

ЛИТЕРАТУРА

1. П и л а т о в с к и й В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М., «Недра», 1966.
2. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
3. М а г н а р а д з е Л. Г. Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета. Сообщения АН ГрузССР, 1942, т. 3, № 6.
4. В е к у а И. Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля. ПММ, 1945, т. 9, вып. 2.
5. Ш е р м а н Д. И. К уравнению Прандтля в теории крыла конечного размаха. Изв. АН СССР, ОТН, 1948, № 5.
6. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.

ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ СТЕПЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТИ ВДОЛЬ ВНЕШНЕЙ ГРАНИЦЫ

Л. Я. Косачевский, И. А. Строчков

(Доведк)

Рассматривается автомодельное решение задачи о стационарном вязко-пластическом пограничном слое, возникающем при течении пластического материала вблизи твердой шероховатой стенки, при степенном распределении скорости вдоль внешней границы.

1. Определяющее уравнение вязко-пластической среды имеет вид [1]

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \left(2\mu + \frac{k}{\sqrt{V_{(2)}}}\right) V_{ij} \quad (1.1)$$

где P_{ij} — тензор напряжений, p — давление, δ_{ij} — единичный тензор, μ — коэффициент вязкости, k — предел текучести V_{ij} и $V_{(2)}$ — соответственно тензор скоростей деформации и его второй основной инвариант. Для плоского течения несжимаемого материала $V_{(2)} = V_{11}^2 + V_{12}^2$.

Предел текучести будем предполагать достаточно большим, так что имеет место неравенство

$$B \gg R^{3/2} \quad (B = kL / \mu U) \quad (1.2)$$

Здесь B — число Бингама, R — число Рейнольдса, L и U — характерные линейные размер и скорость.

При условии (1.2) инерционными членами можно пренебречь и уравнения пограничного слоя принимают вид [1, 2]

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2\omega k \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} - 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = -2\omega k \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right] \quad (1.3)$$

$$\eta = \frac{\partial v / \partial x_1}{\partial v / \partial x_2}, \quad \omega = \text{sign} \frac{\partial v}{\partial x_2} \quad (1.4)$$

Ось x_1 направлена вдоль твердой стенки, а ось x_2 ей перпендикулярна. Вне пограничного слоя среда предполагается идеально пластической.

Другой тип вязко-пластического пограничного слоя рассматривался в [3].

Пусть распределение скоростей во внешнем течении вблизи пограничного слоя определяется степенным законом, а давление на некотором интервале изменения x_1 будем считать приблизительно постоянным.

Касательное напряжение на верхней границе слоя предполагаем равным пределу текучести материала. Пренебрегая скольжением на нижней границе слоя, имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} v(x_1, 0) &= 0, & v(x_1, \delta) &= \omega U (x_1 / L)^n \\ p(x_1, \delta) &= p_0 = \text{const}, & P_{21}(x_1, \delta) &= \omega k \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\delta = \delta(x_1)$ — толщина пограничного слоя.

Введем безразмерные переменные

$$x_1^* = \frac{x_1}{L}, \quad x_2^* = \frac{x_2}{\varepsilon L}, \quad v^* = \frac{v}{U}, \quad p^* = \frac{p - \varepsilon k}{\varepsilon k}, \quad \varepsilon = B^{-1/3} \ll 1 \quad (1.6)$$

При этом уравнения (1.3) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial x_1^*} &= \frac{\partial^2 v^*}{\partial x_2^{*2}} + 4\omega \left(\frac{\partial \eta^*}{\partial x_1^*} - \eta^* \frac{\partial \eta^*}{\partial x_2^*} \right), & \eta^* &= \frac{\partial v^* / \partial x_1^*}{\partial v^* / \partial x_2^*} \\ p^* &= -2\omega \eta^* + f^* + p_0^* \end{aligned} \quad (1.7)$$

где f^* — произвольная функция x_1^* . Согласно (1.1) и (1.6) имеем с точностью до членов порядка $k\varepsilon^4$

$$P_{21} = k \left[\omega + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial x_2^*} - 2\omega \eta^{*2} \right) \right] \quad (1.8)$$

Условия (1.5) с учетом (1.8) принимают вид

$$\begin{aligned} v^*(x_1^*, 0) &= 0, & v^*(x_1^*, \delta^*) &= \omega x_1^{*n}, & p^*(x_1^*, \delta^*) &= p_0^* \\ \frac{\partial v^*}{\partial x_2^*} - 2\eta^{*2} &= 0 & \text{при } x_2^* &= \delta^* \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Выражение для скорости в слое ищем в виде

$$v = \omega x_1^n \varphi(\xi), \quad \xi = x_2 / \delta, \quad \delta = D x_1^m \quad (2.1)$$

(Звездочки в обозначениях безразмерных величин опускаем.)

Из (1.7) и (1.9) получаем

$$\begin{aligned} \varphi'' (\varphi'^3 + 4n^2 D^3 \varphi^2) - \frac{4}{9} (n-1) D^3 \varphi'^2 [(2+n)\xi\varphi' + 3n\varphi] &= \frac{1}{3} (n-1) \omega C D^2 \varphi^3 \\ p = p_0 + \Phi(\xi) x_1^{(n-1)/3}, & \Phi(\xi) = C - 2\omega D (n\varphi / \varphi' - m\xi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$m = \frac{1}{3} (2+n), \quad n \neq 1 \quad (2.4)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1, \quad \Phi(1) = 0, \quad \beta^3 - 2D^3 (n - m\beta)^2 = 0, \quad \beta = \varphi'(1) \quad (2.5)$$

Постоянная C определяется согласно (2.3) и (2.5) следующим выражением:

$$C = 2\omega (n - m\beta) D / \beta \quad (2.6)$$

Таким образом, удовлетворяя граничному условию для давления, мы должны отказаться от условия $\beta = 0$, т. е. от гладкости сопряжения решений внутри и вне пограничного слоя. Исключение составляет случай $n = 0$, рассмотренный в [2]. В этом случае из (2.2), (2.4) и (2.6) имеем

$$\varphi'' = \frac{4}{9} D^3 (1 - 2\xi), \quad m = \frac{2}{3}, \quad C = -\frac{4}{3} \omega D \quad (2.7)$$

что совпадает с результатом указанной работы.

Интегрируя (2.7) при условиях (2.5) и $\beta = 0$, получаем

$$\varphi' = 6\xi(1 - \xi), \quad \varphi = \xi^2(3 - 2\xi), \quad D = 2,381 \quad (2.8)$$

Особенностью этого решения будет равенство

$$\varphi'(0) = 0 \quad (2.9)$$

и наличие точки перегиба функции $\varphi(\xi)$ в середине слоя.

Из (1.1) и (2.9) следует, что касательное напряжение на стенке в точности равно пределу текучести материала. Как отмечено в [2], этот результат означает, что рассматриваемая теория справедлива лишь при очень малых скоростях движения вязко-пластической среды.

Рассмотрим теперь случай произвольного n (не равного единице). Для решения задачи воспользуемся приближенным приемом, разработанным М. Е. Швецом [4] для обычного вязкого пограничного слоя.

Принимая за нулевое приближение $\varphi = \xi$, двукратным интегрированием найдем приближенное решение уравнения (2.2)

$$\varphi'' = \frac{n-1}{9} D^2 \frac{3\omega C + 8D(1+2n)\xi}{1+4a^2\xi^2} \quad (a^2 = n^2 D^3) \quad (2.10)$$

$$\varphi' = \frac{n-1}{9n^2} \left[\frac{3\omega Ca}{2D} \operatorname{arc\,tg} 2a\xi + (1+2n) \ln(1+4a^2\xi^2) \right] + \alpha \quad (\alpha = \varphi'(0)) \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{n-1}{9n^2} \left\{ \left[\frac{3\omega Ca}{2D} \xi + \frac{1}{a}(1+2n) \right] \operatorname{arc\,tg} 2a\xi + \right. \\ \left. + \left[(1+2n)\xi - \frac{3\omega C}{8D} \right] \ln(1+4a^2\xi^2) \right\} + \left[\alpha - \frac{2}{9n^2}(n-1)(1+2n) \right] \xi \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из второго условия (2.5) с учетом (2.6) получаем

$$\begin{aligned} \frac{9n^2}{n-1} \beta^2 - \left[\frac{13n^2 - 2n - 2}{n-1} - \frac{1}{a}(1+2n) \operatorname{arc\,tg} 2a - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}(2+n) \ln(1+4a^2) \right] \beta - \frac{3}{4} n \ln(1+4a^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

а из уравнения (2.11)

$$\alpha = \beta - \frac{n-1}{9n^2} \left[3a \left(\frac{n}{\beta} - m \right) \operatorname{arc\,tg} 2a + (1+2n) \ln(1+4a^2) \right] \quad (2.14)$$

Присоединяя к (2.13), (2.14) четвертое условие (2.5), получаем полную систему уравнений для определения α , β и D .

Приведем результаты численного решения этой системы при нескольких значениях показателя n

$n = -3$	-2	-1	2	3
$\alpha = 0.415$	0.449	0.548	0.352	0.332
$\beta = 1.426$	1.423	1.379	1.273	1.332
$D = 0.611$	0.712	0.851	2.238	1.247

Для функции $\varphi(\xi)$ приведены значения в табл. 1; на фиг. 1 построены графики этой функции.

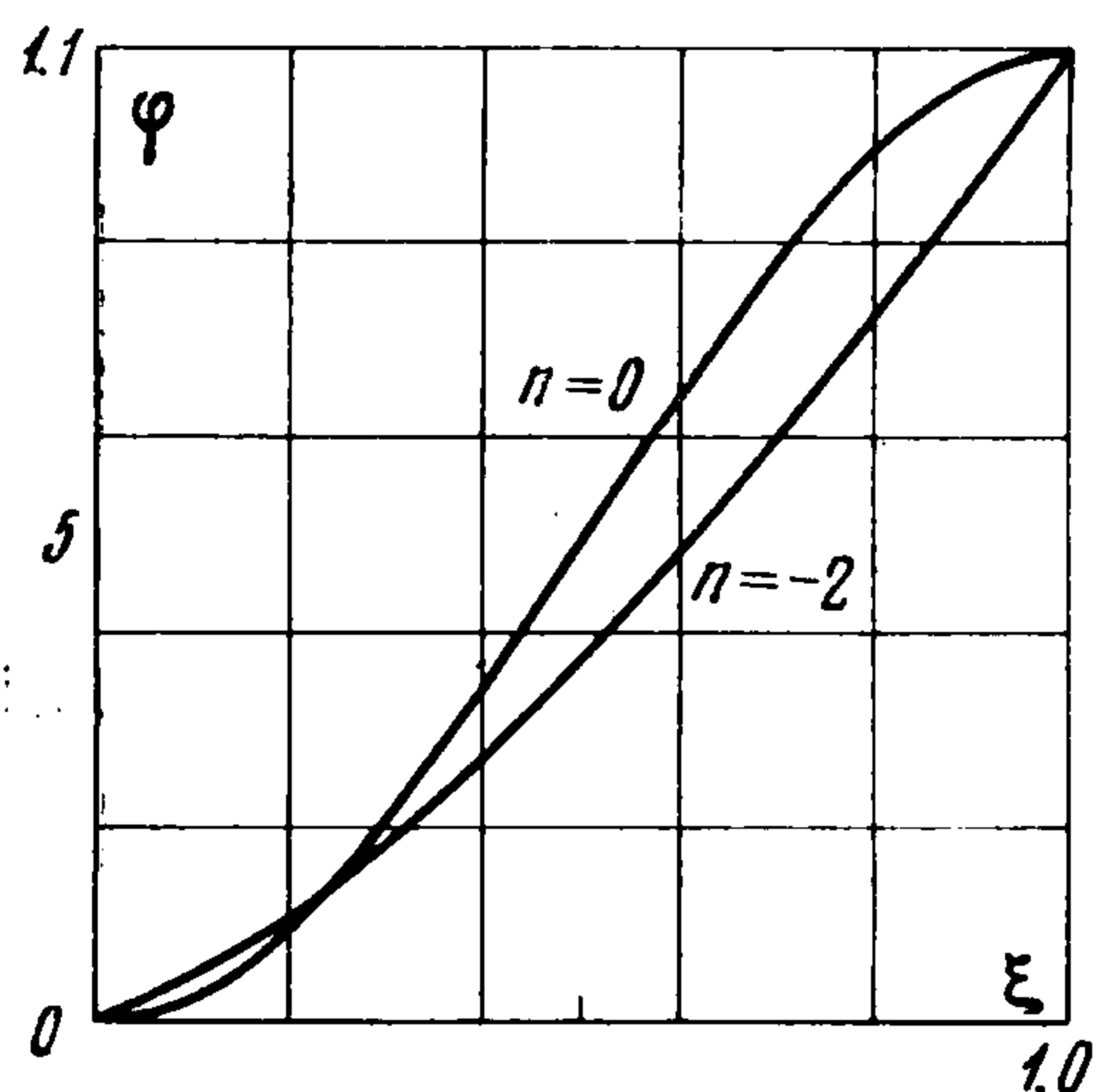
Т а б л и ц а 1

$\xi \backslash$	$n = -3$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 2$	$n = 3$
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.1	0.047	0.050	0.059	0.048	0.043
0.2	0.108	0.113	0.128	0.120	0.109
0.3	0.183	0.188	0.209	0.207	0.191
0.4	0.271	0.276	0.295	0.304	0.286
0.5	0.371	0.375	0.393	0.408	0.390
0.6	0.481	0.484	0.499	0.518	0.501
0.7	0.600	0.602	0.614	0.633	0.619
0.8	0.727	0.728	0.736	0.752	0.741
0.9	0.860	0.861	0.865	0.874	0.869
1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

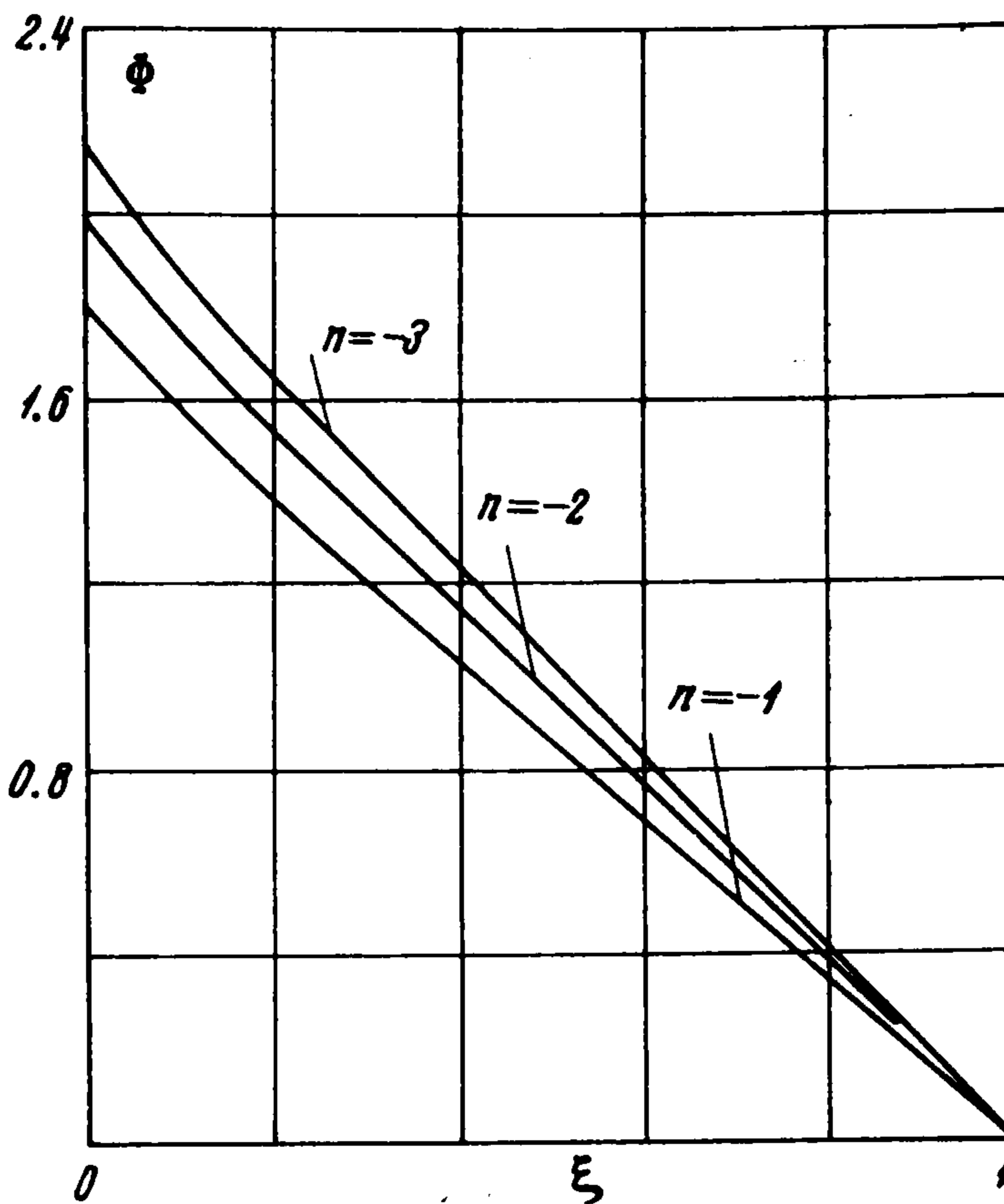
Численное интегрирование уравнения (2.2) при условиях (2.5) для данных значений n показывает, что погрешность результатов, полученных по приближенной формуле (2.12), не превышает 4%.

Распределение давления в поперечном направлении характеризуется функцией $\Phi(\xi)$. Значения этой функции приведены в табл. 2; на фиг. 2 построены ее графики.

При отрицательных n расчет проводился для сходящегося течения ($\omega = -1$).



Фиг. 1



Фиг. 2

Случай $n = -2$ соответствует движению идеально пластического материала в конической матрице (см. [5] стр. 91). При движении в плоском конфузоре можно приближенно положить $n = -1$.

Таблица 2

ξ	$n = -3$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 2$	$n = 3$
0.0	2.162	2.000	1.801	1.066	1.462
0.1	1.880	1.745	1.586	0.965	1.286
0.2	1.659	1.534	1.391	0.923	1.205
0.3	1.462	1.344	1.210	0.849	1.102
0.4	1.269	1.160	1.035	0.754	0.976
0.5	1.071	0.976	0.863	0.646	0.834
0.6	0.867	0.788	0.693	0.528	0.681
0.7	0.658	0.597	0.521	0.403	0.520
0.8	0.443	0.401	0.349	0.273	0.351
0.9	0.223	0.202	0.175	0.138	0.178
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Если распределение скорости во внешнем потоке не степенное, можно воспользоваться методом Смита [6,7]. Идея этого метода заключается в выборе такого степенного распределения скорости, которое в некотором интервале приближенно совпадает с заданным.

Поступила 6 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Oldroyd J. G. Proc. Cambridge Philos. Soc., Two-dimensional plastic flow of a bingham solid. A plastic boundary-layer theory for slow motion, 1947, vol. 43, № 3, p. 383.
3. Астрахан И. М. Об уравнениях движения вязко-пластичной жидкости в пограничном слое на произвольной поверхности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 2.
4. Швец М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ, 1949, т. 13, вып. 3.
5. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
6. Smith A. M. Rapid laminar boundary layer calculations by piecewise application of similar solutions. J. Aeronaut Sci., 1956, vol. 23, No 10.
7. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

И. И. Шмелев

(Воронеж)

Рассматриваются краевые задачи для системы уравнений, которая является математической моделью турбулентного движения жидкости или газа. Эта модель была введена Бюргерсом в работе [1]. В § 1 доказывается существование у первой краевой задачи для упомянутой системы уравнений по крайней мере одного гладкого периодического по времени решения. Это достигается на пути использования топологического принципа Лерэ — Шаудера [2] существования неподвижных точек у вполне непрерывных операторов. Теореме существования предшествует получение априорных оценок решения задачи, которые необходимы для реализации упомянутого выше топологического принципа. § 2 посвящен первой краевой задаче с начальными условиями и задаче Коши для модельных уравнений турбулентности.

Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений. Через Ω обозначим интервал $(0, 1)$. Пусть $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ и $t_2 > t_1$. Через $Q_{t_1, t_2} = \Omega \times (t_1, t_2]$ обозначим прямоугольник. Если $t_1 = -\infty$, а $t_2 = +\infty$, то прямоугольник Q_{t_1, t_2} превращается в полосу, которую будем обозначать через Q . Каждый прямоугольник, для которого $t_2 - t_1 = \tau_0$, где τ_0 — фиксированное число, будем обозначать через Q_{τ_0} . В дальнейшем мы будем обычно считать $t_1 = 0$, а $t_2 = T$. Замыкания Q_{t_1, t_2} , Q и Q_{τ_0} будем обозначать соответственно через Q_{t_1, t_2} , \bar{Q} и \bar{Q}_{τ_0} .

Скалярное произведение в пространстве L_2 функций в Q_{τ_0} , а также норму будем обозначать соответственно следующим образом:

$$(\Phi_1, \Phi_2)_{Q_{\tau_0}} = \int_0^{\tau_0} \int_0^1 \Phi_1 \Phi_2 dx dt, \quad \|\Phi\|_{Q_{\tau_0}}^2 = \int_0^{\tau_0} \int_0^1 \Phi^2 dx dt$$

Аналогичным образом при каждом $t \in [0, \tau_0]$ обозначаются в L_2 скалярное произведение и норма

$$(\Phi_1, \Phi_2)_{\Omega} = \int_0^1 \Phi_1 \Phi_2 dx, \quad \|\Phi\|_{\Omega}^2 = \int_0^1 \Phi^2 dx$$