ЛИТЕРАТУРА

1. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Oldroyd J. G. Proc. Cambridge Philos. Soc., Two-dimensional plastic flow of a bingham solid. A plastic boundary-layer theory for slow motion, 1947, vol. 43, № 3, p. 383.
3. Астрахан И. М. Об уравнениях движения вязко-пластичной жидкости в пограничном слое на произвольной поверхности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 2.
4. Швец М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ, 1949, т. 13, вып. 3.
5. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966,
6. Smith A. M. Rapid laminar boundary layer calculations by piecewise application of similar solutions. J. Aeronaut Sci., 1956, vol. 23, No 10.
7. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

И. И. Шмулев

(Воронеж)

Рассматриваются краевые задачи для системы уравнений, которая является математической моделью турбулентного движения жидкости или газа. Эта модель была введена Бюргерсом в работе [1]. В § 1 доказывается существование у первой краевой задачи для упомянутой системы уравнений по крайней мере одного гладкого периодического по времени решения. Это достигается на пути использования топологического принципа Лерэ — Шаудера [2] существования неподвижных точек у вполне непрерывных операторов. Теореме существования предшествует получение априорных оценок решения задачи, которые необходимы для реализации упомянутого выше топологического принципа. § 2 посвящен первой краевой задаче с начальными условиями и задаче Коши для модельных уравнений турбулентности.

Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений. Через Ω обозначим интервал $(0, 1)$. Пусть $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ и $t_2 > t_1$. Через $Q_{t_1, t_2} = \Omega \times (t_1, t_2]$ обозначим прямоугольник. Если $t_1 = -\infty$, а $t_2 = +\infty$, то прямоугольник Q_{t_1, t_2} превращается в полосу, которую будем обозначать через Q. Каждый прямоугольник, для которого $t_2 - t_1 = \tau_0$, где τ_0 — фиксированное число, будем обозначать через Q_{τ_0}. В дальнейшем мы будем обычно считать $t_1 = 0$, а $t_2 = T$. Замыкания Q_{t_1, t_2}, Q и Q_{τ_0} будем обозначать соответственно через $\overline{Q}_{t_1, t_2}$, $\overline{Q}$ и $\overline{Q}_{\tau_0}$.

Скалярное произведение в пространстве L_2 функций в Q_{τ_0}, а также норму будем обозначать соответственно следующим образом:

$$(\Phi_1, \Phi_2)_{Q_{\tau_0}} = \int_0^{\tau_0}\int_0^1 \Phi_1\Phi_2\, dx\, dt, \qquad \| \Phi \|_{Q_{\tau_0}}^2 = \int_0^{\tau_0}\int_0^1 \Phi^2\, dx\, dt$$

Аналогичным образом при каждом $t \in [0, \tau_0]$ обозначаются в L_2 скалярное произведение и норма

$$(\Phi_1, \Phi_2)_\Omega = \int_0^1 \Phi_1\Phi_2\, dx, \qquad \| \Phi \|_\Omega^2 = \int_0^1 \Phi^2\, dx$$

Для функции $\Phi(x, t)$, заданной в $\overline{Q}_{t_1, t_2}$, определим гельдеровские нормы

$$|\Phi|_0 = \sup|\Phi|, \quad |\Phi|_\alpha = |\Phi|_0 + \sup\frac{|\Phi(P_2) - \Phi(P_1)|}{[d(P_1, P_2)]^\alpha}$$

$$|\Phi|_{1+\alpha} = |\Phi|_\alpha + |\Phi_x|_\alpha, \qquad |\Phi|_{2+\alpha} = |\Phi|_{1+\alpha} + |\Phi_t|_\alpha + |\Phi_{xx}|_\alpha$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x'' - x')^2 + |t'' - t'|}, \qquad \alpha \in (0, 1) \quad (P_1, P_2 \in \overline{Q}_{t_1, t_2})$$

Здесь P_1 и P_2 — точки из Q_{t_1, t_2}, с координатами (x', t') и (x'', t''), соответственно. Заданная в Q_{t_1, t_2} функция $\Phi(x, t)$ принадлежит в этой области классу C^q ($q = 0, \alpha, 1 + \alpha, 2 + \alpha$), если $|\Phi|_q$ конечна. Будем, наконец, через λ_1 обозначать наименьшее собственное значение краевой задачи

$$v'' + \lambda v = 0, \qquad v(0) = v(1) = 0$$

В дальнейшем буквами M и m, снабженными индексами, будем обозначать постоянные, зависящие от данных задачи и от области. Иногда сни будут задаваться.

§ 1. **Периодические решения первой краевой задачи.** Рассмотрим в области Q краевую задачу

$$\Phi_t = \nu\,\Phi_{xx} - 2\Phi\Phi_x + \Phi + u\Phi \tag{1.1}$$

$$\frac{du}{dt} + \nu u = -\int_0^1 \Phi^2\,dx \tag{1.2}$$

$$\Phi(0, t) = \psi_1(t), \qquad \Phi(1, t) = \psi_2(t) \tag{1.3}$$

В (1.1) число $\nu > 0$, а функции ψ_1 и ψ_2, входящие в (1.3), достаточно гладкие и периодические по t с периодом T.

Пусть (Φ, u), где $\Phi(x, t) \in C^{2+\alpha}$ в $\overline{Q}$ и, следовательно, $u(t) \in C^{2+\alpha}$ на $(-\infty, \infty)$, — периодическое по t с периодом T решение краевой задачи (1.1) — (1.3).

Получим для него ряд априорных оценок.

Лемма 1.1. Для функции Φ, входящей в решение рассматриваемой задачи, справедлива оценка

$$\|\Phi\|_{Q_T}^2 \leqslant M_1 \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть (Φ, u) периодическое решение задачи (1.1) — (1.3). Если Φ^2 достигает наибольшего значения на границе Q, то в $\overline{Q}$

$$|\Phi_0^2| \leqslant \max(|\psi_1^2|_0, |\psi_2^2|_0) = m_1 \tag{1.5}$$

и, следовательно, получаем оценку

$$\|\Phi\|_{Q_T}^2 \leqslant m_1 T = m_2 \tag{1.6}$$

Если же Φ^2 достигает наибольшего значения внутри Q в точке (x_0, t_0), то из уравнения, полученного умножением уравнения (1.1) на Φ, в точке (x_0, t_0) получаем неравенство

$$-u(t_0) \leqslant 1 \tag{1.7}$$

Но единственное периодическое решение уравнения (1.2) определяется равенством

$$u(t) = -\int_{-\infty}^{t}\int_0^1 e^{-\nu(t-\tau)}\Phi^2(x, \tau)\,dx\,d\tau \tag{1.8}$$

Из (1.7), (1.8) вытекает неравенство

$$\int_{-\infty}^{t_0}\int_0^1 e^{-\nu(t_0-\tau)}\Phi^2(x, \tau)\,dx\,d\tau \leqslant 1$$

Заменяя нижний предел во внешнем интеграле на $t_0 - T$, а $e^{-\nu(t_0-\tau)}$ на $e^{-\nu T}$, придем к оценке

$$\|\Phi\|_{Q_T}^2 \leqslant e^{\nu T} = m_3 \tag{1.9}$$

Из (1.6) и (1.9) вытекает оценка (1.4) с $M_1 = \max(m_2, m_3)$.

Лемма 1.2. Функция u, входящая в решение задачи (1.1) — (1.3) на $[0, T]$, следовательно, всюду удовлетворяет неравенству

$$|u|_0 \leqslant M_2 \tag{1.10}$$

Доказательство. Вместо равенства (1.8) воспользуемся другим равенством, которое также определяет периодическое решение уравнения (1.2)

$$u(t) = -\frac{e^{-\nu t - \nu T}}{1 - e^{-\nu T}} \int_0^T \int_0^1 e^{\nu\tau} \Phi^2(x, \tau)\, dx\, d\tau - e^{-\nu t} \int_0^t \int_0^1 e^{\nu\tau} \Phi^2(x, \tau)\, dx\, d\tau \tag{1.11}$$

Используя это равенство и оценку (1.4), получаем на $[0, T]$ оценку

$$|u|_0 \leqslant \frac{e^{\nu T}}{1 - e^{-\nu T}} = M_2$$

Лемма 1.3. Для каждого $t \in (-\infty, \infty)$ имеет место оценка

$$\|\Phi\|_\Omega^2 \leqslant M_3 \tag{1.12}$$

Доказательство. Введем вместо функции Φ функцию Ψ при помощи равенства

$$\Phi = \Psi + \omega \quad (\omega = \psi_1 + (\psi_2 - \psi_1)\, x) \tag{1.13}$$

Функция Ψ равна нулю на прямых $x = 0$ и $x = 1$ и удовлетворяет в Q уравнению

$$\Psi_t = \nu \Psi_{xx} - 2\Psi\Psi_x - 2\omega\Psi_x - 2\omega_x\Psi - 2\omega\omega_x + \Psi + \omega + u\Psi + u\omega - \omega_t \tag{1.14}$$

Умножим обе части этого равенства на Ψ и проинтегрируем полученное равенство по Ω

$$\frac{d}{dt}\|\Psi\|_\Omega^2 = 2\nu(\Psi, \Psi_{xx})_\Omega - 4(\Psi^2, \Psi_x)_\Omega - 4(\omega\Psi, \Psi_x)_\Omega - 4(\Psi^2, \omega_x)_\Omega - 4(\omega\omega_x, \Psi)_\Omega +$$
$$+ 2\|\Psi\|_\Omega^2 + 2(\omega, \Psi)_\Omega + 2(u, \Psi^2)_\Omega + 2(u\omega, \Psi)_\Omega - 2(\omega_t, \Psi)_\Omega \tag{1.15}$$

Выполняя в первых трех членах правой части написанного равенства интегрирование по частям, после очевидных оценок придем к неравенству

$$dz / dt + \beta \|\Psi_x\|_\Omega^2 \leqslant m_4 z + m_5 \quad (\beta = 2\nu,\ z(t) = \|\Psi\|_\Omega^2) \tag{1.16}$$

Поскольку

$$\|\Psi_x\|_\Omega^2 \geqslant \lambda_1 \|\Psi\|_\Omega^2,$$

то из (1.16) вытекает

$$dz/dt + \beta z \leqslant m_4 z + m_5 \qquad (\beta = 2\nu\lambda_1) \tag{1.17}$$

Из (1.17) находим, что

$$z(t)\, e^{\beta t} \leqslant z(0) + m_4 \int_0^t e^{\beta\tau} z(\tau)\, d\tau + \frac{m_5}{\beta}(e^{\beta t} - 1) \tag{1.18}$$

Полагая в этом неравенстве $t = T$ и используя периодичность z, получаем

$$z(0) \leqslant \frac{m_5}{\beta} + \frac{m_4}{e^{\beta T} - 1} \int_0^T e^{\beta\tau} z(\tau)\, d\tau \tag{1.19}$$

Из (1.18), (1.19) следует неравенство

$$z(t) \leqslant \frac{m_5}{\beta} + \frac{m_4 e^{-\beta t}}{-1 + e^{\beta T}} \int_0^T e^{\beta\tau} z(\tau)\, d\tau + m_4 e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta\tau} z(\tau)\, d\tau$$

Используя оценку (1.4), отсюда находим

$$z(t) \leqslant \frac{m_5}{\beta} + \frac{m_4 M_1 e^{2\beta T}}{e^{\beta T} - 1} \tag{1.20}$$

Из последнего неравенства, используя связь между Φ и Ψ, получаем оценку (1.12).

Лемма 1.4. Для функции u (t) на интервале $(-\infty, \infty)$ выполняется оценка

$$|\, du \,/\, dt\,|_0 \leqslant M_4 \tag{1.21}$$

Доказательство вытекает непосредственно из равенства (1.2) при помощи оценок (1.10) и (1.12).

Лемма 1.5. Для функции Φ имеет место оценка

$$\|\Phi_x\|_{Q_T}{}^2 \leqslant M_5 \tag{1.22}$$

Доказательство. Умножим обе части равенства (1.14) на функцию Ψ, которая была введена выше равенством (1.13), и полученное равенство проинтегрируем по области Q_T

$$\begin{aligned}(\Psi, \Psi_t)_{Q_T} = \nu\, (\Psi, \Psi_{xx})_{Q_T} - 2\,(\Psi^2, \Psi_x)_{Q_T} - 2\,(\omega\Psi, \Psi_x)_{Q_T} - 2\,(\Psi^2, \omega_x)_{Q_T} - \\ - 2\,(\omega\omega_x, \Psi)_{Q_T} + \|\Psi\|_{Q_T}{}^2 + (\omega, \Psi^2)_{Q_T} + (u\omega, \Psi)_{Q_T} - (\Psi, \omega_t)_{Q_T}\end{aligned} \tag{1.23}$$

Производя в первых двух членах правой части последнего равенства интегрирование по частям и пользуясь при оценке остальных членов гладкостью функции ω и неравенством Коши, придем к следующей оценке:

$$\|\Psi_x\|_{Q_T}{}^2 \leqslant m_6 \|\Psi\|_{Q_T}{}^2 + m_7 \tag{1.24}$$

Если воспользоваться связью между функциями Φ и Ψ, то из (1.24) при помощи оценки (1.4) получим (1.22).

Лемма 1.6. Для функции Φ справедлива оценка

$$\int_0^T \|\Phi\|_\Omega{}^4\, dt \leqslant M_6 \tag{1.25}$$

Доказательство этой оценки непосредственно вытекает из оценки (1.12) и свойства гладкости Φ.

Лемма 1.7. Для функции Φ имеет место оценка

$$\|\Phi^2\|_{Q_T}{}^2 \leqslant M_7 \tag{1.26}$$

Доказательство.

$$\|\Psi^2\|_{Q_T}{}^2 \leqslant \int_0^T (\max_x \Psi^2 \,\|\Psi\|_\Omega{}^2)\, dt \leqslant \frac{1}{2} \int_0^T (\max_x \Psi^2)^2\, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\Psi\|_\Omega{}^4\, dt \tag{1.27}$$

Здесь использовано неравенство Коши. Но

$$\Psi^2 = \int_0^x 2\Psi\Psi_x\, dx \leqslant 2\,(|\Psi|, |\Psi_x|)_\Omega \tag{1.28}$$

Применяя неравенство Буняковского, найдем, что

$$\Psi^2 \leqslant 2\,\|\Psi\|_\Omega \|\Psi_x\|_\Omega \tag{1.29}$$

Из (1.27) при помощи (1.29) вытекает неравенство

$$\|\Psi^2\|_{Q_T}{}^2 \leqslant \int_0^T \|\Psi\|_\Omega{}^2 \|\Psi_x\|_\Omega{}^2\, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\Psi\|_\Omega{}^4\, dt \tag{1.30}$$

Из этого неравенства в свою очередь вытекает следующее неравенство:

$$\|\Psi^2\|_{Q_T}{}^2 \leqslant \max_t \|\Psi\|_\Omega{}^2 \|\Psi_x\|_{Q_T}{}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|\Psi\|_\Omega{}^4\, dt \tag{1.31}$$

Вспоминая связь между функциями Φ и Ψ и используя оценки (1.12), (1.22) и (1.25), придем к оценке (1.26).

Лемма 1.8. Для функции Φ выполняется оценка

$$\|\Phi^2\|_\Omega^2 \leqslant M_8 \tag{1.32}$$

Доказательство. Умножим равенство (1.14) на Ψ^3 и полученное равенство проинтегрируем по Ω

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|\Psi^2\|_\Omega^2 = \nu(\Psi^3, \Psi_{xx})_\Omega - 2(\Psi^4, \Psi_x)_\Omega - 2(\omega\Psi^3, \Psi_x)_\Omega - 2(\Psi^4, \omega_x)_\Omega - $$
$$- 2(\omega\omega_x, \Psi^3)_\Omega + \|\Psi^2\|_\Omega^2 + (\omega, \Psi^3)_\Omega + (u\Psi, \Psi^3)_\Omega + (u\omega, \Psi^3)_\Omega - (\omega_t, \Psi^3)_\Omega \quad (1.33)$$

Рассмотрим первое и третье слагаемые в правой части равенства (1.33)

$$\nu(\Psi^3, \Psi_{xx})_\Omega = -3\nu(\Psi^2, \Psi_x^2)_\Omega = -{}^3/_4\nu\|(\Psi^2)_x\|_\Omega^2$$

Поскольку $\|(\Psi^2)_x\|_\Omega^2 \geqslant \lambda_1\|\Psi^2\|_\Omega^2$, то, следовательно

$$\nu(\Psi^3, \Psi_{xx})_\Omega \leqslant -{}^3/_4\nu\lambda_1\|\Psi^2\|_\Omega^2 \quad (1.34)$$

Далее

$$-2(\omega\Psi^3, \Psi_x)_\Omega = -{}^1/_2(\omega, (\Psi^4)_x)_\Omega = {}^1/_2(\omega_x, \Psi^4)_\Omega$$

Поэтому

$$2|(\omega\Psi^3, \Psi_x)_\Omega| \leqslant m_8\|\Psi^2\|_\Omega^2 \quad (1.35)$$

Оценивая остальные слагаемые правой части (1.33) и полагая

$$w(t) = \|\Psi^2\|_\Omega^2$$

получим неравенство

$$dw/dt + \beta_1 w \leqslant m_9 w + m_{10} \qquad (\beta_1 > 0) \quad (1.36)$$

Из (1.36) находим, что

$$w(t)e^{\beta_1 t} \leqslant w(0) + m_9\int_0^t e^{\beta_1\tau} w(\tau)\,d\tau + \frac{m_{10}}{\beta_1}(e^{\beta_1 t} - 1) \quad (1.37)$$

Полагая в (1.37) $t = T$ и принимая во внимание периодичность $w(t)$, находим оценку для $w(0)$

$$w(0) \leqslant \frac{m_{10}}{\beta_1} + \frac{m_9 e^{-\beta_1 t}}{e^{\beta_1 T} - 1}\int_0^T e^{\beta_1\tau} w(\tau)\,d\tau \quad (1.38)$$

Если в (1.37) вместо $w(0)$ подставить правую часть (1.38), то это приведет к неравенству

$$w(t) \leqslant \frac{m_{10}}{\beta_1} + \frac{m_9 e^{-\beta_1 t}}{e^{\beta_1 T} - 1}\int_0^T e^{\beta_1\tau} w(\tau)\,d\tau + m_9 e^{-\beta_1 t}\int_0^t e^{\beta_1\tau} w(\tau)\,d\tau \quad (1.39)$$

Если воспользоваться равенством (1.13), связывающим функции Φ и Ψ и оценкой (1.26), то из (1.39) получим требуемую оценку (1.32).

Лемма 1.9. В области $\bar{Q}_T$ для функции Φ справедлива оценка

$$|\Phi|_0 \leqslant M_9 \quad (1.40)$$

Доказательство. Пусть $\eta(t)$ функция, обладающая следующими свойствами: $\eta(t)$ определена для $t \geqslant 0$, обладает непрерывной производной первого порядка, $\eta(0) = 0$ и $\eta(t) = 1$ для $t \geqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало.

Функция $\Psi_1 = \eta\Psi$, где Ψ ранее введенная функция, в области $Q_{0,T+\varepsilon}$ будет решением краевой задачи

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} + c(x, t)\Psi_1 + f(x, t) \quad (1.41)$$

$$\Psi_1(0, t) = \Psi_1(1, t) = 0, \qquad \Psi_1(x, 0) = 0 \quad (1.42)$$

В уравнении (1.41)

$$b(x, t) = -2\Psi - 2\omega, \quad c(x, t) = -2\omega_x + 1 + u$$
$$f(x, t) = \eta(-2\omega\omega_x + \omega + u\omega - \omega_t) + \eta'\Psi \quad (1.43)$$

Для функций b, c и f имеют место следующие оценки:

$$\|b^2\|_\Omega^2 \leqslant m_{11}, \qquad \|c\|_\Omega^2 \leqslant m_{12}, \qquad \|f\|_\Omega^2 \leqslant m_{13} \quad (1.44)$$

которые будут непосредственным следствием оценок (1.10), (1.12) и (1.32). На основании теоремы 3 из § 3 работы [3] для решения задачи (1.41)—(1.43) справедлива в $\overline{Q}_{0,T+\varepsilon}$ оценка $|\Psi_1|_0 \leqslant m_{14}$, которая также будет иметь место и в области $\overline{Q}_{\varepsilon,T+\varepsilon}$, где $\eta = 1$. Следовательно, в силу свойства периодичности Ψ в $\overline{Q}_T$ действительно имеет место оценка $|\Psi|_0 \leqslant m_{14}$. Отсюда и из (1.13) вытекает оценка (1.40).

Лемма 1.10. Для функции Φ в области $\overline{Q}_T$ выполняется оценка

$$|\Phi|_\alpha \leqslant M_{10} \tag{1.45}$$

Доказательство. Оценки (1.44) вместе с теоремой 5 из § 4 работы [3] приводят в $\overline{Q}_{0,T+\varepsilon}$ к следующей оценке $|\Psi_1|_\alpha \leqslant m_{15}$, где Ψ_1—введенная выше функция. Так как при $t \geqslant \varepsilon$ функция $\Psi_1 = \Psi$, то в силу периодичности Ψ получаем в $\overline{Q}_T$ оценку $|\Psi|_\alpha \leqslant \leqslant m_{15}$. Из этой оценки и равенства (1.13) вытекает (1.45).

Лемма 1.11. В области $\overline{Q}_T$ для функции Φ имеет место оценка

$$|\Phi|_{2+\alpha} \leqslant M_{11} \tag{1.46}$$

Доказательство. Принимая во внимание установленные выше оценки (1.21) и (1.45) и применяя к функции Φ, как к периодическому по t решению краевой задачи (1.1), (1.3), теорему 4 из § 2 работы [4], получим оценку (1.46).

Сформулируем и докажем теперь основную теорему этого параграфа.

Теорема 1.1. Если функции $\psi_1, \psi_2 \in C^{2+\alpha}$ на $(-\infty, \infty)$ и периодичны по t с периодом T, то задача (1.1) — (1.3) имеет по крайней мере одно периодическое по t с периодом T решение (Φ, u), где $\Phi \in C^{2+\alpha}$ в $\overline{Q}$, а $u \in C^{2+\alpha}$ на $(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся топологической теоремой Лерэ — Шаудера [2] о существовании неподвижных точек у операторных уравнений.

Обозначим пространство всех периодических по t с периодом T функций $\Phi \in C^{1+\alpha}$ в $\overline{Q}$ через $C^{1+\alpha}$, определив норму равенством $\|\Phi\| = |\Phi|_{1+\alpha}$. Определим оператор $A(\Phi, k)$ в пространстве $C^{1+\alpha}$ при каждом $k \in [0, 1]$ как оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\Phi \in C^{1+\alpha}$ функцию $\varphi \in C^{2+\alpha}$, как периодическое по t с периодом T решение краевой задачи

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + k\left(-2\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Phi - \Phi\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{0}^{1} e^{-\nu(t-\tau)}\Phi^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\right) \tag{1.47}$$

$$\varphi(0, t) = \psi_1(t), \qquad \varphi(1, t) = \psi_2(t) \tag{1.48}$$

В силу работы [4] функция φ существует и принадлежит $C^{2+\alpha}$ в $\overline{Q}$. Докажем равномерную относительно k непрерывность оператора $A(\Phi, k)$ на каждом ограниченном множестве в пространстве $C^{1+\alpha}$. Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \in C^{1+\alpha}$ и $\|\Phi_1\|, \|\Phi_2\| \leqslant m_{16}$, где m_{16} — некоторое число. Если φ_1 и φ_2 соответствующие периодические решения краевой задачи (1.47) (1.48), то функция $v^k = \varphi_1 - \varphi_2$ будет периодическим решением краевой задачи

$$\frac{\partial v^k}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v^k}{\partial x^2} + k\left[-2\Phi_1\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right) - 2(\Phi_1 - \Phi_2)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \Phi_1 - \Phi_2 - \right. \tag{1.49}$$

$$\left. -(\Phi_1 - \Phi_2)\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{0}^{1} e^{-\nu(t-\tau)}\Phi_1^2(x,\tau)\,dx\,d\tau - \Phi_2\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{0}^{1} e^{-\nu(t-\tau)}(\Phi_1^2(x,\tau) - \Phi_2^2(x,\tau))\,dx\,\tau d\right]$$

$$v^k(0, t) = v^k(1, t) = 0 \tag{1.50}$$

На основании работы [4] для v^k в $\overline{Q}$ справедлива оценка

$$\|v^k\| = \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leqslant m_{17}\left(|\Phi_1 - \Phi_2|_0 + \left|\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right|_0\right) \leqslant m_{17}\|\Phi_1 - \Phi_2\| \tag{1.51}$$

Здесь m_{17} зависит от m_{16}. Из (1.51) и вытекает равномерная относительно k непрерывность оператора A (Φ, k) на каждом ограниченном множестве в $C^{1+\alpha}$.

Докажем полную непрерывность оператора A (Φ, k). Пусть $\{\Phi_r\}$ — последовательность функций из $C^{1+\alpha}$ и $\| \Phi_r \| \leqslant m_{18}$, где m_{18} некоторое число.

Тогда из нее можно выделить подпоследовательность $\{\Phi_{r_i}\}$, равномерно сходящуюся в $\overline{Q}$ вместе с $\{\partial\Phi_{r_i}/\partial x\}$.

Пусть $\varphi_{r_{i+l}}$ и φ_{r_i} — решения задач (1.49). (1.50), соответствующие элементам $\Phi_{r_{i+l}}$ и Φ_{r_i}. Функция

$$V_{r_{i+l},\, r_i} = \varphi_{r_{i+l}} - \varphi_{r_i}$$

очевидно будет периодическим решением краевой задачи

$$\frac{\partial V_{r_{i+l},\, r_i}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_{r_{i+l},\, r_i}}{\partial x^2} + k\Bigg[-2\Phi_{r_{i+l}}\left(\frac{\partial\Phi_{r_{i+l}}}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_{r_i}}{\partial x}\right) - 2\left(\Phi_{r_{i+l}} - \Phi_{r_i}\right)\frac{\partial\Phi_{r_i}}{\partial x} +$$
$$+ \Phi_{r_{i+l}} - \Phi_{r_i} - \left(\Phi_{r_{i+l}} - \Phi_{r_i}\right)\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{0}^{1} e^{-\nu(t-\tau)}\,\Phi_{r_{i+l}}^{2}(x, \tau)\,dx\,d\tau -$$
$$- \Phi_{r_i}\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{0}^{1} e^{-\nu(t-\tau)}\left(\Phi_{r_{i+l}}^{2}(x, \tau) - \Phi_{r_i}^{2}(x, \tau)\right)dx\,d\tau\Bigg] \qquad (1.52)$$

$$V_{r_{i+l},\, r_i}(0, t) = V_{r_{i+l},\, r_i}(1, t) = 0 \qquad (1.53)$$

На основании [4] в $\overline{Q}$ получаем оценку

$$\| V_{r_{i+l},\, r_i} \| \leqslant m_{19}\left(|\Phi_{r_{i+l}} - \Phi_{r_i}|_0 + \left|\frac{\partial\Phi_{r_{i+l}}}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_{r_i}}{\partial x}\right|_0\right)$$

Из этого неравенства и вытекает полная непрерывность A (Φ, k). Оператор A (Φ, 0) переводит все пространство $C^{1+\alpha}$ в один элемент $\varphi \in C^{2,\alpha}$, являющийся в Q периодическим по t с периодом T решением краевой задачи

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad \varphi(0, t) = \psi_1(t), \qquad \varphi(1, t) = \psi_2(t)$$

Следовательно, преобразование Φ — A (Φ, 0) обратимо.

Если Φ — неподвижная точка оператора A (Φ, k), то $\Phi \in C^{2+\alpha}$ в $\overline{Q}$. Функция

$$u(t) = -\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{0}^{1} e^{-\nu(t-\tau)}\,\Phi^2(x, \tau)\,dx\,d\tau$$

периодична по t с периодом T и $u \in C^{2+\alpha}$ на $(-\infty, \infty)$. Таким образом, пара функций (Φ, u) будет периодическим по t с периодом T решением краевой задачи

$$\Phi_t = \nu\Phi_{xx} + k(-2\Phi\Phi_x + \Phi + u\Phi) \qquad (1.54)$$

$$\frac{du}{dt} + \nu u = -\int\limits_0^1 \Phi^2(x, t)\,dx, \qquad \Phi(0, t) = \psi_1(t), \qquad \Phi(1, t) = \psi_2(t) \qquad (1.55)$$

Очевидно, что каждая функция $\Phi \in C^{2+\alpha}$ в $\overline{Q}$, периодическая по t с периодом T и входящая в решение задачи (1.54), (1.55), будет также неподвижной точкой оператора A (Φ, k). На основании леммы 1.11 и неравенства $\| \Phi \| < \| \Phi \|_{2+\alpha}$ нормы возможных неподвижных точек оператора A (Φ, k) ограничены в совокупности некоторым числом, независящим от k. Все условия теоремы Лерэ — Шаудера выполнены и, следовательно, оператор A (Φ, k) имеет по крайней мере одну неподвижную точку при каждом $k \in [0, 1]$ и, в частности, при $k = 1$. Но тогда на основании отмеченной выше связи между неподвижными точками оператора A (Φ, k) и решениями задачи (1.54), (1.55), существует по крайней мере одно периодическое по t с периодом T решение (Φ, u) задачи

(1.1) — (1.3), где $\Phi \in C^{2+\alpha}$ в $\bar{Q}$, а функция u обладает непрерывной первой производной на $(-\infty, \infty)$. Поскольку $\Phi \in C^{2+\alpha}$ в $\bar{Q}$, то нетрудно убедиться, что $u \in C^{2+\alpha}$ на $(-\infty, \infty)$. Теорема 1.1 доказана.

§ 2. Первая краевая задача с начальными условиями и задача Коши. Пусть T^* произвольное положительное число. Рассмотрим в Q_{0,T^*} краевую задачу

$$\Phi_t = \nu\Phi_{xx} - 2\Phi\Phi_x + \Phi + u\Phi, \qquad \frac{du}{dt} + \nu u = -\int_0^1 \Phi^2(x, t)\,dx \tag{2.1}$$

$$\Phi(0, t) = \psi_1(t), \qquad \Phi(1, t) = \psi_2(t), \qquad u(0) = u_0, \ \Phi(x, 0) = \chi(x)$$

Теорема 2.1. Если функции $\psi_1, \psi_2 \in C^{1+\alpha}$ на $[0, T^*]$, а функция $\chi \in C^{2+\alpha}$ в Ω, то задача (2.1) имеет единственное решение (Φ, u), где $\Phi \in C^{2+\alpha}$ в $\bar{Q}_{0,T^*}$, а $u \in C^{2+\alpha}$ на отрезке $[0, T^*]$.

Теорема 2.2. Если $\psi_1 = \psi_2 = 0$, а $\chi \in L_2$ в Ω, то задача (2.1) имеет единственное обобщенное решение (Φ, u).

В заключение этого параграфа рассмотрим задачу Коши

$$\Phi_t = \nu\Phi_{xx} - 2\Phi\Phi_x + \Phi + u\Phi$$

$$\frac{du}{dt} + \nu u = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(x, t)\,dx, \qquad u(0) = u_0, \qquad \Phi(x, 0) = \chi(x) \tag{2.2}$$

Теорема 2.3. Если $\chi \in C^{2+\alpha} \cap L_2$ на $(-\infty, \infty)$, то задача (2.2) имеет единственное ограниченное решение (Φ, u), где $\Phi \in C^{2+\alpha}$ в полосе $R = (-\infty, \infty) \times [0, H]$ а $u \in C^{2+\alpha}$ на $[0, H]$.

Теорема 2.4. Пусть $\chi \in L_2$ на $(-\infty, \infty)$. Тогда задача Коши (2.2) имеет единственное обобщенное решение (Φ, u).

Доказательство теорем 2.1—2.4 мало чем отличается от доказательств соответствующих теорем из работ [3, 7, 8, 11], которые в свою очередь используют соответствующие результаты из работ [5, 6, 9, 10].

Вопросам устойчивости решений отмеченной выше модели турбулентности посвящена работа [12].

Поступила 31 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Burgers J. M., A mathematical model illlustrating the theory of turbulence. Adv. Appl. Mech., New York, Acad. Press. 1948, vol. 1.
2. Лерэ Ж., Шаудер Ю. Топология и функциональные уравнения. Усп. матем. н., 1946, т. 1, вып. 3—4.
3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Краевая задача для линейных и квазилинейных параболических уравнений. I. Изв. АН СССР, сер. матем., 1962, т. 26, № 1.
4. Шмулев И. И. Периодические решения первой краевой задачи для параболических уравнений. Матем. сб., 1965, т. 66, № 3.
5. Friedman A. Interior estimates for parabolic systems of partial differential equations. J. Math. Mech., 1958, vol. 7, № 7.
6. Бернштейн С. Н. Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа. Собр. соч., т. 3. Изд-во АН СССР, 1960.
7. Олейник О. А., Вентцель Т. Д. Задача Коши и первая краевая задача для квазилинейного уравнения параболического типа. Матем. сб., 1957, т. 41, № 1.
8. Олейник О. А., Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными. Усп. матем. н., 1961, т. 16, вып. 5.
9. Friedman A. On quasi-lineare parabolic equations of the second order, II. J. Math., Mech., 1960, vol. 9, № 4.
10. Friedman A. Boundar estimates for second order parabolic equations and their applications. J. Math. Mech., 1958, vol. 7, № 5.
11. Ладыженская О. А. Матем. вопр. динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Физматгиз, 1961.
12. Eckhaus W. Problèmes non linéaires dans la théorie de stabilité J. de Méchanique, 1962, vol. 1 No 1.