* при условии $\Gamma = 1$ приводятся к требованию положительности главных диагональных миноров третьего и четвертого порядков определителя

$$\Delta = -\det \| e_{ij} \|_{i,\, j=1}^{i,\, j=4}, \quad e_{ij} = e_{ji}$$

где

$$e_{11} = 0, \quad e_{12} = \gamma_1, \quad e_{13} = \gamma_2, \quad e_{14} = \gamma_3$$

$$e_{1+i,\, 1+j} = 4\omega^2 C_i C_j \gamma_i \gamma_j J^{-1} + \delta_{ij}(\lambda - C_i)\Omega \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

а δ_{ij} суть символы Кронекера.

Вычисляя эти миноры и используя теорему 4, получаем следующие условия устойчивости стационарных вращений (4.1):

$$4\omega^2 J^{-1} \sum_{(123)} (C_2 - C_3)^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \Omega \sum_{(123)} (\lambda - C_1)(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) > 0 \tag{4.3}$$

$$4\omega^2 \Omega J^{-1} \sum_{(123)} (\lambda - C_1)(C_2 - C_3)^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \Omega^2 \sum_{(123)} (\lambda - C_2)(\lambda - C_3)\gamma_1^2 > 0$$

которые имеют преимущество перед условиями (4.2) в том, что они не вырождаются при

$$\sum_{(123)} (C_2 - C_3)^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 = 0$$

За исключением этого случая условия (4.3) и (4.2) эквивалентны.

Авторы благодарят В. В. Румянцева за обсуждение рукописи и замечания.

Поступила 16 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Routh E. J. A treatise on the stability of a given state of motion. London, Macmillen and Co., 1877.
2. Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London, Macmillen and Co., 1884, p. 52.
3. Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1954.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М., Вычислительный центр АН СССР, 1967.
6. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.

7. Пожарицкий Г. К. О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
8. Арнольд В. И. Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
9. Куницын А. Л. Качественное исследование движений в одном предельном варианте задачи двух неподвижных центров. Тр. Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы, Теоретическая механика, 1966, т. 17, вып. 4.
10. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes. Acta math. Chap. 3, t. 22, 1899, pp. 257—273.
11. Duhem P. Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme. J. Math. pures et appl., Sér. 5, 1902, t. 8, p. 5.
12. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
13. Duhem P. Traité d'energétique ou de thermodynamique générale. t. 2. Paris, Gautheir-Villars, 1911.
14. Шостак Р. Я. О признаке условной определенности квадратичной формы n переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функции n переменных. Усп. матем. н., 1954, т. 9, вып. 2.
15. Кузьмин П. А. Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения. Тр. межвузовской конф. по прикл. теор. устойчивости движения и аналитической механике, Казань, 1964, стр. 93—99.
16. Пожарицкий Г. К. Об устойчивости перманентных вращений твердого тела с закрепленной точкой, находящегося в ньютоновском центральном поле сил. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА, БЛИЗКИХ К КУСОЧНО-ГАМИЛЬТОНОВЫМ

Н. Н. Серебрякова

(Горький)

Указывается, каким условиям должны удовлетворять аппроксимирующие функции, чтобы результат, известный для систем, близких к гамильтоновым с аналитическими правыми частями [1], сохранялся и для систем с кусочно-аналитическими правыми частями.

Теорема. Пусть $H(x, y) = h$ — семейство замкнутых кривых C_h, зависящих от параметра h, сшитых из кусков $H_i(x, y) = h$ на интервалах $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$. Функции $H_i(x, y)$ — аналитические по каждому из аргументов.

Тогда система

$$x^{\cdot} = H_y'(x, y) + \mu p(x, y), \quad y^{\cdot} = -H_x'(x, y) + \mu q(x, y) \tag{1}$$

имеет при $\mu \neq 0$ единственный предельный цикл в окрестности замкнутой кривой $C_{h_0^\circ}$, если $\partial H / \partial y$ непрерывна в точках сшивания $x = x_i$.

Здесь $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — аналитические функции в каждом из интервалов $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, а h_0° — корень уравнения

$$\Psi(h^\circ{}_0) \equiv \int_{C_{h_0^\circ}} q(x, y)\,dx - p(x, y)\,dy = 0, \quad \Psi'(h_0^\circ) \neq 0$$

Предельный цикл будет устойчивым, если $\Psi'(h_0^\circ) < 0$ и неустойчивым, если $\Psi'(h_0^\circ) > 0$.

Доказательство. Обозначим через $S_i^{(1)}$ полупрямые $x = x_i$ при $y > 0$, а через $S_i^{(2)}$ полупрямые $x = x_i$ при $y < 0$ и рассмотрим фазовые траектории системы (1) при $\mu = 0$ и при $\mu \neq 0$, удовлетворяющие одним и тем же начальных условиям

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad \text{при } t = 0 \tag{2}$$