К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДВУХМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. И. Кляцкин

(Москва)

Для двухмерных движений в отличие от трехмерных помимо обычного интеграла энергии существует еще квадратичный по скорости интеграл движения — квадрат вихря поля скорости. Это обстоятельство, как показано в работах [1,2] , обеспечивает существование решения уравнений гидродинамики с нормальным (гауссовским) распределением вероятностей поля скоростей со спектром, отличным от белого шума.

Целью настоящей работы является определение характеристики такого распределения — корреляционной (структурной) функции исследуемых полей непосредственно из уравнений гидродинамики.

Рассмотрим двухмерное движение в плоскости xy несжимаемой, невязкой, турбулентной жидкости. Турбулентность будем считать стационарной во времени, однородной и изотропной в пространстве. Движение жидкости описывается функцией тока $\psi(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi = \{\Delta\psi, \psi\}, \qquad \{\varphi, \psi\} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1}$$

Здесь $\{\varphi, \psi\}$ — скобки Пуассона, Δ — двухмерный оператор Лапласа. Поле скорости определяется вектором $(-\partial\psi / \partial y,\ \partial\psi / \partial x)$.

В соответствии с результатами работ [1,2] будем считать поле функции тока $\psi(\mathbf{r}, t)$ случайным, распределенным по нормальному закону. Усредняя уравнение (1) по ансамблю турбулентных движений, получаем

$$\langle\{\Delta\Psi, \Psi\}\rangle = 0 \tag{2}$$

Так как поле функции тока $\Psi(\mathbf{r}, t)$ определено с точностью по адитивной постоянной, то статистической характеристикой поля Ψ будет ее структурная функция

$$D_\psi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \langle[\Psi(\mathbf{r}_1 t) - \Psi(\mathbf{r}_2, t)]^2\rangle \tag{3}$$

Рассмотрим произведение трех ψ функций, взятых в один момент времени, но в разных пространственных точках. В силу стационарности

$$\partial / \partial t \langle\Delta\Psi(\mathbf{r}_1, t)\,\Delta\Psi(\mathbf{r}_2, t)\,\Delta\Psi(\mathbf{r}_3, t)\rangle = 0 \tag{4}$$

Используя уравнения (1), (3), отсюда легко получить функциональное уравнение для структурной функции D_ψ, а именно:

$$X_{q_1, q_2} + X_{q_2, q_3} + X_{q_3, q_1} = 0 \tag{5}$$

$$X_{q_1, q_2} = \frac{1}{q_1 q_2}\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2}[\Delta_{q_1}{}^2 D_\psi(q_1)\,\Delta_{q_2} D_\psi(q_2) - \Delta_{q_2}{}^2 D_\psi(q_2)\,\Delta_{q_1} D_\psi(q_1)] \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ ($q_i = |\mathbf{q}_i|$) — вектора, определяемые соотношениями

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \qquad \mathbf{q}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \qquad \mathbf{q}_3 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \qquad (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0)$$

При выводе уравнения (5) использовалась нормальность распределения поля Ψ (среднее от произведения четырех Ψ функций равняется сумме, в которой Ψ функции усредняются попарно всеми возможными способами).

Из выражения (6) следует, что

$$X_{q_1, q_2} = - X_{q_2, q_1} \tag{7}$$

Условие (7) позволяет решить функциональное уравнение (5), решение которого имеет вид

$$X_{q_1, q_2} = A(q_1) - A(q_2) \tag{8}$$

Здесь $A(q)$ — произвольная функция. Умножая (8) на $q_1 q_2$ и действуя оператором $\partial^4 / \partial q_1^2 \partial q_2^2$, получаем дифференциальное уравнение для структурной функции $D_\psi(q)$

$$\frac{\partial^6}{\partial q_1^3 \partial q_2^3}[\Delta_{q_1}{}^2 D_\psi(q_1)\,\Delta_{q_2} D_\psi(q_2) - \Delta_{q_2}{}^2 D_\psi(q_2)\,\Delta_{q_1} D_\psi(q_1)] = 0 \tag{9}$$

Уравнение (9) можно решать методом разделения переменных. Используя при этом условие $\Delta D_\psi(q) \to 0$ при $q \to \infty$, получаем

$$(\Delta + \lambda)\Delta D_\psi(q) = 0 \tag{10}$$

Здесь λ — постоянная разделения, имеющая размерность квадрата обратной длины.

При решении уравнения (10) возможны два случая, отвечающие значениям

$$\lambda > 0 \ (\lambda = k_0^2), \quad \lambda < 0, \ (\lambda = -k_0^2)$$

В первом случае решением уравнения (10) для ΔD_ψ будет

$$\Delta D_\psi(q) = CJ_0(k_0 q) \tag{11}$$

Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя. Величина $\Delta D_\psi(q)$ определяет структурную функцию поля скорости и тем самым спектральную плотность энергии, для которой в рассматриваемом случае получаем

$$E(k) = E_0 \delta(k - k_0) \tag{12}$$

что соответствует дискретному спектру.

Во втором, более интересном, случае для ΔD_ψ получаем решение, быстро затухающее с ростом q

$$\Delta D_\psi(q) = -C_1 k_0^2 K_0(q / L_0) \tag{13}$$

где $K_0(z)$ — функция Макдональда, а величины $L_0 = k_0^{-1}$ и C_1 — размерные константы, возникающие в теории. Спектральная плотность энергии, соответствующая (13) имеет вид

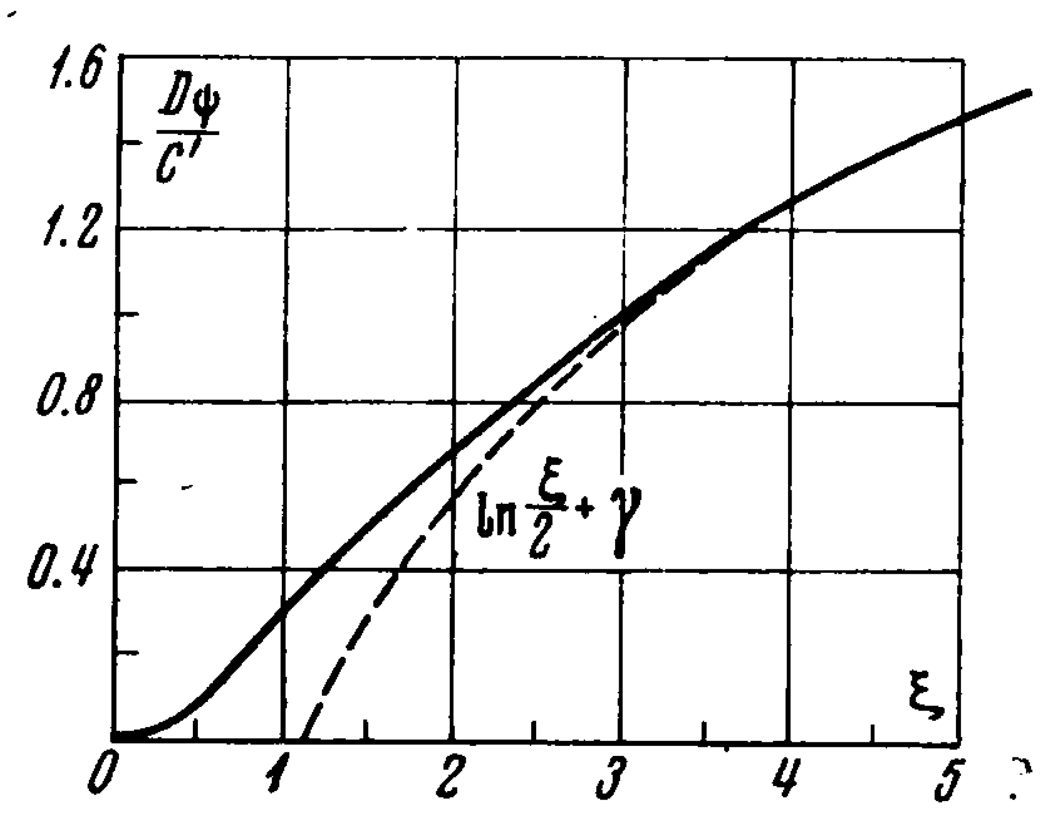
$$E(k) = \frac{E_0 k}{k_0^2 + k^2} \tag{14}$$

Особенностью поведения этой спектральной плотности будет расходимость (логарифмическая) средней плотности кинетической энергии, обусловленная отсутствием вязкости в рассматриваемой задаче.

Выполняя двухмерное преобразование Фурье в формуле (13), получаем выражение для двухмерного спектра поля функции тока

$$D_\psi(k) = \frac{C_2}{k^2(k_0^2 + k^2)} \tag{15}$$

что совпадает с результатами работы [1]. Выражение для самой структурной функции D_ψ получаем интегрированием уравнения (13) при условиях $D_\psi(0) = 0$, $D_\psi'(0) = 0$



$$D_\psi(q) = C_1\left[K_0(q / L_0) + \ln\frac{q}{2L_0} + \gamma\right] \tag{16}$$

где $\gamma \approx 0.58$ — постоянная Эйлера. Характерной чертой поведения $D_\psi(q)$ является отсутствие второй производной в нуле. График величины $D_\psi(q) / C_1$ в зависимости от безразмерной длины $\xi = q / L_0$ представлен на фигуре.

Заметим, что предположение о нормальности распределения поля $\psi(\mathbf{r}, t)$ не будет необходимым. Все остается в силе и в предположении квазинормальности (гипотеза Миллионщикова [3]), хотя, вообще говоря, полученное решение может быть и неединственным. Отметим также, что для аналогичной задачи в трехмерном случае, как это следует из результатов работ [4, 5], спектральная плотность энергии соответствует белому шуму, что не представляет физического интереса.

Автор благодарит А. М. Обухова за предложенную тему и обсуждение результатов.

Поступила 24 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Обухов А. М. Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
2. Kraichnan R. H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 7, p. 1417.
3. Миллионщиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности. Докл. АН СССР, 1941, т. 32, вып. 9, стр. 611.
4. Hopf E. Titt E. W. On certain special solutions of the Ф-equation of statistical hydrodynamics. J. Ration de Mech. and Analysis, 1953, vol. 2, p. 587.
5. Proudman I., Reid W. H. On the decay of a normally distributed and homogeneous turbulent velocity field. Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1954. 247, No 926, p. 163.

О ФОРМЕ ОТОШЕДШЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПРОФИЛЯ

Э. Г. Шифрин

(Москва)

Форма отошедшей ударной волны на дозвуковом ее отрезке (т. е. там, где скорость за волной дозвуковая) при обтекании гладкого выпуклого профиля равномерным потоком исследовалась в [1]. Было установлено, что при достаточно малом значении числа M_∞ набегающего потока ударная волная по крайней мере на отрезке, где $M < M_*$ $(k, M_\infty) \leqslant 1$, обращена выпуклостью в сторону набегающего потока (M_* — некоторая постоянная, $M_* \to 1$ при $M_\infty \to 1$).

Ниже аналогичный результат доказывается для общего случая гладкого, не обязательно выпуклого профиля [1]). В отличие от [1] здесь исследуется только случай малой сверхзвуковой скорости набегающего потока, когда изменениями энтропии на ударной волне можно пренебречь.

Рассмотрим обтекание гладкого профиля равномерным сверхзвуковым потоком с отошедшей ударной волной.

Обозначим через Q область дозвуковых скоростей, граница которой Γ (Q) состоит из отрезков контура профиля, ударной волны и звуковых линий. Область Q образуется из-за наличия на профиле критической точки O (точки разветвления приходящей на профиль линии тока), в которой скорость равна нулю.

Будем предполагать выполнение следующих свойств.

1. Ударная волна — гладкая на всем протяжении.
2. Область Q — единственная область дозвуковых скоростей за ударной волной.
3. К области Q не примыкает сверхзвуковых областей, ограниченных только контуром профиля и звуковыми линиями.
4. Контур Γ (Q) не содержит «вторичных» скачков уплотнения.

Покажем, что при этих условиях ударная волна в каждой точке дозвуковой скорости за ударной волной обращена выпуклостью в сторону набегающего потока.

Обозначим через A отображение области за ударной волной, расположенной в физической плоскости xy, в плоскость годографа $\lambda\beta$ (λ — коэффициент скорости, β — угол наклона вектора скорости; оси β, y направлены вертикально вверх, оси λ, x — горизонтально вправо). Границу A (Q) обозначим через Γ $(A$ $(Q))$.

1°. Как известно (см., например, [3])

$$J = \partial (\lambda, \beta) \,/\, \partial (x, y) \leqslant 0 \text{ при } \lambda \leqslant 1 \tag{1}$$

[1] Это свойство наблюдалось в работе [2] при проведении расчетов обтеканий невыпуклых тел.