СВЯЗЬ ЛАГРАНЖЕВОГО И ЭЙЛЕРОВОГО ОПИСАНИЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Е. А. Новиков

(Москва)

Рассмотрим объем V, заполненный несжимаемой жидкостью. Объем может быть ограниченным или неограниченным. В частности, жидкость может заполнять все пространство. Границы могут меняться со временем, но для дальнейшего важно, чтобы это изменение не зависело от движения самой жидкости. Таким образом, исключается из рассмотрения поток со свободной поверхностью, а также такой случай, как жидкость в сосуде с эластичными стенками.

Положение жидкой частицы в момент времени t при условии, что в начальный момент она занимала положение $\mathbf{a}$, обозначим $\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{a})$. Условие несжимаемости имеет вид

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{D\mathbf{a}} = 1 \tag{1}$$

Здесь левая часть — якобиан преобразования. Состояние жидкости будем характеризовать величинами $\sigma^{(k)}(t, \mathbf{a})$, $(k = 1,2,\ldots)$, каждая из которых может обозначать совокупность нескольких полей (таких, как скорость, вихрь, давление, концентрация примеси и т. п.). В эйлеровых координатах $\sigma^{(k)} = \sigma_э^{(k)}(t, \mathbf{x})$.

Выделим n жидких частиц, которые в начальный момент времени занимали положения $\mathbf{a}^{(1)},\ldots, \mathbf{a}^{(n)}$. Выражение

$$P_n(t, \mathbf{x}^{(1)}, s^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}, s^{(n)} \mid \mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)}) = \\ = \left\langle \prod_{k=1}^{n} \delta(\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{a}^{(k)}) - \mathbf{x}^{(k)})\, \delta(\sigma^{(k)}(t, \mathbf{a}^{(k)}) - s^{(k)}) \right\rangle \tag{2}$$

($\delta(\mathbf{x})$ — дельта-функция)

определяет совместную плотность вероятности значений $\boldsymbol{\xi}$ и $\sigma^{(k)}$ в момент t, угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций потока (при фиксированном законе движения границ). В эйлеровом описании

$$F_n(t, \mathbf{x}^{(1)}, s^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}, s^{(n)}) = \left\langle \prod_{k=1}^{n} \delta(\sigma_э^{(k)}(t, \mathbf{x}^{(k)}) - s^{(k)}) \right\rangle \tag{3}$$

Здесь F_n — плотность вероятности значений $\sigma^{(k)}$ в фиксированных точках пространства. Для несжимаемой жидкости имеет место следующая основная формула:

$$\int\limits_V \ldots \int\limits_V P_n\, d^3a^{(1)} \ldots d^3a^{(n)} = F_n \tag{4}$$

Для доказательства подставим (2) в левую часть (4) и изменим порядок интегрирования и усреднения (это возможно, так как принят фиксированный закон движения границ). Имеем

$$\int\limits_V \ldots \int\limits_V P_n\, d^3a^{(1)} \ldots d^3a^{(n)} = \left\langle \prod_{k=1}^{n} \int \delta(\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{x}^{(k)})\, \delta(\sigma^{(k)}(t, \mathbf{a}) - s^{(k)})\, d^3a \right\rangle \tag{5}$$

От интегрирования по $\mathbf{a}$ перейдем к интегрированию по $\boldsymbol{\xi}$. В силу условия несжимаемости (1), якобиан преобразования равен единице. Принимая во внимание равенство

$$\sigma^{(k)}(t, \mathbf{a}) = \sigma_э^{(k)}(t, \mathbf{x}) \quad \text{при } \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{a}) = \mathbf{x} \tag{6}$$

видим, что правые части (5) и (3) совпадают. Таким образом, соотношение (4) доказано.

В [1] был использован без доказательства частный случай формулы (4), когда роль σ играет поле вихря. Если в качестве σ выбрать поле скорости, то (4) при $n=1$ дает

$$\int\limits_V P_1(t,\ \mathrm{x},\ \mathrm{v}\mid \mathrm{a})\, d^3a = F_1(t,\ \mathrm{x},\ \mathrm{v}) \tag{7}$$

В частности, для однородного потока

$$P_1(t,\ \mathrm{x},\ \mathrm{v}\mid \mathrm{a}) = P_1(t,\ \mathrm{x}-\mathrm{a},\ \mathrm{v}\mid 0) \tag{8}$$

а F_1 не зависит от x. Плотность распределения скорости жидкой частицы равна

$$W_1(t,\ \mathrm{v}) = \int P_1(t,\ \mathrm{x},\ \mathrm{v}\mid \mathrm{a})\, d^3x \tag{9}$$

Из (7) — (9) получим

$$W_1(t,\ \mathrm{v}) = F_1(t,\ \mathrm{v}) \tag{10}$$

Таким образом, в однородном потоке несжимаемой жидкости плотность распределения скорости фиксированной жидкой частицы совпадает с плотностью распределения значений скорости в фиксированной точке. Этот результат был получен ранее [2] другим путем. Из приведенного выше доказательства видно, что (10) остается справедливым для любого гидродинамического поля. В частности, в [3] при оценке параметров асимптотики спектра энергии турбулентного потока в области больших волновых чисел фактически предполагалось, что дисперсии тензора скоростей деформации в лагранжевом и эйлеровом описаниях совпадают. Сейчас это можно считать доказанным.

Для относительного движения жидких частиц в однородном потоке из (4) после простого преобразования, получим

$$\int W_л(t,\ \mathrm{r},\ \mathrm{u}\mid \mathrm{r}_0)\, d^3r_0 = W_э(t,\ \mathrm{r},\ \mathrm{u}) \tag{11}$$

Здесь $W_л$ — совместная плотность распределения разности скоростей и расстояния между жидкими частицами, находившимися в начальный момент времени на расстоянии r_0; $W_э$ — плотность распределения разности скоростей в двух фиксированных точках, находящихся на расстоянии r. Формула (4) позволяет получить также ряд других новых соотношений.

Поступила 31 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Е. А. Кинетические уравнения для поля вихря. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 2.
2. Lumley J. L. The mathematical nafure of the problem of relating Lagrangian and Eulerian statictical function in turbulence. Collog. intenat. Centre nat. rech. scient., 1962, No. 108, pp. 17—26.
3. Новиков Е. А. О спектре энергии турбулентного потока несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2.