СТОЛКНОВЕНИЕ С ПРЕПЯТСТВИЕМ ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ

Б. Н. Румянцев

(Москва)

Динамике тела, содержащего полости, целиком или частично заполненные жидкостью (преимущественно идеальной), посвящено большое количество работ, начало которым положила статья Н. Е. Жуковского [1]. Обзор основных результатов и направлений исследований имеется в монографиях [2, 3]. Обычно при рассмотрении задачи об ударе жидкости считаются идеальными, это применимо и к жидкостям, которые в обычных условиях должны считаться вязкими, так как во время соударения развиваются очень большие силы. Если же препятствие, с которым сталкивается тело, имеет конечную упругость, учет вязкости необходим. Данная работа посвящена задаче о влиянии вязкости на воздействие тела с препятствием, постановка аналогична использованной в [4]. Для простоты будет рассматриваться случай движения тела, которое можно описать одной обобщенной координатой.

1. Пусть твердое тело, имеющее полость Ω произвольной формы, целиком заполненную вязкой несжимаемой жидкостью, вращаясь относительно неподвижной оси, соударяется в момент времени $t = 0$ с препятствием. Если $M(\varphi, t)$ — момент сил, действующих на тело со стороны препятствия, J — момент инерции тела, φ — угол поворота и $N(t)$ — момент сил, действующих на тело со стороны жидкости, то уравнение движения тела в период времени $0 < t < \Delta t$, в течение которого тело соприкасается с препятствием, имеет вид

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} - M(\varphi, t) = N(t) \qquad (1.1)$$

В случае абсолютно упругого препятствия можно положить $M(\varphi, t) = -k\varphi$, где $k = \mathrm{const}$.

Известно (например [2]), что движение вязкой жидкости описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\nabla u = X - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p + \nu\nabla^2 u, \qquad \mathrm{div}\, u = 0 \qquad (1.2)$$

Здесь u — скорость, ρ — плотность, ν — вязкость жидкости, p — давление и X — внешние массовые силы. Ввиду того что соударение происходит в течение малого промежутка времени Δt и что в этот период времени смещения тела и частиц жидкости малы и действуют большие силы, можно пренебречь обычными силами X и положить $(u\nabla)u = 0$ (равенство нулю конвективных членов [5]). Для решения задачи о движении системы тело—жидкость нужно решить совместно уравнения (1.1), (1.2) при условиях прилипания (скорость жидкости на границе полости совпадает со скоростью точек границы) и некотором начальном условии (задается поле скоростей жидкости и скорость тела при $t = 0$).

В случае линейной функции $M(\varphi, t)$ применим принцип Дюамеля, и для нахождения $M(t)$ при нулевых начальных условиях достаточно знать решение задачи о движении жидкости, первоначально покоящейся, при мгновенном приведении тела во вращение с постоянной угловой скоростью $d\varphi / dt$ [4] (Задача 1). Пусть $L(t)$ — момент сил, действующих при этом на тело со стороны жидкости. Тогда

$$N(t) = \int_0^t \frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} L(t-\tau)\, d\tau \qquad (1.3)$$

Таким образом, задача с нулевыми начальными условиями сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (1.1). Примеры его решения можно найти в [4, 6]. Для решения общей задачи нужно еще найти решение гидродинамической задачи о затухании заданного поля скоростей при остановке тела (Задача 2), вычислить соответствующий момент сил $L_0(t)$ и добавить его к $L(t)$ в (1.3).

Пусть тело, вращавшееся с некоторой скоростью ω и содержащее жидкость с заданным полем скоростей при $t = 0$, мгновенно останавливается. При этом ввиду того что $\omega > 0$ и $\nu < \infty$, существует такое малое t_0, что при всех t из интервала $0 < t < t_0$ жидкость ведет себя как идеальная. В последующие моменты времени получившееся поле скоростей затухает. Подобное поведение решений объясняется тем, что уравнения движения жидкости соединяют в себе черты эллиптических и параболических уравнений. В случае упругого удара характер соударения существенно зависит от соотношения между коэффициентами упругости и вязкости. При очень больших коэффициентах упругости момент отрыва тела от препятствия $\Delta t < t_0$ и эффективный момент количества движения жидкости после отделения от препятствия меньше, чем в случае затвердевшей жидкости [1], и происходит потеря энергии за счет диссипации. При меньших значениях коэффициента упругости вязкость оказывается существенной в течение самого соударения, а при $\Delta t \gg t_0$ жидкость ведет себя почти как затвердевшая, и диссипация энергии незначительна (аналогично [4]).

Давление жидкости p, которое нужно знать для вычисления $N(t)$, определяется по формуле (1.2), если известно поле скоростей. В простейшем случае удара тела, не сопровождающегося вращением, нет относительного движения жидкости [1], и вязкость, если она конечна, не имеет значения. Уравнение (1.2) вырождается в следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$$

отсюда видно, что $\operatorname{grad} p = f(t)$, и распределение давления будет чисто гидростатическим. Функция же $f(t)$ определяется из решения задачи о взаимодействии абсолютно твердого тела с упругим препятствием.

2. В этом пункте будет рассмотрена задача о затухании поля скоростей жидкости при внезапной остановке тела, т. е. случай взаимодействия с идеально неупругим препятствием (Задача 2), и изложена схема ее решения; можно отметить, что Задача 1 сводится к частному случаю Задачи 2. В последующих пунктах приводятся конкретные примеры с результатами расчетов. Для простоты будет рассматриваться плоский случай, вполне аналогично можно исследовать осесимметричный. Используя (1.2), можно положить

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.1}$$

Подстановка этих выражений в (1.2) при отмеченных в п. 1 упрощениях этого уравнения дает

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = \nu \nabla^4 \psi \tag{2.2}$$

Ввиду того что при $t > 0$ тело покоится, должны выполняться следующие граничные и начальное условия:

$$\psi|_S = \frac{\partial \psi}{\partial n}\bigg|_S = 0, \qquad \psi|_{t=0} = \psi_0(x, y) \tag{2.3}$$

Здесь n — направление нормали к границе S полости, $\psi_0(x, y)$ — заданная функция. Важно подчеркнуть, что ψ_0 не произвольна, она описывает поле скоростей, возникшее в жидкости после остановки тела, ее можно найти, решая задачу о движении идеальной жидкости, что сводится к решению задачи Неймана.

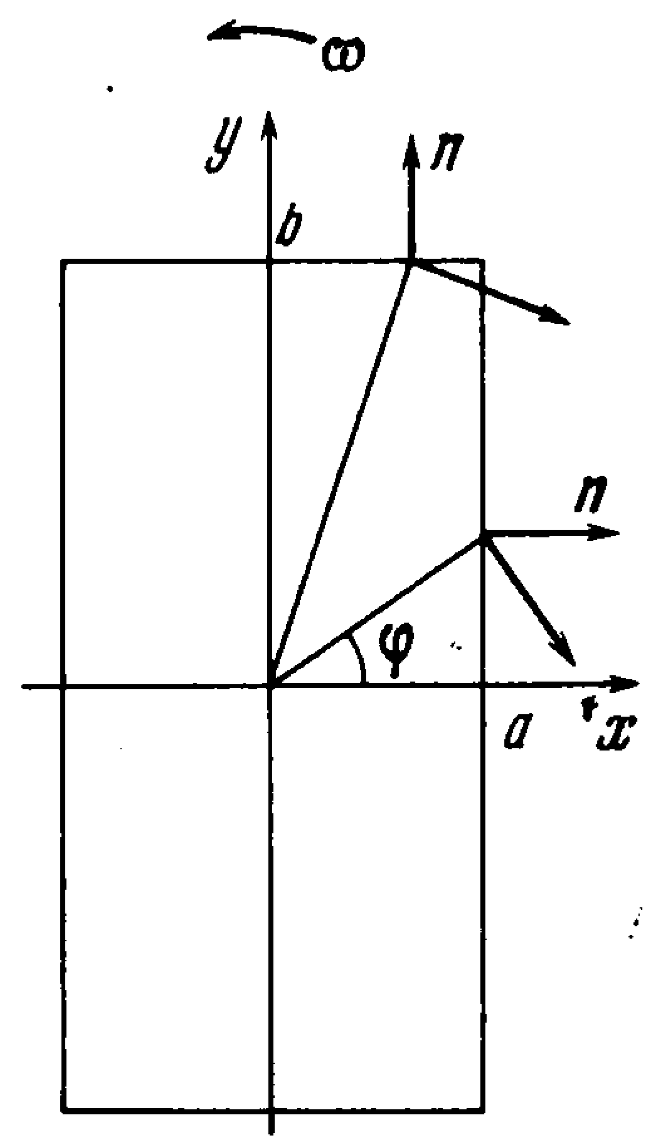
Решение задачи (2.2), (2.3) можно искать в виде ряда Фурье

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\nu\lambda_k t} \chi_k(x, y) \tag{2.4}$$

где χ_k — собственные функции уравнения

$$\nabla^4 \chi_k + \lambda_k \nabla^2 \chi_k = 0 \tag{2.5}$$

Задачи такого типа встречаются в теории упругости [7]. Для них известны доказательства счетности λ_k, их положительности, полноты системы функций χ_k, а также методы нахождения λ_k и χ_k. Для данной задачи, например, можно использовать метод Рица. Условия разрешимости задачи (2.2), (2.3) рассматриваются также в [8]. Аналитические методы применимы только в случаях, когда траектории частиц жидкости неизменны в пространстве, когда (2.5) сводится к уравнению второго порядка (например, [6]). После определения λ_k и χ_k остается только найти c_k из (2.4) как коэффициенты Фурье разложения функции ψ_0.



3. Пусть полость имеет форму прямоугольника с отношением длины к ширине b / a (фигура) и пусть до соударения жидкость вращается вместе с телом с постоянной угловой скоростью ω (простейший и наиболее важный случай). В момент $t = 0$ тело останавливается. Для нахождения ψ_0 $(x,\ y)$ удобно рассматривать движение жидкости в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω. Относительные уравнения движения имеют вид [5]

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - 2\omega v' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v'}{\partial t} + 2\omega u' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} \qquad (3.1)$$

где буквы со штрихами есть значения соответствующих величин в относительной системе координат. Уравнение неразрывности сохраняет свою форму. После исключения p' и введения ψ' по формулам, аналогичным (2.1), получается уравнение для ψ'

$$\nabla^2\psi' = 0 \qquad (3.2)$$

Поскольку при $t = 0$ тело останавливается, в относительной системе координат это равносильно тому, что тело мгновенно приходит в движение с угловой скоростью $-\omega$ из состояния покоя. Таким образом, имеют место следующие граничные условия (фигура):

$$-\left.\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right|_{x=a} = -\left.\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right|_{x=-a} = \omega y, \qquad \left.\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right|_{y=b} = \left.\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right|_{y=-b} = -\omega x \qquad (3.3)$$

Интегрирование по контуру S приводит задачу (3.2), (3.3) к задаче Дирихле. В самом деле, если принять $\psi'(a,\ b) = 0$, вычисления дают

$$\begin{aligned} \psi'(a,\ y) &= \psi'(-a,\ y) = -{}^1/_2\,\omega\,(y^2 - b^2) \\ \psi'(x,\ b) &= \psi'(x,\ -b) = -{}^1/_2\,\omega\,(x^2 - a^2) \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Решение задачи (3.2), (3.4) можно искать в виде

$$\psi'(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \operatorname{ch}\frac{(2n-1)\pi}{2a}\, y \cos\frac{(2n-1)\pi}{2a}\, x + B_n \cos\frac{(2n-1)\pi}{2b}\, y \operatorname{ch}\frac{(2n-1)\pi}{2b}\, x\right] \qquad (3.5)$$

Подстановка (3.5) в (3.4) и последующее интегрирование приводит к следующим выражениям для A_n и B_n:

$$A_n = \frac{16\omega a^2(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3\pi^3} \operatorname{sch}\frac{(2n-1)\pi b}{2a}, \qquad B_n = \frac{16\omega b^2(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3\pi^3} \operatorname{sch}\frac{(2n-1)\pi a}{2b}$$

Вследствие того что абсолютная скорость жидкости равна сумме относительной и переносной, справедливо равенство

$$\psi_0(x,\ y) = \psi_1 + \psi', \quad \psi_1(x,\ y) = {}^1/_2\,\omega\,(x^2 + y^2) \qquad (3.6)$$

Здесь $\psi_1(x,\ y)$ — функция, описывающая вращение с угловой скоростью ω. Таким образом, первая часть Задачи 2 решена.

Для нахождения λ_k и χ_k можно применить метод Рица. Ввиду симметрии функции $\psi_0(x, y)$ можно искать приближенное выражение для χ в виде [7]

$$x \approx (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2) \tag{3.7}$$

где a_k — неизвестные коэффициенты. Нахождение собственных чисел сводится к отысканию минимума функционала [7]

$$\int_\Omega (\nabla^2 \chi)^2 \, d\Omega$$

при условиях (2.3) и дополнительном условии

$$\|\chi\|^2 = \int_\Omega \operatorname{grad}^2 \chi d\Omega = 1 \tag{3.8}$$

Это приводит к отысканию значений λ_k, при которых существует нетривиальное решение системы

$$\sum_{k=1}^{3} a_k [(\nabla^2 \varphi_k, \nabla^2 \varphi_m) - \lambda (\nabla \varphi_k, \nabla \varphi_m)] = 0 \qquad (m = 1, 2, 3) \tag{3.9}$$

где круглые скобки означают скалярное произведение соответствующих функций, т. е. интеграл от их произведения по области Ω. Равенство нулю определителя системы (3.9) приводит к кубичному уравнению относительно λ. Его решение дает для первого собственного числа значения $\lambda_1 = 2.30 / b^2$ при $a = b$, $\lambda_1 = 9.50 / b^2$ при $a = 2b$ и $\lambda_1 \to \to 10.1 / b^2$ при $a \to \infty$.

Система функций χ_k полна в пространстве с нормой (3.8), и из известных теорем [7] вытекает полнота в смысле сходимости в среднем. Пусть $a = 2b$. Подстановка λ_1 в систему (3.9) дает приближенную формулу для χ_1

$$\chi_1 = b^{-11} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (0.017 b^2 - 0.025 x^2 - y^2) \tag{3.10}$$

На последнем этапе затухания, когда первое слагаемое в (2.4) будет доминирующим, решение (как показывает вычисление первого коэффициента Фурье) имеет вид

$$\psi = -0.58 \omega b^3 \chi_1 (x, y) \exp(-9.5 \nu t / b^2)$$

4. В качестве другого примера можно рассмотреть следующую задачу. Плоскость, единица площади которой имеет массу m и поверх которой находится слой вязкой жидкости толщиной h, первоначально движущийся с той же скоростью, что и плоскость, в момент времени $t = 0$ натакливается на упругое препятствие, при этом на единицу площади действует сила $F(t)$. Требуется определить движение плоскости после соударения. Данный пример может служить моделью задачи об ударе вращающегося тела, которое содержит жидкость в кольцевом зазоре.

Уравнение (1.1) в данном случае имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - F(t) = \int_0^t \frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} \sigma (t - \tau) \, d\tau \tag{4.1}$$

где ось x направлена вдоль движения. Для определения $\sigma(t)$ нужно решить гидродинамическую задачу о нахождении поля скоростей жидкости при мгновенном приведении плоскости в движение с постоянной скоростью, т. е. найти функцию $u(y, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{4.2}$$

при граничных и начальном условиях

$$\frac{\partial u(h, t)}{\partial y} = 0 \, (t \geqslant 0), \quad u(0, t) = 1 \, (t > 0), \quad u(y, 0) = 0 \tag{4.3}$$

Тогда $\sigma(t) = \mu\, \partial u/\partial y\,|_{y=0}$. Таким образом, решение гидродинамической задачи в данном случае приводит к уравнению второго порядка (4.2) вместо (2.2), так как уравнение неразрывности (1.3) выполняется тривиальным образом. Если $u(y, t)$ — решение сформулированной задачи, то $v = 1 - u(y, t)$ дает решение задачи о затухании поля скоростей при условиях

$$\frac{\partial v(h,t)}{\partial y} = 0\,(t \geqslant 0), \quad v(0,t) = 0\,(t > 0), \quad v(y, 0) = 1 \tag{4.4}$$

Решение последней задачи можно также искать в виде (2.4), где χ_k — собственные функции уравнения

$$\partial^2\chi_k \,/\, \partial y^2 + \lambda_k\chi_k = 0$$

при условиях (4.4). Вычисления приводят к результату

$$\lambda_k = (2k-1)^2 \pi^2 \,/\, 4h^2, \quad \chi_k = \sin\left[(2k-1)\,\pi y \,/\, 2h\right]$$

Для определения c_k из (2.4) нужно решить задачу о разложении функции (4.4) в ряд Фурье по функциям $\chi_k(y)$. Вычисления дают $c_k = 4 \,/\, (2k-1)\,\pi$. Ряд (2.4) при $t > 0$ быстро сходится, при $t = 0$ он сходится в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри Ω. На границе со стенкой имеет место формула

$$\sigma(t) = \frac{2\mu}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\lambda_k \nu t)$$

Таким образом, в начальный момент времени на единицу площади действует бесконечная сила, но эта особенность интегрируема.

Случай большой вязкости, когда жидкость движется почти как твердое тело, рассматривался в [4]. Для данной задачи можно рассмотреть другой крайний случай, когда вязкость жидкости несущественна в период удара, т. е. $F(t) = mU\delta(t)$. Можно считать для простоты, что до удара плоскость и жидкость покоились. Общий случай получается добавлением к рассматриваемому течению поступательного перемещения всей системы, скорость которого зависит от характера удара (свойств препятствия). После подстановки в (4.1) функции $F(t)$ и деления на $m\nu^2 \,/\, h^3$ уравнение движения плоскости можно представить в безразмерном виде

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} - U_1 2\frac{\rho h}{m}\sigma_1(t_1) = 2\frac{\rho h}{m}\int_0^{t_1} \frac{d^2x_1(\tau)}{d\tau^2}\sigma_1(t_1-\tau)\,d\tau, \quad \sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\varkappa_k t) \tag{4.5}$$

$$x_1 = x \,/\, h, \; t_1 = t\nu \,/\, h^2, \; U_1 = Uh \,/\, \nu, \; \sigma_1 = \sigma h^2 \,/\, m\nu, \; \varkappa_k = \lambda_k h^2$$

Применим к (4.5) преобразование Лапласа

$$X(p) = \int_0^{\infty} x_1(t_1)\, e^{-pt_1} dt_1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = U$$

Перемена порядка интегрирования в правой части приводит к соотношению

$$X(p) = U_1 \left\{ p^2 \left[1 + 2\frac{\rho h}{m} \sum_{k=1}^{\infty} (p + \varkappa_k)^{-1} \right] \right\}^{-1} \tag{4.6}$$

Функция $X(p)$ имеет полюс второго порядка при $p = 0$ и счетное множество полюсов первого порядка на отрицательной части действительной оси. Следовательно, как можно убедиться из формулы обращения преобразования Лапласа, решение $x_1(t_1)$ имеет вид

$$x_1(t_1) = Vt_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-\gamma_k t) + W \tag{4.7}$$

Легко заметить, что $W = -(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)$ и что $\gamma_k > 0$. Все константы в (4.7) могут быть найдены из (4.6), например, вычисляя вычет в начале координат, можно получить следующую формулу $V = U_1 (1 + \rho h/m)^{-1}$, которая легко получается также из соображений сохранения количеств движения.

Поступила 27 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е., О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью. Собр. соч., т. 2. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
2. Моисеев Н. Н. Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
3. Ладыженская О. М. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Физматгиз, 1961.
4. Румянцев Б. Н. О движении твердого тела, содержащего полости, заполненные вязкой жидкостью. ПММ, 1964, т. 28, № 6.
5. Ламб Х. Гидродинамика. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
6. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
7. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
8. Киселев А. А., Ладыженская О. А. О решении линеаризированных уравнений плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1954, т. 95, № 6.

О ТЕОРЕМЕ РАУСА И МЕТОДЕ ЧЕТАЕВА ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ИЗ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

В. Н. Рубановский, С. Я. Степанов

(Москва)

Первые исследования по устойчивости стационарных движений принадлежат Раусу [1, 2]. Метод Рауса базируется на его основной теореме [2], которая была затем существенно дополнена Ляпуновым [3]. Устойчивость стационарных движений можно исследовать также на основании теоремы Ляпунова [4] об устойчивости, строя функцию Ляпунова по методу Четаева [4-6] из интегралов уравнений движения. Указанные два подхода являются основными в исследовании устойчивости стационарных движений.

В работе показано, что при достаточно общих предположениях условия устойчивости, получаемые применением теоремы Рауса и метода Четаева построения функции Ляпунова (в случае полной связки интегралов), совпадают. Близкий к этому результат содержится в [7]. Рассмотрена бифуркация стационарных движений. Отмечены две теоремы об условной знакоопределенности квадратичных форм. Показана применимость теоремы Рауса для нахождения стационарных движений и условий их устойчивости твердого тела с полостью, целиком заполненной идеальной или вязкой жидкостью по отношению к параметрам, характеризующим состояние движения тела, и некоторым другим параметрам, интегральным образом характеризующим движение жидкости. Такая постановка задачи об устойчивости движения тела с жидкостью предложена В. В. Румянцевым [6] и была решена им построением функции Ляпунова по методу Четаева в виде связки интегралов уравнений движения. В отличие от работ В. И. Арнольда (см., например, [8]), в которых исследовалась устойчивость стационарных течений жидкости, здесь устойчивость стационарных движений системы тело — жидкость исследуется по отношению к конечному числу параметров.