

После склеивания (вдоль линий самопересечения) образуется несколько непрерывных кусков поверхности $\psi = \psi(\lambda, \beta)$, скрепленных вдоль этих линий; каждый из них описывается однозначной функцией $\psi(\lambda, \beta)$: будем далее рассматривать только кусок поверхности $\psi = \psi(\lambda, \beta)$, опирающийся на петлю Ω . Проекцию его на плоскость $\psi = 0$ будем называть листом α^* .

Лист α^* разрезан внутри вдоль отрезка $[r_k, r_{k+1}]$; оба берега этого разреза изображают отрезок ударной волны. При перемещении вдоль берегов разреза по замкнутой траектории функция тока ψ должна изменяться монотонно, так как ударная волна не пересекает одну и ту же линию тока; $\psi \neq \text{const}$ на S потому что ударная волна не совпадает с линией тока. Таким образом, получается, что функция тока $\psi(\lambda, \beta)$ не может быть непрерывной на листе α^* . Следовательно, предположение о существовании на ударной волне точек R является неправильным.

Используя пп. 1°, 5°, получим, что ударная волна в каждой точке дозвукового отрезка обращена выпуклостью в сторону набегающего потока.

Поступила 6 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш и ф р и н Э. Г. О выпуклости ударной волны на дозвуковом отрезке в плоском течении. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
2. Г и л и н с к и й С. М. Т е л е н и н Г. Ф. Сверхзвуковое обтекание тел различной формы с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
3. М и з е с Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Н и к о л ь с к и й А. А., Т а г а н о в Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ-1946, т. 10, вып. 4.

ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ

И. Н. Ларина (Москва)

Рассматривается задача обтекания сферы потоком разреженного газа. Уравнение Крука решается методом интегральных итераций. На примере показана сходимость итеративного процесса. Вычисляется сопротивление сферы; в области течения найдено распределение плотности, скорости и температуры.

Рассмотрим сферу радиуса R_0 с температурой поверхности T_w , которая находится в потоке газа с постоянной скоростью V_∞ , плотностью n_∞ и температурой T_∞ . Свяжем со сферой систему координат xz , как указано на фиг. 1.

Уравнение Крука для функции распределения $f(x, u)$ имеет вид [1]

$$u \frac{\partial f}{\partial x} = v [f_0 - f], \quad f_0 = \frac{n}{V(2\pi RT)^3} \exp \frac{-(u-v)^2}{2RT} \quad (1)$$

$$n = \int f du, \quad nv = \int uf du, \quad 3nRT = \int (u-v)^2 f du$$

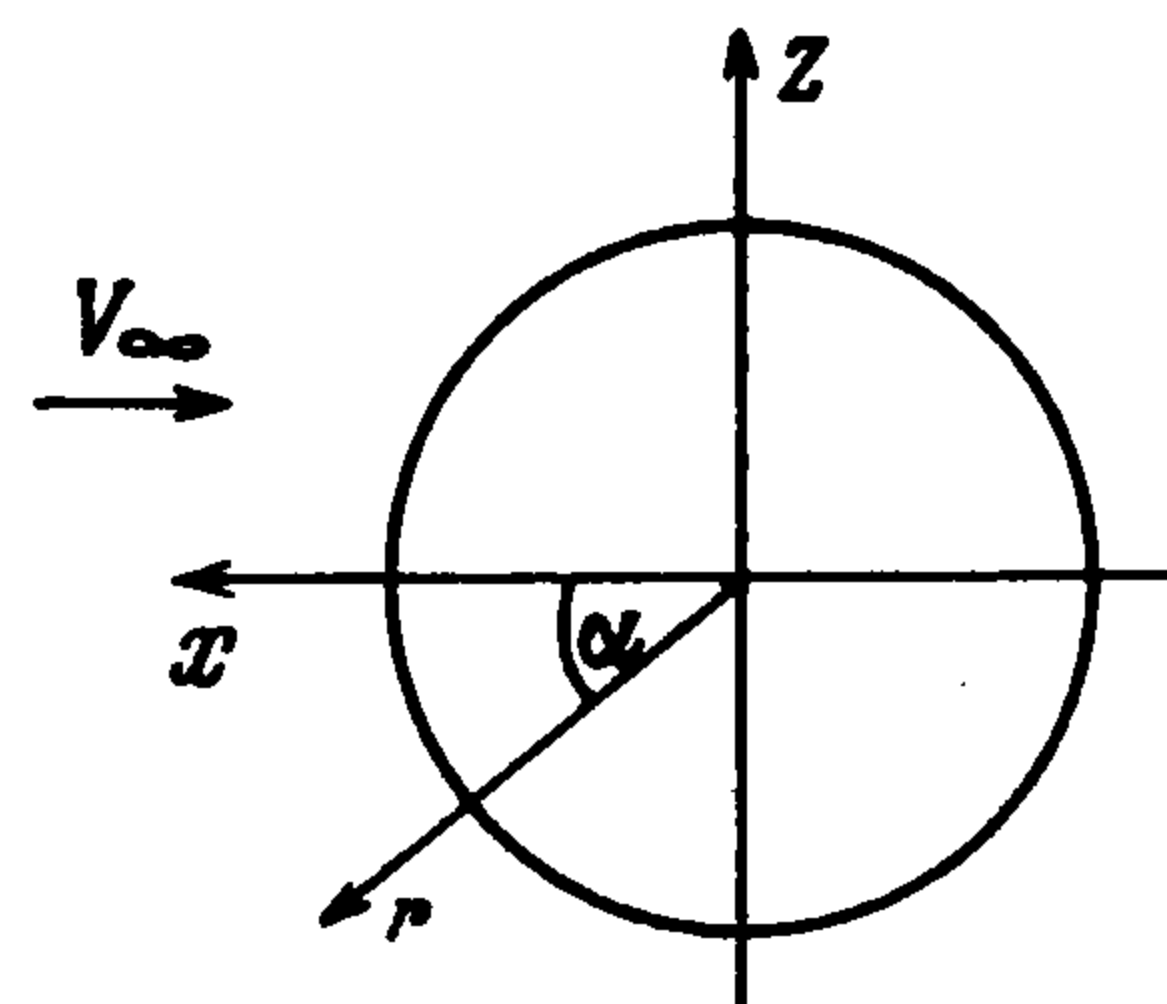
$$v = \frac{16}{5} \frac{nRT}{n_\infty \lambda_\infty \sqrt{2\pi RT_\infty}} \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{-\omega}$$

(ω — константа для данного газа).

Будем рассматривать модель газа в виде твердых сферических молекул, в этом случае $\omega = 0.5$

На бесконечности для функции распределения молекул, идущих к сфере, поставим условие

$$f_\infty = \frac{n_\infty}{V(2\pi RT_\infty)^3} \exp \frac{-(u-V_\infty)^2}{2RT_\infty} \quad (2)$$



Фиг. 1

На поверхности сферы предполагаем диффузное отражение молекул с функцией распределения

$$f_w = \frac{n_w}{\sqrt{(2\pi RT_w)^3}} \exp \frac{-u^2}{2RT_w} \quad (3)$$

Плотность n_w молекул, отраженных от тела, заранее не известна. Она находится из условия непротекания массы на поверхности тела

$$n_w = - \left(\frac{2\pi}{RT_w} \right)^{1/2} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} f du \quad (4)$$

где интегрирование ведется по скоростям частиц, падающих на тело.

Введем безразмерные величины (принимая за характерную скорость $v_\infty = \sqrt{2RT_\infty}$, а за характерную длину диаметр сферы)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* v_\infty, \quad \mathbf{x} = 2R_0 \mathbf{x}^*, \quad f = n_\infty (2RT_\infty)^{-3/2} f^* \\ n = n^* n_\infty, \quad V_\infty = s v_\infty, \quad T = T^* T_\infty, \quad T_w = T_w^* T_\infty, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^* v_\infty$$

В безразмерных переменных уравнение (1) принимает вид (звездочки опускаются)

$$\mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{v} [f_0 - f] \quad (5)$$

$$f_0 = \frac{n}{\sqrt{(\pi T)^3}} \exp \frac{-(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}{T}, \quad \mathbf{v} = \frac{16n \sqrt{T}}{5 \sqrt{\pi K}} \\ n = \int f d\mathbf{u}, \quad n\mathbf{v} = \int \mathbf{u} f d\mathbf{u}, \quad nT = \int (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 f d\mathbf{u} \quad (6)$$

Здесь K — число Кнудсена. Условие на бесконечности (2) записывается в виде

$$f_\infty = \pi^{-3/2} \exp [-(\mathbf{u} - \mathbf{s})^2] \quad (7)$$

условие на теле для отраженных частиц (3), (4)

$$f_w = \frac{n_w}{\sqrt{\pi^3 T_w^3}} \exp \frac{-u^2}{T_w}, \quad n_w = -2 \left(\frac{\pi}{T_w} \right)^{1/2} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} f du \quad (8)$$

(интегрирование ведется по скоростям частиц, падающих на тело).

Таким образом, решение задачи обтекания сферы сводится к решению уравнения (5) с граничными условиями (7), (8).

Запишем уравнение (5) в интегральной форме]

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x} - a\mathbf{y}_s) \exp \left[-\frac{1}{u} \int_0^{y_s} \mathbf{v}(\mathbf{x} - a\mathbf{y}') dy' \right] + \\ + \frac{1}{u} \int_0^{y_s} \mathbf{v}(\mathbf{x} - a\mathbf{y}) f_0(\mathbf{x} - a\mathbf{y}) \exp \left[-\frac{1}{u} \int_0^y \mathbf{v}(\mathbf{x} - a\mathbf{y}') dy' \right] dy \quad (9)$$

где \mathbf{a} — единичный вектор, определяющий направление скорости частицы \mathbf{u} .

В плоскости координат xz переходим к полярным координатам r, α (фиг. 1), а в пространстве скоростей — к сферической системе координат u, ϑ, φ , причем за ось $\vartheta = 0$ выбираем в каждой точке поля r, α луч α . (Угол φ отсчитываем от оси z .) Обозначим через $\Omega(r)$ телесный угол, под которым из точки r видна сфера. Тогда для величины y_s , входящей в уравнение (9), получим

$$y_s = \infty, \quad \mathbf{u} \notin \Omega(r)$$

$$y_s = \sqrt{0.25 + r^2 - 2r \cos \beta}, \quad \mathbf{u} \in \Omega(r) \\ (\beta = \arcsin(r \sin \vartheta) - \vartheta)$$

Уравнения (9), (6) образуют нелинейную систему уравнений с неизвестными n, \mathbf{v}, T, f , для решения которой применяется метод итераций: известные значения $n^{n-1}, \mathbf{v}^{n-1}$,

T^{n-1} и значение n_w^{n-1} , полученное по формуле (8) для известной f^{n-1} , подставляются в правую часть уравнения (9), затем найденное значение функции распределения f^n служит для определения величин n^n , v^n , T^n и n_w^n в следующем приближении. Такая схема метода итераций удобна тем, что не требует запоминания функции распределения. В каждой итерации следует запомнить для каждой точки координатной сетки лишь четыре первых момента функции распределения и значение плотности отраженных частиц n_w на теле.

Таким образом, решение задачи сводится к вычислению четырехкратных интегралов в каждой точке сетки поля. При вычислении функции распределения $f(r, \alpha, u)$ интегрирование вдоль луча с направлением a проводится методом трапеций.

Шаг h интегрирования по y выбирается [2] в зависимости от u и v , так как при малых значениях u и больших значениях v экспонента в подынтегральной функции резко затухает.

Сделав шаг h из точки r, α ($y=0$) по лучу вдоль вектора a (ϑ, φ), оказываемся в точке с координатами r', α'

$$r' = \sqrt{h^2 + r^2 - 2rh \cos \vartheta}, \quad \cos \alpha' = (r \cos \alpha + h \cos \chi) / r'$$

$$(\cos \chi = \sin \alpha \sin \vartheta \cos \varphi - \cos \varphi \cos \vartheta)$$

Угол α' — угол между осью x и вектором $x - ah$.

Осесимметричный характер задачи позволяет брать значения $n^{n-1}, v_x^{n-1}, v_z^{n-1}, T^{n-1}$ для подынтегральной функции в точке r', α' из массива значений n, v_x, v_z, T в плоскости xz . При выборке из таблиц производится линейная интерполяция.

При расчете n, v_x, v_z, T трехкратные интегралы по скоростям вычисляются методом Монте-Карло. Для повышения точности счета дисперсия уменьшается при помощи вычитания из подынтегральной функции локально-максвелловской функции распределения, умноженной соответственно на 1, $u_x, u_z, (u - v)^2$, с параметрами $n^{n-1}, v_x^{n-1}, v_z^{n-1}, T^{n-1}$ из предыдущей итерации.

Расчет был проведен на машине БЭСМ-6 для параметров потока $K = 1, s = 1$ ($M = 1.095$) и $T_w = T_\infty$. В данном случае условия невозмущенного потока ставились при $r = 5 \lambda_\infty$. Сетка в плоскости r, α выбиралась следующим образом: шаг $\Delta \alpha = 0.125$, шаг по r до $r = 1.5 \lambda_\infty$ выбирался равным $\Delta r = 0.0625 \lambda_\infty$, а дальше при $r > 1.5 \lambda_\infty$ шаг был равен $\Delta r = 0.25 \lambda_\infty$.

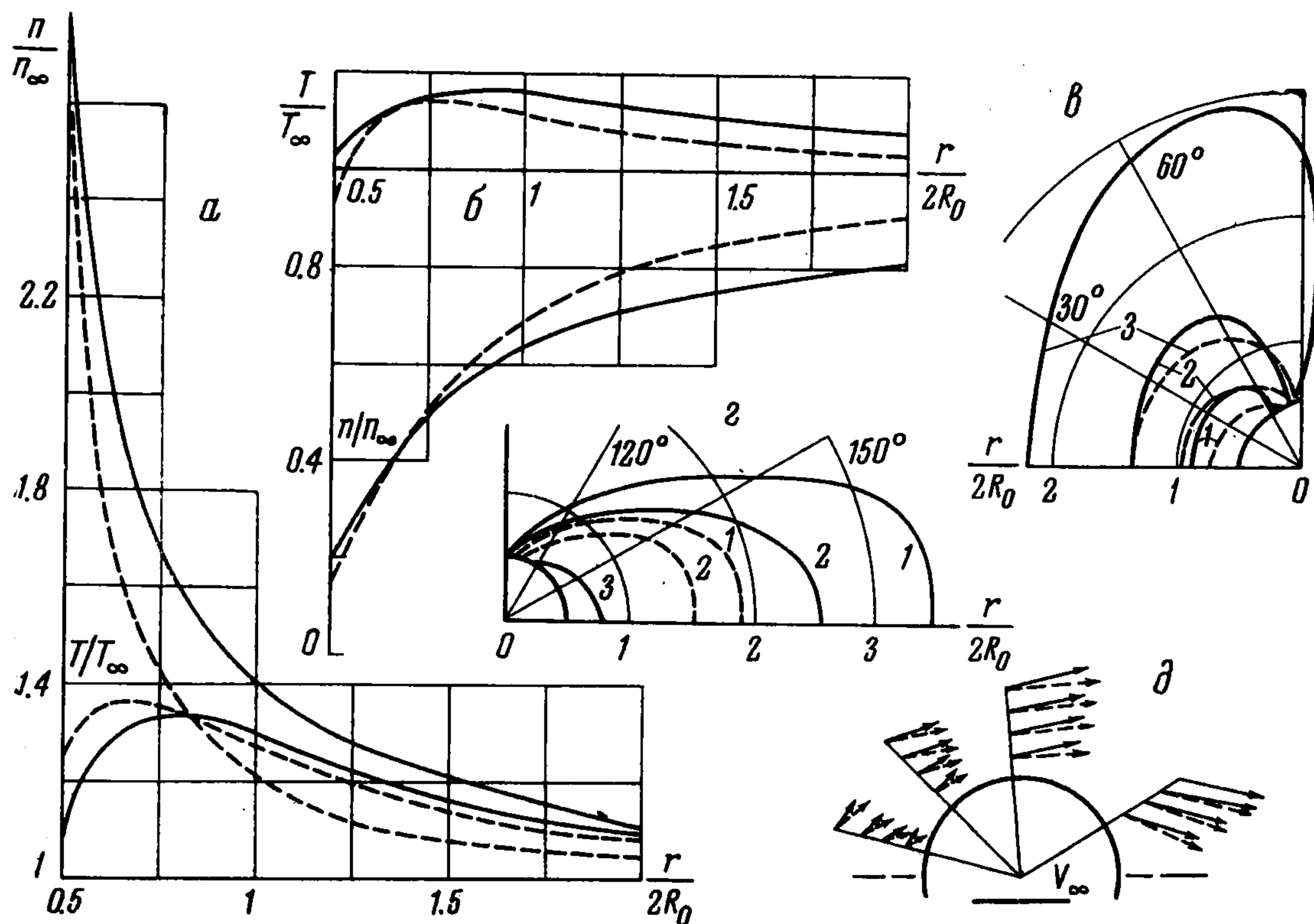
Интегралы по скоростям считались по 1000 случайных точек. Благодаря уменьшению дисперсии плотность n и скорости v_x, v_z считались с точностью $\sim 2\%$, температура T с точностью $\sim 3\%$. (При $K = 0.5$ для достижения такой точности достаточно 500 розыгрышей.)

В начальной итерации за плотность n , скорости v_x, v_z , температуру T и плотность отраженных от тела частиц n_w брались их значения в свободно-молекулярном режиме обтекания. Расчет показал медленную сходимость интегральных итераций. Потребовалось 14 итераций, чтобы получить решение, не меняющееся в последующих итерациях. Сходимость неравномерна по пространству. Во всей области за сферой и в области перед сферой на расстоянии $r < 0.5 \lambda_\infty$ от сферы достаточно уже восьми итераций. Но на расстоянии длины свободного пробега перед телом приращение плотности после 14 итераций в 1.5 раза больше, чем после восьми итераций.

Таким образом, известная медленная сходимость интегральных итераций для одномерных задач имеет место и в задачах пространственных.

Кривые распределения плотности n / n_∞ и температуры T / T_∞ вдоль оси симметрии перед телом приводятся на фиг. 2, а и за телом — на фиг. 2, б. Здесь и далее пунктиром проводятся кривые при свободно-молекулярном обтекании тела. При использованных параметрах потока ударная волна не возникает. Столкновения между частицами в потоке приводят к тому, что плотность перед телом существенно растет, а за телом увеличивается разрежение, и поток выходит к невозмущенному состоянию на большем рас-

стоянии от тела, чем при свободно-молекулярном режиме. Такая картина характерна для всех направлений α , как видно из фиг. 2 *в*, *г*, на которых проведены линии равных значений плотности n/n_∞ . На фиг. 2, *в*, цифрой 1 обозначены кривые для значений $n/n_\infty = 1.5$, цифрой 2 — для $n/n_\infty = 1.25$, цифрой 3 — для $n/n_\infty = 1.1$. При $K = 1$ поток перед телом становится не только более плотным, но и сильнее затормаживается, как видно из фиг. 2, *д* на которой показано векторное поле скоростей вокруг сферы (там же приводится масштаб, в котором откладываются скорости).



Фиг. 2

Интересно отметить, что в области за сферой (фиг. 2, *г*) на расстоянии $r > 0.5 \lambda_\infty$ плотность газа уменьшается по сравнению со свободно-молекулярным потоком (цифрой 1 обозначена кривая $n/n_\infty = 0.9$ цифрой 2 — $n/n_\infty = 0.85$, цифрой 3 — $n/n_\infty = 0.5$).

Расчет сопротивления сферы производился на каждой итерации. Оказалось, что третья итерация дает значение коэффициента сопротивления $C_x = 3.55$, которое при последующих итерациях колеблется в пределах точности расчета сопротивления $\sim 3\%$. (При свободно-молекулярном обтекании сферы для $M = 1.095$ коэффициент сопротивления $C_x = 4.55$.)

Полученные первые результаты позволяют сделать вывод, что по описанной методике имеется возможность проводить расчеты в достаточно широком диапазоне чисел Маха и Кнудсена.

Поступила 5 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Bhatnager P. L., Gross E. P., Krook M. Model of Collision Processes in gases. I. Small amplitude processes in charge and neutral one-component systems. Phys. Rev., 1954, vol. 94, № 3.
2. Черемисин Ф. Г. Структура ударной волны в газе идеальноупругих жестких сферических молекул. Сб. Численные методы в теории разреженных газов. М., изд.-во ВЦ АН СССР, 1969.