

## ЛИТЕРАТУРА

1. О б у х о в А. М. Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
2. К р а і с h n a n R. H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 7, p. 1417.
3. М и л л и о н щ и к о в М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности. Докл. АН СССР, 1941, т. 32, вып. 9, стр. 611.
4. Н о r f E. T i t t E. W. On certain special solutions of the  $\Phi$ -equation of statistical hydrodynamics. J. Ration de Mech. and Analysis, 1953, vol. 2, p. 587.
5. P r o u d m a n I., R e i d W. H. On the decay of a normally distributed and homogeneous turbulent velocity field. Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1954. 247, No 926, p. 163.

## О ФОРМЕ ОТОШЕДШЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРОФИЛЯ

Э. Г. Шифрин

(Москва)

Форма отошедшей ударной волны на дозвуковом ее отрезке (т. е. там, где скорость за волной дозвуковая) при обтекании гладкого выпуклого профиля равномерным потоком исследовалась в [1]. Было установлено, что при достаточно малом значении числа  $M_\infty$  набегающего потока ударная волна по крайней мере на отрезке, где  $M < M_*$  ( $k, M_\infty) \ll 1$ , обращена выпуклостью в сторону набегающего потока ( $M_*$  — некоторая постоянная,  $M_* \rightarrow 1$  при  $M_\infty \rightarrow 1$ ).

Ниже аналогичный результат доказывается для общего случая гладкого, не обязательно выпуклого профиля<sup>1</sup>). В отличие от [1] здесь исследуется только случай малой сверхзвуковой скорости набегающего потока, когда изменениями энтропии на ударной волне можно пренебречь.

Рассмотрим обтекание гладкого профиля равномерным сверхзвуковым потоком с отошедшей ударной волной.

Обозначим через  $Q$  область дозвуковых скоростей, граница которой  $\Gamma(Q)$  состоит из отрезков контура профиля, ударной волны и звуковых линий. Область  $Q$  образуется из-за наличия на профиле критической точки  $O$  (точки разветвления приходящей на профиль линии тока), в которой скорость равна нулю.

Будем предполагать выполнение следующих свойств.

1. Ударная волна — гладкая на всем протяжении.
2. Область  $Q$  — единственная область дозвуковых скоростей за ударной волной.
3. К области  $Q$  не примыкает сверхзвуковых областей, ограниченных только контуром профиля и звуковыми линиями.
4. Контур  $\Gamma(Q)$  не содержит «вторичных» скачков уплотнения.

Покажем, что при этих условиях ударная волна в каждой точке дозвуковой скорости за ударной волной обращена выпуклостью в сторону набегающего потока.

Обозначим через  $A$  отображение области за ударной волной, расположенной в физической плоскости  $xy$ , в плоскость годографа  $\lambda\beta$  ( $\lambda$  — коэффициент скорости,  $\beta$  — угол наклона вектора скорости; оси  $\beta, y$  направлены вертикально вверх, оси  $\lambda, x$  — горизонтально вправо). Границу  $A(Q)$  обозначим через  $\Gamma(A(Q))$ .

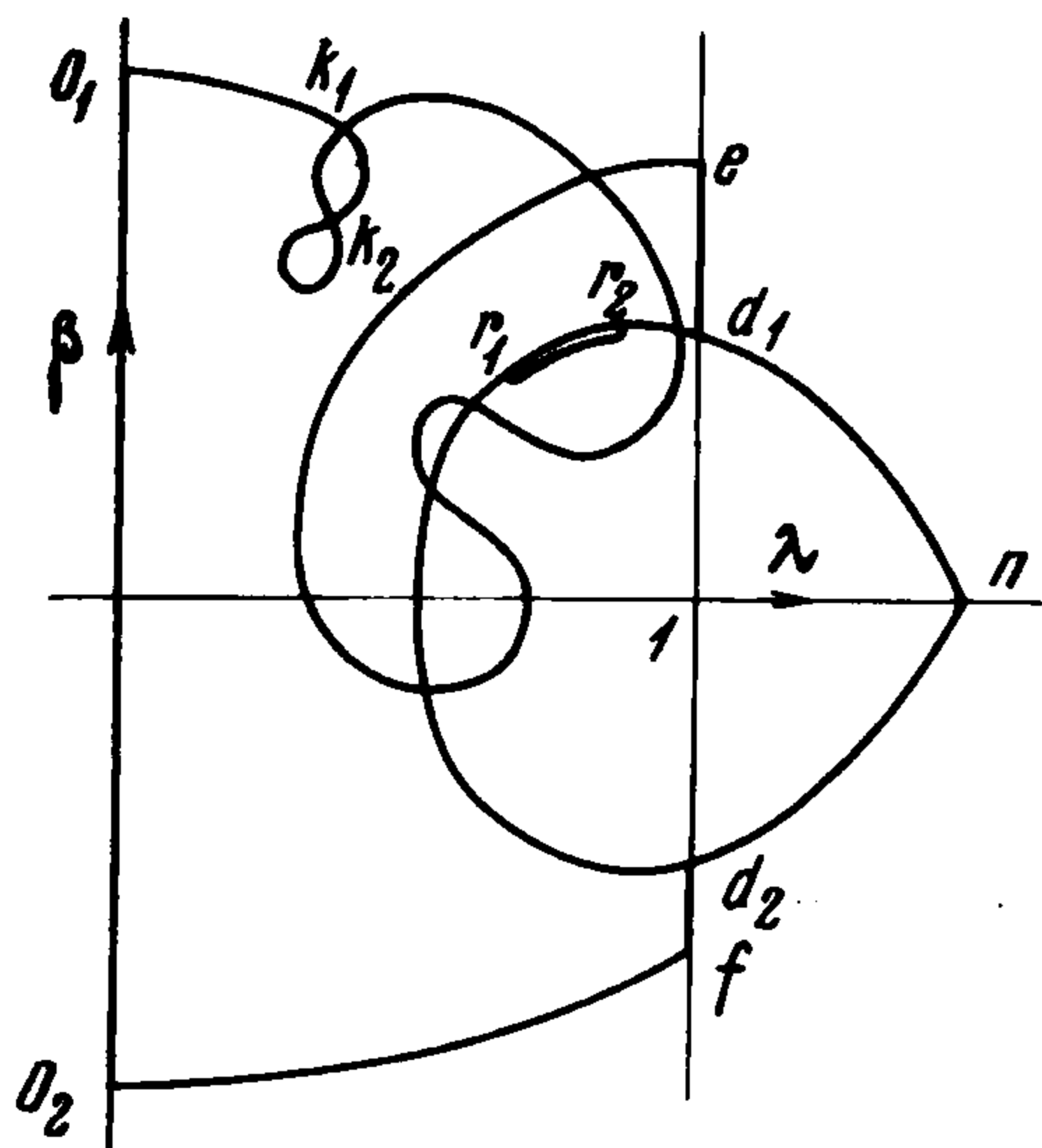
1°. Как известно (см., например, [3])

$$J = \partial(\lambda, \beta) / \partial(x, y) \leq 0 \text{ при } \lambda \leq 1 \quad (1)$$

<sup>1</sup> Это свойство наблюдалось в работе [2] при проведении расчетов обтеканий невыпуклых тел.

(причем равенство возможно только в изолированных точках), поэтому в связи с отсутствием при  $\lambda \leq 1$  складок отображения (на краю складки  $J = 0$ ) имеем  $\Gamma(A(Q)) \subset \subset A(\Gamma(Q))$ . Совпадения не будет, если отображение  $A$  неоднозначно (в целом); при этом  $A(\Gamma(Q))$  имеет точки самопересечения (точки  $K_1, K_2$  на фигуре).

2°. Из (1) следует правило: обходу  $\Gamma(Q)$ , при котором  $Q$  остается слева, соответствует обход  $A(\Gamma(Q))$ , при котором  $A(Q)$  остается справа. На звуковой линии это правило интерпретируется как «закон монотонности» вектора скорости [4].



3°. Из условий 2 и 3 вытекает связность множества точек контура профиля, принадлежащих  $\Gamma(Q)$ ; будем называть это множество отрезком  $L = [E, F]$ .

4°. Обозначим через  $T$  точку изменения выпуклости ударной волны по отношению к внешней нормали. Если  $T$  существует, то из соотношений на скачке уплотнения следует, что перемещению по ударной волне мимо  $T$  соответствует в плоскости  $\lambda\beta$  перемещение по ударной поляре с точкой возврата в  $A(T)$ . Если  $\lambda_T < 1$ , то из п. 2° следует, что образ ударной волны в окрестности  $T$  будет разрезом в  $A(Q)$  (фигура, см. также [1], фиг. 2).

5°. Ударная волна на бесконечности вырождается в характеристики (в верхней полуплоскости — в характеристику первого семейства, в нижней полуплоскости — в характеристику второго семейства), поэтому перемещениям по ударной поляре в направлении бесконечно удаленных точек (на достаточном удалении от профиля) соответствуют различные перемещения по ударной поляре к точке  $n$ , изображающей невозмущенный поток (фигура). Образ гладкой ударной волны на ударной поляре будет непрерывной кривой, поэтому число точек возврата на ней равно нулю или четно. С учетом п. 4° получим, что число точек  $T$  равно нулю или четно.

6°. Множество точек ударной волны, принадлежащих  $\Gamma(Q)$ , связно. Предположим обратное: пусть на ударной волне существует «сверхзвуковой» отрезок  $[B, C]$ , справа и слева от которого на ударной волне скорость дозвуковая. Звуковая линия, выходящая из точки  $B$ , должна попасть в точку  $C$ , так как по условию 2 она не может соединять точку  $B$  с контуром профиля. В соответствии с «законом монотонности» вектора скорости на звуковой линии [4] (см. также п. 2°) точки  $A(B)$  и  $A(C)$  — различные точки ударной поляры (случай прямой звуковой линии, изображаемой в плоскости одной точкой, не имеет места: такая звуковая линия не может быть построена в физической плоскости вследствие ее ортогональности линиям тока). При этом образом отрезка  $[B, C]$  была бы непрерывная кривая (условие 1) на всем сверхзвуковом отрезке ударной поляры. Так как этот отрезок содержит точку  $n$  (фигура), ударная волна в этой точке должна была бы иметь излом. Это противоречит условию 1.

7°. Из условий 2, 3 и пп. 3°, 6° следует, что  $A(\Gamma(Q))$  состоит из  $A(L)$ , всего дозвукового отрезка ударной поляры и двух отрезков линии  $\lambda = 1$ : отображение  $A(L) = [A(E), A(F)] = [e, f]$  содержит отрезок  $[O_1, O_2]$  оси  $\lambda = 0$  длиной  $\lambda$ , изображающий критическую точку  $O$  (фигура).

Будем обозначать в плоскости годографа дозвуковой отрезок ударной поляры через  $S = [d_1, d_2]$ , дозвуковую область внутри ударной поляры — через  $U$ , дозвуковую область вне ударной поляры — через  $V$ .

8°. Будем называть точку  $T$ , в которой  $\lambda \leq 1$ , точкой  $R$ . Число точек  $R$  равно нулю или четно. Действительно, из пп. 4°, 7° и условия 1 следует, что образ дозвукового отрезка ударной волны — непрерывная кривая на всем отрезке  $S$ ; число точек возврата на ней равно нулю или четно.

9°. Предположим, что точки  $R$  существуют. Из п. 4° следует, что в этом случае  $A(Q)$  пересекает ударную поляру.

Прообраз  $S$  разбивает замыкание  $Q$  на подмножества. Будем называть их  $n$ -листами и обозначать  $q_U$  и  $q_V$ , если

$$A(q_U) = a_U \subset U, \quad A(q_V) = a_V \subset V$$

Могут быть два типа  $n$ -листов:  $n$ -лист первого типа в отличие от второго примыкает к ударной волне (как следует из пп. 4°, 6° вдоль связного отрезка). В плоскости  $\lambda\beta$  каждый  $n$ -лист второго типа  $a_U$  ( $a_V$ ) граничит с  $n$ -листом первого или второго типов  $a_V$  ( $a_U$ ) вдоль некоторого отрезка ударной поляры, прообраз которого не лежит на ударной волне (в случае, если  $\lambda_R = 1$ , этот отрезок стягивается в точку).

Обозначим через  $\sigma$  замыкание объединения  $n$ -листов второго типа, граничащих друг с другом. Каждое  $\sigma$  граничит с  $n$ -листом первого типа. Действительно, в противном случае  $\sigma$  было бы ограничено только контуром профиля, так как звуковая линия и ударная волна могут ограничивать только  $n$ -лист первого типа.

Будем называть  $n$ -листом (без указания типа) объединение  $n$ -листа первого типа со всеми граничащими с ним  $\sigma$ .

Отображение  $n$ -листа в плоскость  $\lambda\beta$  является, вообще говоря, многозначным; предположим, что оно действительно многозначно.

Функция тока  $\psi(\lambda, \beta)$ , определенная на  $n$ -листе, многозначна; ввиду отсутствия при  $\lambda < 1$  линий ветвления (п. 1°) она описывает в пространстве  $\psi\lambda\beta$  непрерывную самопересекающуюся поверхность, натянутую на самопересекающуюся кривую  $A(L)$  в плоскости  $\psi = 0$  (на  $L$  задано условие  $\psi = 0$ ).

После склейки вдоль линий самопересечения поверхность  $\psi = \psi(\lambda, \beta)$  предстает в виде объединения кусков поверхности, скрепленных вдоль этих линий; каждый описывается однозначной непрерывной функцией  $\psi(\lambda, \beta)$ .

Отбросим куски поверхности (после соответствующих разрезов вдоль линий скрепления), которые натянуты только на отрезки контура  $A(L)$ ; после этого от каждой поверхности  $\psi = \psi(\lambda, \beta)$  (порожденной одним  $n$ -листом) останется только по одному куску, граница которого содержит образ ударной волны (из построения видно, что граница каждого  $n$ -листа может содержать только один отрезок ударной волны).

Прообраз проекции оставшегося куска поверхности  $\psi = \psi(\lambda, \beta)$  на плоскость  $\psi = 0$  (или весь  $n$ -лист, если его отображение однозначное) будем называть листом  $Q$ ; его образ лист  $A(Q)$  будем обозначать  $a_U$  ( $a_V$ ), если он порождается  $n$ -листом первого типа  $q_U$  ( $q_V$ ).

10°. Пронумеруем точки  $R$  в порядке их расположения при перемещении по ударной волне от звуковой точки  $D_1 = A^{-1}(d_1)$ , в которой  $\beta > 0$  (фигура). Положение точек  $r_i = A(R_i)$  на  $S$  будет уже другим: точка  $r_2$  будет ближе по ударной поляре к точке  $d_1$ , чем  $r_1$ ;  $r_4$  — ближе, чем  $r_3$  и т. д. Точки  $d_1, r_i, d_2$  разбивают  $S$  на отрезки, покрываемые при перемещении по ударной волне нечетное, но для соседних отрезков различное число раз; следовательно, каждый отрезок  $s_k = [r_{2k}, r_{2k-1}]$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) покрывается не менее чем трижды. Используя пп. 2°, 4°, 5°, получим, что в окрестности отрезка  $s_k \subset S$  существует не менее двух листов  $a_V$  и не менее одного листа  $a_U$ , причем число листов  $a_V$  на единицу больше числа листов  $a_U$ . В силу условия 4 указанные листы могут быть ограничены при  $\lambda < 1$ , помимо  $S$ , только  $A(L)$ .

11°. Будем передвигаться вдоль  $A(L)$  от точки  $e$  к точке  $f$  (при соответствующем перемещении вдоль  $L$ ). Ввиду того что в плоскости  $\lambda\beta$  на линии  $\lambda = 1$  отрезок  $[e, f] \supset [d_1, d_2]$ , получим, учитывая пп. 2°, 8°, что существуют отрезки  $[e, g], [f, q]$ ; при этом  $(e, g) \cup (f, q) \subset A(L) \cap V$ . Пусть точки  $g, q$  таковы, что эти отрезки имеют максимальную длину.

Отрезок  $[e, g]$  ограничивает один (и только один) из не менее чем двух листов  $a_V$ , расположенных в окрестности отрезка  $s_1$ ; обозначим этот лист через  $a_V^{(1)}$ .

Действительно, на отрезке  $[D_1, R_1] \subset L$  не имеется точек  $R$ , поэтому в соответствии с пп. 2°, 5° к отрезку  $A([D_1, R_1]) = [d_1, r_1] \supset s_1$  примыкает один лист  $a_V$ , который не может быть ограничен только отрезком  $A(L)$ , примыкающим к линии  $\lambda = 1$ .

Если  $g = f$  ( $q = e$ ), то  $A(L) \subset V$ . Из п. 10° следует, что это возможно только при отсутствии точек  $R$ . Поэтому будем предполагать, что  $g \neq f$  и, следовательно,  $g \in S$ .

Из п. 4° вытекает, что листы  $\alpha_V$  и  $\alpha_U$ , расположенные в окрестности  $s_1$ , граничат один с другим на отрезках ударной поляры, примыкающих к отрезку  $s_1$ : лист  $\alpha_V^{(1)}$  граничит с  $\alpha_U^{(2)}$  на отрезке  $[r_1, g_1]$ ,  $g_1 \in (r_1, g)$ : лист  $\alpha_U^{(2)}$  граничит с  $\alpha_V^{(3)}$  на отрезке  $[r_2, h]$ ,  $h \in (r_2, d_1]$  (верхний индекс нумерует листы  $\alpha^{(i)}$ ).

Отсюда следует существование отрезка  $[h, p]$ ,  $(h, p) \subset A(L) \cap V$ , ограничивающего лист  $\alpha_V^{(3)}$ .

Если  $p = f$ , то  $[h, p]$  пересекается с  $[e, g]$ ,  $[e, g) \subset A(L) \cap V$ , так как точка  $h$  лежит в области, ограниченной отрезками  $S$ , линии  $\lambda = 1$  и  $[e, g]$  (фигура), а точка  $f$  — вне ее. Таким образом, в виду связности  $A(L)$  получаем, что  $A(L)$  в этом случае образует петлю, внутри которой содержится отрезок  $s_1$ , являющийся разрезом для объединения листов  $\alpha^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) с отрезками  $[r_1, g_1]$ ,  $[r_2, h]$ .

12°. Предположим теперь, что границы листов  $\alpha_V^{(1)}$  и  $\alpha_V^{(3)}$  не пересекаются. При этом будет  $p \neq f$ , т. е.  $p \in S$ . Это равносильно предположению о существовании точек  $R_3, R_4$  и отрезка  $s_2 = [r_3, r_4]$ . Действительно, в связи с тем, что  $\alpha_V^{(3)}$  содержит некоторую окрестность точки  $r_2$ , принадлежащую  $V$ , учитывая, что  $h \in [d_1, r_2)$ , получим, что  $p \in (r_2, d_2]$ . Если на интервале  $(R_2, P)$ ,  $P = A^{-1}(p)$ , ударной волны не существует точек  $R$ , то в соответствии с правилом обхода п. 1° образ окрестности отрезка ударной волны  $(R_2, P)$  принадлежит  $V$ . Этого не может быть, так как  $A(L)$  пересекает  $S$  в точке  $p$  и, следовательно, образ области  $Q$  в окрестности точки  $p$  также пересекает  $S$ . Таким образом, точка  $R_3$  существует; согласно с п. 8° отсюда следует существование точки  $R_4$ .

Аналогично листам  $\alpha_V^{(1)}$ ,  $\alpha_U^{(2)}$ ,  $\alpha_V^{(3)}$ , окружающим отрезок  $s_1$ , отрезок  $s_2 = [r_4, r_3]$  будут окружать листы  $\alpha_V^{(3)}$ ,  $\alpha_U^{(4)}$ ,  $\alpha_V^{(5)}$ . По предположению границы листов  $\alpha_V^{(1)}$  и  $\alpha_V^{(3)}$  не пересекаются.

Если границы листов  $\alpha_U^{(2)}$ ,  $\alpha_U^{(4)}$  (или  $\alpha_V^{(3)}$  и  $\alpha_V^{(5)}$ ) пересекаются, получим тот же результат, что и в п. 11° при  $p = f$ . Если же границы этих листов не пересекаются, то аналогично предыдущему устанавливается существование пары точек  $R_5, R_6$  и т. д.

Повторяя эти рассуждения необходимое число раз, придем к случаю пересечения границ листов  $\alpha_N$  и  $\alpha_{N+2}$ ; это связано с неосуществимостью неограниченного числа повторений. В самом деле, при отсутствии пересечений отрезков  $A(L)$ , ограничивающих листы  $\alpha_U^{(i)}$  ( $i = 1, 3, 5$ ) или  $\alpha_U^{(i)}$  ( $i = 2, 4, 6$ ) будет  $\alpha_V^{(1)} \supset \alpha_V^{(3)} \supset \alpha_V^{(5)} \supset \dots$  и  $\alpha_U^{(2)} \supset \alpha_U^{(4)} \supset \alpha_U^{(6)} \supset \dots$ . Это невозможно, так как существует лист первого типа  $\alpha_V$ , ограниченный отрезком  $[f, q]$  контура  $A(L)$ , отрезком  $[f, d_2]$  линии  $\lambda = 1$  и отрезком ударной поляры  $[q, d_2]$ , который не содержится в  $\alpha_V^{(1)} \cup \alpha_U^{(2)}$  (так как отрезок  $[f, d_2]$  не принадлежит замыканию  $\alpha_V^{(1)} \cup \alpha_U^{(2)}$ ).

Таким образом, доказано, что если на ударной волне имеются точки  $R$ , то существует по крайней мере одна петля  $\Omega$  контура  $A(L)$ , содержащая внутри себя отрезок  $s_i = [r_{2i}, r_{2i-1}]$ .

13°. Рассмотрим петлю  $\Omega$ , образованную границами листов  $\alpha^{(i-1)}$ ,  $\alpha^{(i)}$ ,  $\alpha^{(i+1)}$  (пересекаются границы листов  $\alpha^{(i-1)}$  и  $\alpha^{(i+1)}$ ). Лист  $\alpha^{(i-1)}$  граничит с листом  $\alpha^{(i)}$  на отрезке  $[r_k, l]$ ,  $[r_k, l] \subset S$ , лист  $\alpha^{(i)}$  граничит с листом  $\alpha^{(i+1)}$  на отрезке  $[r_{k+1}, m]$ ,  $[r_{k+1}, m] \subset S$ .

В соответствии с п. 9° на замыкании каждого из этих листов определена однозначная непрерывная функция  $\psi(\lambda, \beta)$ ; эта функция непрерывна также на отрезке  $[r_k, l]$  при переходе с листа  $\alpha^{(i-1)}$  на лист  $\alpha^{(i)}$  и на отрезке  $[r_{k+1}, m]$  при переходе с листа  $\alpha^{(i)}$  на лист  $\alpha^{(i+1)}$ . В связи с тем, что  $\psi = 0$  на  $A(L)$ , соответствующая поверхность  $\psi = \psi(\lambda, \beta)$  в пространстве  $\psi, \lambda, \beta$  будет самопересекающейся.

После склеивания (вдоль линий самопересечения) образуется несколько непрерывных кусков поверхности  $\psi = \psi(\lambda, \beta)$ , скрепленных вдоль этих линий; каждый из них описывается однозначной функцией  $\psi(\lambda, \beta)$ : будем далее рассматривать только кусок поверхности  $\psi = \psi(\lambda, \beta)$ , опирающийся на петлю  $\Omega$ . Проекцию его на плоскость  $\psi = 0$  будем называть листом  $\alpha^*$ .

Лист  $\alpha^*$  разрезан внутри вдоль отрезка  $[r_k, r_{k+1}]$ ; оба берега этого разреза изображают отрезок ударной волны. При перемещении вдоль берегов разреза по замкнутой траектории функция тока  $\psi$  должна изменяться монотонно, так как ударная волна не пересекает одну и ту же линию тока;  $\psi \neq \text{const}$  на  $S$  потому что ударная волна не совпадает с линией тока. Таким образом, получается, что функция тока  $\psi(\lambda, \beta)$  не может быть непрерывной на листе  $\alpha^*$ . Следовательно, предположение о существовании на ударной волне точек  $R$  является неправильным.

Используя пп. 1°, 5°, получим, что ударная волна в каждой точке дозвукового отрезка обращена выпуклостью в сторону набегающего потока.

Поступила 6 III 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ш и ф р и н Э. Г. О выпуклости ударной волны на дозвуковом отрезке в плоском течении. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
2. Г и л и н с к и й С. М. Т е л е н и н Г. Ф. Сверхзвуковое обтекание тел различной формы с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
3. М и з е с Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Н и к о л ь с к и й А. А., Т а г а н о в Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ-1946, т. 10, вып. 4.

### ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ

И. Н. Ларина (Москва)

Рассматривается задача обтекания сферы потоком разреженного газа. Уравнение Крука решается методом интегральных итераций. На примере показана сходимость итеративного процесса. Вычисляется сопротивление сферы; в области течения найдено распределение плотности, скорости и температуры.

Рассмотрим сферу радиуса  $R_0$  с температурой поверхности  $T_w$ , которая находится в потоке газа с постоянной скоростью  $V_\infty$ , плотностью  $n_\infty$  и температурой  $T_\infty$ . Свяжем со сферой систему координат  $xz$ , как указано на фиг. 1.

Уравнение Крука для функции распределения  $f(x, u)$  имеет вид [1]

$$u \frac{\partial f}{\partial x} = v [f_0 - f], \quad f_0 = \frac{n}{V(2\pi RT)^3} \exp \frac{-(u-v)^2}{2RT} \quad (1)$$

$$n = \int f du, \quad nv = \int uf du, \quad 3nRT = \int (u-v)^2 f du$$

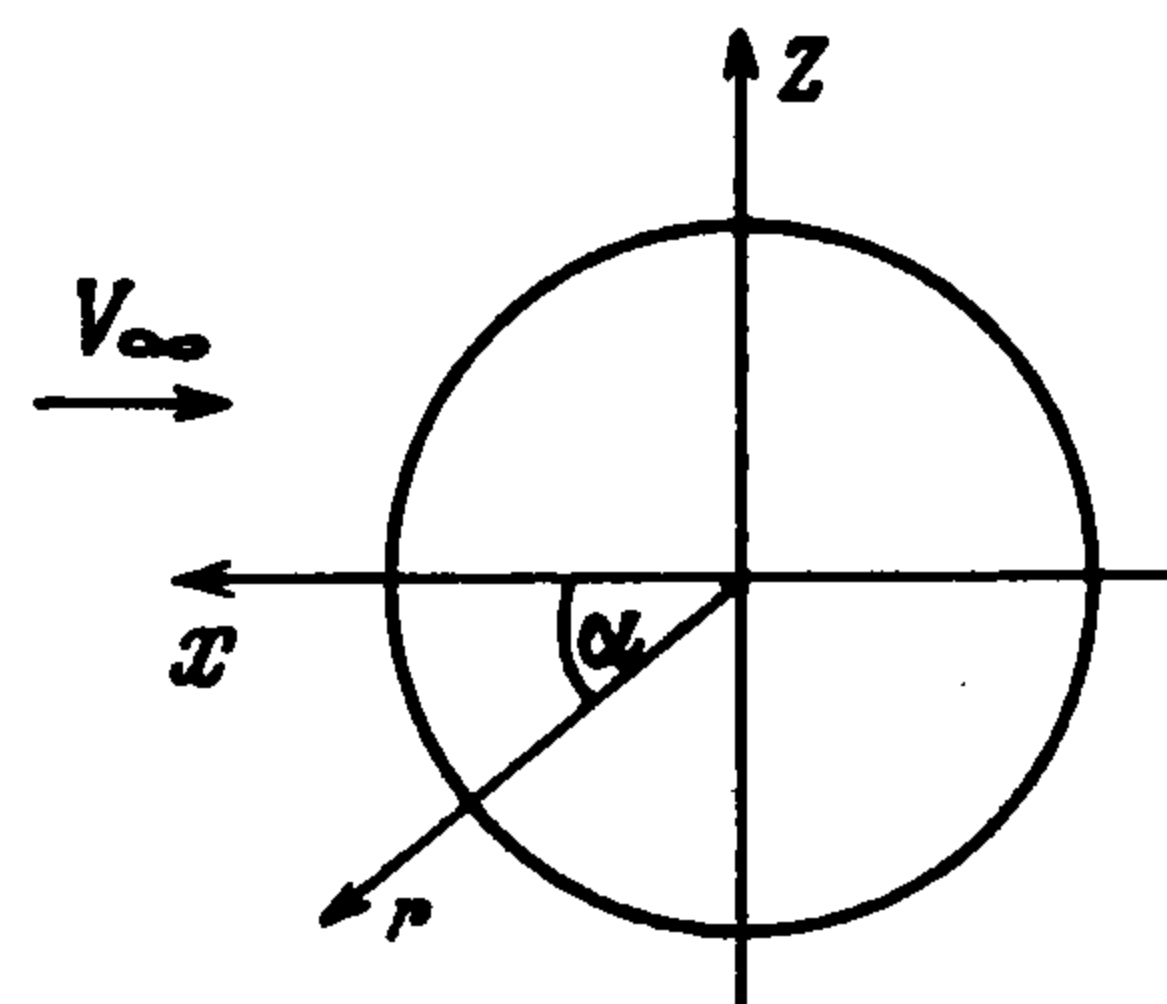
$$v = \frac{16}{5} \frac{nRT}{n_\infty \lambda_\infty \sqrt{2\pi RT_\infty}} \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^{-\omega}$$

( $\omega$  — константа для данного газа).

Будем рассматривать модель газа в виде твердых сферических молекул, в этом случае  $\omega = 0.5$

На бесконечности для функции распределения молекул, идущих к сфере, поставим условие

$$f_\infty = \frac{n_\infty}{V(2\pi RT_\infty)^3} \exp \frac{-(u-V_\infty)^2}{2RT_\infty} \quad (2)$$



Фиг. 1