Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО РОДА В НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Г. И. Баренблатт, Г. И. Сивашинский

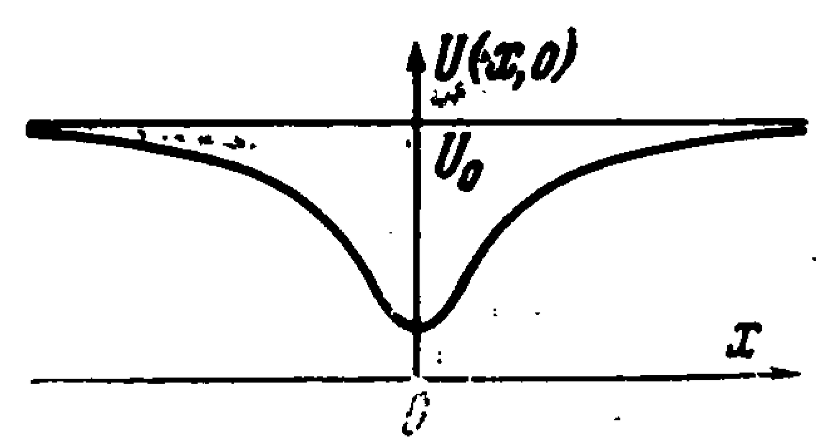
(Москва)

В газодинамике известно несколько своеобразных автомодельных решений (решение Гудерлея — Ландау — Станюковича задачи о сходящейся ударной волне, решение Зельдовича — Вайцзеккера задачи о коротком ударе и др.), которые по классификации Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [1] (см. также обзорную статью К. В. Брушлинского и Я. М. Каждана [2]), относятся к автомодельным решениям второго рода. Формальное определение автомодельных решений второго рода, данное в [1], таково: для этих решений показатель степени в выражении автомодельных переменных не может быть найден непосредственно из соображений размерности, исходя из заданных определяющих параметров, как это делается для автомодельных решений первого рода (см. книгу Л. И. Седова [3]), а находится в процессе решения системы обыкновенных уравнений, к которым сводится построение автомодельных решений (из условия существования в целом решения соответствующей краевой задачи для этой системы).

До настоящего времени причина появления в тех или иных задачах автомодельных решений второго рода оставалась все же не вполне выясненной. В предлагаемой работе рассматривается асимптотическое поведение при больших временах решения задачи Коши теории нестационарной фильтрации упругой жидкости в деформируемой среде. В случае упругой среды эта асимптотика представляется известным автомодельным решением первого рода; для фильтрации в упруго-пластической среде задача приводится к построению нового автомодельного решения второго рода. Полученные результаты позволяют сделать некоторые общие выводы.

§ 1. Простейший пример и постановка задачи. 1°. Рассмотрим вначале элементарный пример: задачу Коши для классического уравнения теплопроводности, описывающего также распределение давления при фильтрации упругой жидкости в упругой среде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geqslant 0 \tag{1.1}$$



Фиг. 1

при начальном условии (см. фиг. 1), которое удобно записать следующим образом:

$$U_0 - u(x, 0) = \frac{Q}{l} u_0\left(\frac{x}{l}\right) \tag{1.2}$$

Здесь U_0 — аддитивная константа, l — некоторый масштаб длины, Q — «суммарное отобранное тепло», или, в теории фильтрации, величина, пропорциональная количеству отобранной к начальному моменту жидкости, $u_0(\zeta)$ — четная безразмерная функция своего безразмерного аргумента; предполагается, что эта функция достаточно гладкая и что с ростом ζ функция $u_0(\zeta)$ монотонно и притом достаточно быстро убывает, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\zeta)\, d\zeta = 1$$

Анализ размерностей (П-теорема, см. [3]) позволяет представить решение задачи Коши (1.1), (1.2) в виде

$$U_0 - u = \frac{Q}{\sqrt{a^2 t}} F(\xi, \eta), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{a^2 t}}, \quad \eta = \frac{l}{\sqrt{a^2 t}} \tag{1.3}$$

где F — безразмерная функция своих безразмерных аргументов, легко выписываемая в явном виде. Устремим теперь t к бесконечности и будем рассматривать асимптотику решения (1.3) при $t \to \infty$, считая, что параметр $\xi = x / \sqrt{a^2 t}$ сохраняет конечные значения. Аргумент $\eta = l / \sqrt{a^2 t}$ стремится при этом к нулю. Предполагая, что при $\eta \to 0$ функция $F(\xi, \eta)$ стремится при конечных ξ к конечной величине (в данном простейшем случае это предположение без труда обосновывается), получаем, что главный член асимптотики решения (1.3) при $t \to \infty$ записывается в хорошо известной форме

$$U_0 - u = \frac{Q}{\sqrt{a^2 t}} f(\xi), \qquad f(\xi) = F(\xi, 0) \tag{1.4}$$

Очевидно, что предельный переход при $\eta \to 0$ и ξ конечном можно рассматривать как соответствующий $l \to 0$ и постоянным x и t, так что (1.4) представляет собой решение уравнения (1.1), соответствующее $l = 0$, т. е. начальному распределению в виде δ-функции. Из уравнения (1.1), условий симметрии и интегрируемости легко получается, что

$$f(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp \frac{-\xi^2}{4}$$

Рассмотренный пример типичен для автомодельных решений первого рода. Именно благодаря тому, что при стремлении к нулю «неавтомодельного» аргумента $\eta = l / \sqrt{a^2 t}$ функция $F(\xi, \eta)$, представляющая решение, стремится для конечных ξ к конечному пределу, параметр l из формулировки предельной задачи исчезает, «не оставляя следа». Поэтому можно строить автомодельное решение (1.4) обычным образом, определяя показатели степени из соображений размерности в предположении, что решение $U_0 - u(x, t)$ зависит от параметров x, t, a^2, Q и только от них.

2°. В теории фильтрации упругой слабосжимаемой жидкости в упругопластических пористых средах показано [4], что давление жидкости u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a^2(z) = \begin{cases} a_1^2 & (z > 0) \\ a_2^2 & (z \leqslant 0) \end{cases} \tag{1.5}$$

Будем считать $a_2^2 > a_1^2$ (рассматривается простейший случай, когда процесс понижения и последующего повышения давления — однократный).

Рассмотрим для уравнения (1.5) задачу Коши при том же начальном условии (1.2). Как показано С. Л. Каменомостской [5], решение поставленной таким образом задачи существует, единственно и обладает непрерывной второй производной по x. Соображения подобия приводят к следующей форме записи решения задачи Коши:

$$U_0 - u = \frac{Q}{\sqrt{a_1^2 t}} F(\xi, \eta, \varepsilon) \qquad \left(\xi = \frac{x}{\sqrt{a_1^2 t}},\ \eta = \frac{l}{\sqrt{a_1^2 t}},\ \varepsilon = \frac{a_2}{a_1}\right) \quad (1.6)$$

Рассуждая аналогично предыдущему и снова предполагая конечность предела функции $F(\xi, \eta, \varepsilon)$ при конечных ξ и $\eta \to 0$, приходим к выводу, что предельное решение, так же как и в предыдущем случае решение (1.4), должно быть представимо в форме

$$U_0 - u = \frac{Q}{\sqrt{a_1^2 t}} f(\xi, \varepsilon) \quad (1.7)$$

Однако решения уравнения (1.5) в форме (1.7), непрерывного, имеющего непрерывную производную по x и удовлетворяющего естественным условиям симметрии и на бесконечности не существует. В самом деле, подставляя (1.7) в (1.5), получаем для f уравнение

$$\varepsilon \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \xi f = 0 \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0), \qquad \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \xi f = 0 \quad (\xi_0 \leqslant \xi < \infty) \quad (1.8)$$

Здесь ξ_0 координата, в которой величина $(\xi f)'$, пропорциональная $\partial u / \partial t$, обращается в нуль. Интегрируя, имеем

$$\varepsilon \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{2} \xi f = C_1 \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0), \qquad \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{2} \xi f = C_2 \quad (\xi_0 \leqslant \xi < \infty) \quad (1.9)$$

В силу симметрии $df / d\xi = 0$ при $\xi = 0$; при $\xi \to \infty$ стремятся к нулю величины ξf (функция f предполагается интегрируемой) и $df / d\xi$. Отсюда $C_1 = C_2 = 0$, и, интегрируя предыдущие уравнения, имеем

$$f = C_3 \exp \frac{-\xi^2}{4\varepsilon} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0), \qquad f = C_4 \exp \frac{-\xi^2}{4} \quad (\xi_0 \leqslant \xi < \infty) \quad (1.10)$$

где C_3 и C_4 — новые константы. Условия непрерывности давления и потока жидкости приводят к требованию непрерывности f и $df / d\xi$ при $\xi = \xi_0$, откуда и из предыдущих уравнений получаем систему

$$C_3 \exp - \frac{\xi_0^2}{4\varepsilon} = C_4 \exp - \frac{\xi_0^2}{4}, \qquad C_3 \xi_0 \frac{1}{\varepsilon} \exp - \frac{\xi_0^2}{4\varepsilon} = C_4 \xi_0 \exp - \frac{\xi_0^2}{4}$$

При $\varepsilon \neq 1$ эта система не имеет нетривиального решения при любом конечном ξ_0 и тем самым доказывается, что решения в виде (1.7) не существует. Более того, С. Л. Каменомостская, исследовавшая этот вопрос, доказала следующее утверждение: при определенном выборе функции $u_0(x / l)$ и стремлении l к нулю при неизменном Q решение задачи Коши при любом $t > 0$ стремится в любой точке x к константе U_0 или бесконечности (в зависимости от того, какое из неравенств $\varepsilon \gtrless 1$ имеет место).

§ 2. **Автомодельное решение второго рода.** Причиной, по которой проведенные рассуждения при $\varepsilon \neq 1$ привели к парадоксу — несуществованию предельного решения — может быть неправильность предположения о существовании конечного предела $F(\xi, \eta, \varepsilon)$ при конечном ξ и $\eta \to 0$.

Если этот предел не равен конечной величине, то возникает следующая альтернатива, либо существует такое число α, что $\lim \eta^{-\alpha} F(\xi, \eta, \varepsilon)$ при $\eta \to 0$ будет конечным, либо такого числа не существует.

Предположим, что в данном случае осуществляется первая возможность, т. е. при $\eta \to 0$ для функции $F(\xi, \eta, \varepsilon)$ справедливо асимптотическое представление

$$F(\xi, \eta, \varepsilon) = \eta^\alpha f^*(\xi, \varepsilon) \tag{2.1}$$

Тогда при $t \to \infty$ предельная форма решения задачи Коши представляется уже не в виде (1.4), а в виде

$$U_0 - u = \frac{Ql^\alpha}{(a_1^2 t)^{1/2(1+\alpha)}} f^*(\xi, \varepsilon) \tag{2.2}$$

Вспомним теперь, что стремление к нулю η при конечном ξ может осуществляться также путем предельного перехода при $l \to 0$ и неизменных x и t. Выражение (2.2) показывает, что если выполнять этот предельный переход, оставляя Q неизменным, то решение будет стремиться к нулю или к бесконечности. Но это соотношение показывает также, что если выполнять предельный переход при $l \to 0$, устремляя Q соответственно к нулю или бесконечности так, чтобы произведение Ql^α оставалось конечным, то автомодельное решение уравнения (1.5), получающееся в пределе при $l \to 0$ и определяющее асимптотику решения задачи Коши (1.5) — (1.2) должно представляться не в форме (1.4), а в форме

$$U_0 - u = \frac{A}{(a_1^2 t)^{1/2(1+\alpha)}} f(\xi, \varepsilon) \qquad (A = \beta Q l^\alpha) \tag{2.3}$$

Здесь β — безразмерная постоянная, а параметр α, остался как своеобразный след исчезнувших параметров l, Q, параметр α можно было бы вычислить, если бы удалось эффективно выполнить предельный переход от решения неавтомодельной задачи; при прямом построении автомодельного решения (2.3) параметр α неизвестен и подлежит определению. Существенно, что параметр α, след исчезнувшего неавтомодельного параметра, явно фигурирует в формулировке асимптотической автомодельной задачи.

Решение (2.3) отвечает сингулярным начальным условиям (но эта сингулярность уже не классическая δ-функция как при $\varepsilon = 1$); а именно

$$U_0 - u(x, 0) = A\delta_\alpha(x) \tag{2.4}$$

Здесь обобщенная функция $\delta_\alpha(x)$ отвечает условию

$$\delta_\alpha(x) = 0 \quad (x \neq 0), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha \delta_\alpha(x)\, dx = 1$$

так что для функции $f(\xi, \varepsilon)$ имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^\alpha f(\xi, \varepsilon)\, d\xi = 1 \tag{2.5}$$

Подставляя (2.3) в (1.5), находим уравнение для f

$$\varepsilon \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi \frac{df}{d\xi} + \frac{1+\alpha}{2} f = 0 \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0),$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi \frac{df}{d\xi} + \frac{1+\alpha}{2} f = 0 \qquad (\xi_0 \leqslant \xi < \infty) \tag{2.6}$$

Здесь ξ_0 — точка, в которой обращается в нуль $f''(\xi, \varepsilon)$, или, что в силу (2.6) то же самое, величина $f'\xi + (1+\alpha) f$, пропорциональная производной $\partial u / \partial t$.

Вследствие естественного предположения о симметрии функции $f(\xi, \varepsilon)$ получаем граничное условие

$$f'(0, \varepsilon) = 0 \tag{2.7}$$

Кроме того, функция $f(\xi, \varepsilon)$ должна быть непрерывной вместе со своей первой производной при $\xi = \xi_0$ (давление жидкости и поток непрерывны на «волне разгрузки» $x_0(t) = \xi_0 \sqrt{a_1^2 t}$, где меняет знак производная $\partial u / \partial t$).

Решения уравнения (2.6) просто выражаются через конфлюентные гипергеометрические функции или родственные им функции параболического цилиндра [6].

При $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$ решение уравнения (2.6), удовлетворяющее первому условию (2.7), имеет вид

$$f = C \exp\left(-\frac{\xi^2}{8\varepsilon}\right)\left[D_\alpha\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + D_\alpha\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)\right] \tag{2.8}$$

где C — константа, D_α — символ функции параболического цилиндра [6]. При $\xi_0 < \xi$ решение уравнения (2.6), для которого интеграл (2.5) сходится, представляется следующим образом:

$$f = F \exp\left(-{}^1/_8 \xi^2\right) D_\alpha \left({}^1/_2 \sqrt{2}\xi\right) \tag{2.9}$$

где F — константа. (Второе линейно-независимое решение ведет себя при $\xi \to \infty$ как $\xi^{-\alpha-1}$, и интеграл (2.5) для него расходится.)

Требуя выполнения условия

$$(\partial u / \partial t) = 0 \text{ при } x = x_0(t) \pm 0$$

или, что то же, условия

$$\xi f' + (1+\alpha) f = 0 \text{ при } \xi = \xi_0 \pm 0 \tag{2.10}$$

получаем, используя реккурентные соотношения для производных функций параболического цилиндра и выражения функций параболического цилиндра через конфлюентные гипергеометрические функции [6]

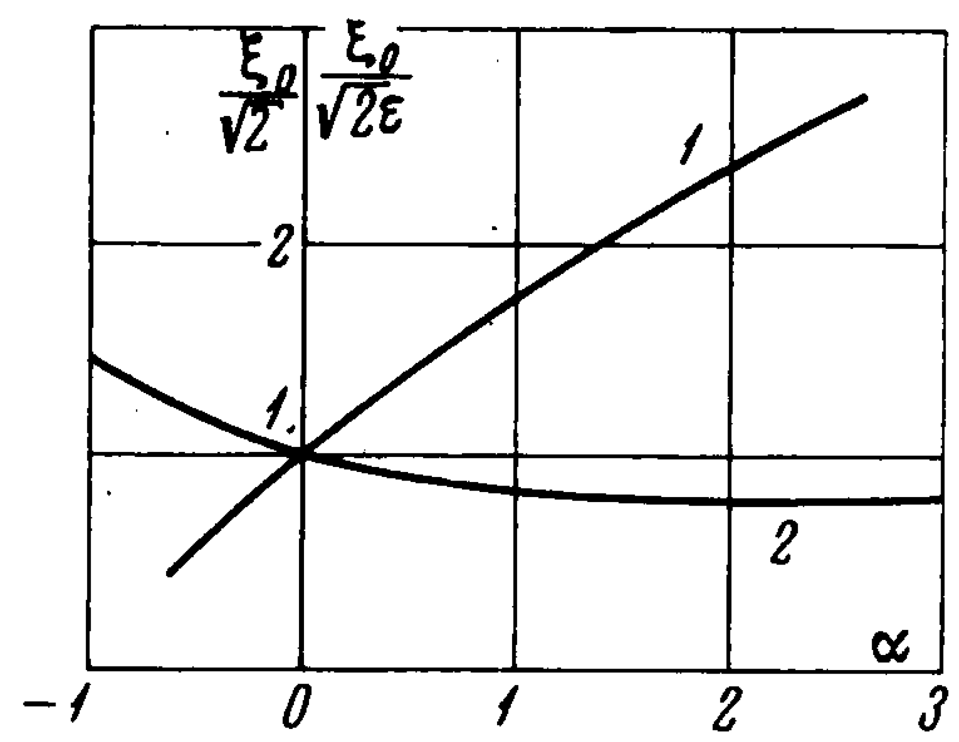
$$D_{\alpha+2}\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2}}\right) = 0, \qquad \Phi\left(-\frac{\alpha}{2} - 1, \frac{1}{2}, \frac{\xi_0^2}{4\varepsilon}\right) = 0 \tag{2.11}$$

Уравнения (2.11) определяют неизвестный параметр α и величину ξ_0, после этого условие непрерывности f при $\xi = \xi_0$ дает соотношение между константами C и F

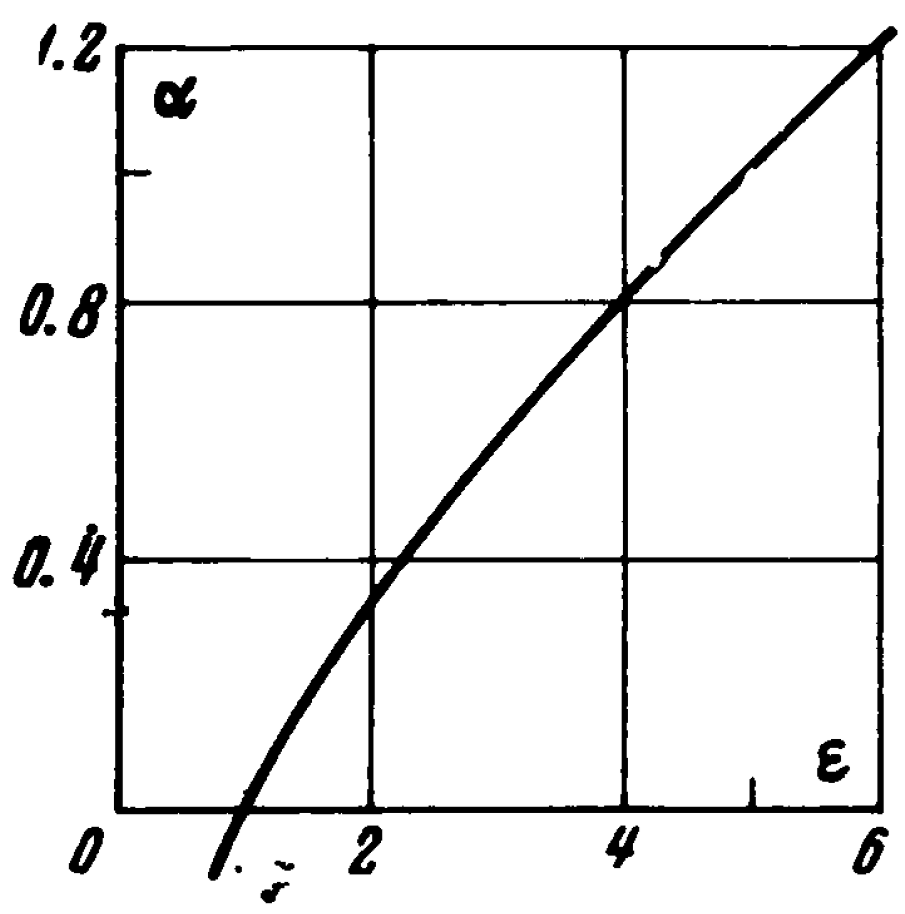
$$F = C\left[D_\alpha\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + D_\alpha\left(-\frac{\xi_0}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)\right] \exp\left[\frac{\xi_0^2}{8}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\left[D_\alpha\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2}}\right)\right]^{-1} \tag{2.12}$$

(в силу (2.10) требование непрерывности $f'(\xi, \varepsilon)$ удовлетворится при этом автоматически) и далее константа C определяется из нормировочного условия (2.5). Таким образом, для полного исследования решения осталось выяснить разрешимость системы трансцендентных уравнений (2.11).

Разрешая первое уравнение относительно $\xi_0 / \sqrt{2}$, получаем монотонно возрастающую функцию α, представленную кривой *1* на фиг. 2. Разрешая второе уравнение относительно $\xi_0 / \sqrt{2\varepsilon}$, получаем монотонно убывающую функцию α, представленную на фиг. 2 кривой *2*; соответствующие зависимости $\xi_0 / \sqrt{2}$ от α получаются при каждом данном ε простым рас-



Фиг. 2



Фиг. 3

тяжением кривой *2* вдоль оси ординат. Кривые *1*, *2* при $\varepsilon = 1$, т. е. $a_1 = a_2$ пересекаются в точке $\alpha = 0$, что и должно было получиться в согласии с результатами для классического случая, представленными в § 1. При $\varepsilon > 1$ абсцисса α точки пересечения положительна; легко видеть, что благодаря характеру кривых *1*, *2* точка пересечения этих кривых единственна. На графике фиг. 3 представлена зависимость α (ε).

Заметим, что кривые *1*, *2* имеют при больших значениях α также другие ветви. Вторая ветвь кривой *1* начинается в точке $\xi_0 = 0$, $\alpha = 1$ и идет, монотонно возрастая, ниже первой ветви. Вторая ветвь кривой *2* двузначна и располагается выше первой ветви этой кривой. Точки, соответствующие пересечениям со вторыми ветвями и существующие при достаточно больших ε, физически нереальны, так как им соответствуют немонотонные распределения давления.

§ 3. Случай «диполя». Обсуждение задачи фильтрации. 1°. В предыдущих параграфах рассматривалась задача Коши для неограниченного пространства. Представляет интерес также рассмотрение смешанной задачи для полупространства $x \geqslant 0$, на границе которого $x = 0$ давление $u\ (0, t)$ постоянно

$$u\,(0, t) = U_0 \tag{3.1}$$

Как известно, асимптотика этой смешанной задачи представляется в классическом случае $\varepsilon = 1$ (уравнение (1.1)) решением типа диполя

$$U_0 - u\,(x, t) = \frac{Mx}{2a^3 \sqrt{\pi t^3}} \exp \frac{-x^2}{4a^2 t} \tag{3.2}$$

которое также может быть получено из соображений размерности, исходя из легко доказываемого для данного случая закона сохранения величины («дипольного момента»)

$$\int_0^\infty [U_0 - u\,(x, t)]\, x dx = M \tag{3.3}$$

При $\varepsilon \neq 1$ (уравнение (1.5)) все рассуждения, приведенные в предыдущем параграфе, переносятся без изменения и на рассматриваемую задачу;

следует иметь в виду только, что уравнение (1.5) и начальное условие (1.2) рассматриваются при $x \geqslant 0$. Далее в силу граничного условия (3.1) краевое условие (2.7) для функции $f(\xi, \varepsilon)$ заменяется условием

$$f(0, \varepsilon) = 0 \tag{3.4}$$

так что функция $f(\xi, \varepsilon)$, удовлетворяющая условиям (3.4) и условию

$$\int_0^\infty \xi^\alpha f(\xi, \varepsilon)\, d\xi = 1 \tag{3.5}$$

представляется в виде

$$f = C \exp\frac{-\xi^2}{8\varepsilon} \Big/ \left[D_\alpha\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) - D_\alpha\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)\right] \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant 0)$$

$$f = F \exp - \frac{\xi^2}{8} \Big/ D_\alpha\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) \qquad (\xi \geqslant \xi_0) \tag{3.6}$$

Условия (2.11) запишутся в данном случае в виде

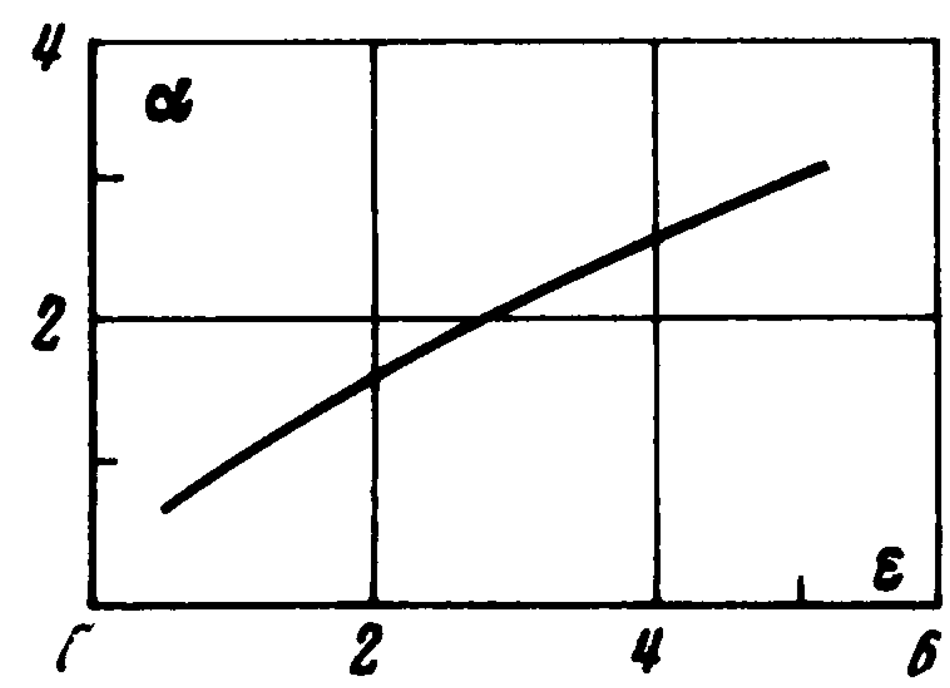
$$D_{\alpha+2}\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2}}\right) = 0, \qquad \Phi\left(-\frac{\alpha+1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\xi_0^2}{4\varepsilon}\right) = 0 \tag{3.7}$$

(первое условие, как видно, осталось неизменным); решая уравнения (3.7) численно, получаем зависимость $\alpha(\varepsilon)$, представленную на фиг. 4; при $\varepsilon = 1$, очевидно, $\alpha = 1$ в согласии с классическим случаем. Константы C и F определяются вполне аналогично предыдущему случаю.

2°. В обоих рассмотренных случаях (начальное возмущение давления в неограниченном пространстве и полупространстве) асимптотическое поведение распределения давления упругой жидкости в упруго-пластической среде определяется автомодельным решением второго рода

$$U_0 - u(x, t) = \frac{A}{(a_1^2 t)^{1/2\,(1+\alpha)}} f(\xi, \varepsilon) \tag{3.8}$$

Как видно из предыдущего, все входящие в определение функции f константы α, ξ_0, C, F определяются однозначно.



Фиг. 4

Таким образом, асимптотическое представление распределения давления определяется с точностью до константы $A = \beta Q l^\alpha$.

В классическом случае $\varepsilon = 1$ эта константа определяется из законов сохранения

$$\int_{-\infty}^{\infty} [U_0 - u(x, t)]\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [U_0 - u(x, 0)]\, dx = A \tag{3.9}$$

(случай неограниченного пространства) и

$$\int_0^\infty [U_0 - u(x, t)]\, x dx = \int_0^\infty [U_0 - u(x, 0)]\, x dx = A \tag{3.10}$$

(случай полупространства), которые в общем случае не выполняются. При $a_2 \neq a_1$ ($\varepsilon \neq 1$) имеем, например, в случае неограниченного пространства

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[U_0-u(x,t)]\,dx=-2(a_2^2-a_1^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0(t)}\neq 0 \qquad (3.11)$$

и в случае полупространства при постоянном давлении на границе

$$\frac{d}{dt}\int_{0}^{\infty}[U_0-u(x,t)]\,xdx=-(a_2^2-a_1^2)\,x_0(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0(t)}-$$

$$-(a_2^2-a_1^2)\,[U_0-u(x_0(t),t)]\neq 0$$

Мы не располагаем законом сохранения во времени интеграла

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}[U_0-u(x,t)]\,|x|^\alpha\,dx \qquad (3.12)$$

в случае неограниченного пространства и в случае полупространства интеграла

$$I_2=\int_{0}^{\infty}[U_0-u(x,t)]\,x^\alpha dx \qquad (3.13)$$

Если бы эти законы сохранения имели место, то константа A однозначно определялась бы из начальных условий. Поэтому единственным способом определения константы A остается численный расчет задачи исходя от неавтомодельных начальных условий. Результаты численного расчета должны показать выход решения на автомодельную асимптотику (2.3) и определить константу A, причем особенно интересно сопоставить результаты расчета для двух вариантов начальных условий, соответствующих одинаковым значениям интегралов (3.12) или соответственно (3.13).

§ 4. **Некоторые заключения.** Рассмотренный выше пример позволяет сделать некоторые общие выводы, касающиеся автомодельных решений второго рода.

Анализ размерностей основан на П-теореме [3], заключающейся, как известно, в том, что зависимость между $n+1$ размерными величинами $a, a_1, \ldots, a_n$

$$a=f(a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_n) \qquad (4.1)$$

может быть представлена в виде

$$\Pi=F(\Pi_1,\ldots,\Pi_{n-k}) \qquad (4.2)$$

$$\Pi=\frac{a}{a_1^{\alpha}\ldots\alpha_k^{\varkappa}},\qquad \Pi_1=\frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha_1}\ldots a_k^{\varkappa_1}},\ \ldots,\ \Pi_{n-k}=\frac{a_n}{a_1^{\alpha_{n-k}}\ldots a_k^{\varkappa_{n-k}}} \qquad (4.3)$$

причем предполагается, что величины $a_1,\ldots,a_k$, имеют независимые размерности и что среди величин $a_1,\ldots,a_n$ не существует $k+1$ величины с независимыми размерностями.

При этом заключение о несущественности (выпадении) того или иного определяющего параметра a_{k+i} обычно делается на основании оценки соответствующего безразмерного параметра Π_i: рассуждение состоит в том, что если величина Π_i «мала» или «велика» (сравнительно с единицей), то величину Π_i в выражении для функции $F(\Pi_1,\ldots,\Pi_{i-1},\Pi_i,\Pi_{i+1},\ldots,\Pi_{n-k})$ заменяют предельным значением, равным нулю или бесконечности, и просто рассматривают функцию $n-k-1$ аргументов

$$\Phi(\Pi_1,\Pi_2,\ldots,\Pi_{i-1},\Pi_{i+1},\ldots,\Pi_{n-k})=F(\Pi_1,\ldots,\Pi_{i-1},\overset{0}{\infty},\Pi_{i+1},\ldots,\Pi_{n-k})$$

говоря, что аргумент a_{k+1} в данной задаче несуществен.

Однако применимость подобного рассуждения основана на том, как правило явно не оговариваемом предположении, что предел функции F при Π_i, стремящемся к нулю или бесконечности, и фиксированных конечных значениях остальных аргументов существует и отличен от нуля или бесконечности. Очевидно, что могут встретиться случаи, когда это предположение не выполняется. В этих случаях зависимость от параметра Π_i остается существенной, как бы мал или велик ни был соответствующий безразмерный параметр Π_i. При этом специальную роль играет следующий особый случай

1°. Предел функции $F(\Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1}, \Pi_i, \Pi_{i+1}, \ldots, \Pi_{n-k})$ при $\Pi_i \to 0$ или ∞ равен нулю или бесконечности, но существует такое число α, что при $\Pi_i \to 0$ или ∞

$$\lim \Pi_i^{-\alpha} F = \Phi(\Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \ldots, \Pi_{n-k}) \qquad (\Pi_i \to 0, \infty) \tag{4.4}$$

где Φ конечна при конечных значениях своих аргументов, так что при малых (или больших) значениях аргумента Π_i для функции F справедлива асимптотика

$$F \approx \Pi_i^{\alpha} \Phi(\Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \ldots, \Pi_{n-k}) \tag{4.5}$$

Если предел функции F при Π_i и Π_j, порознь стремящихся для определенности к нулю, существует и конечен, то, разумеется, порядок и характер перехода к пределу несущественны. Если же этот предел не существует, то для анализа асимптотического поведения становится существенным характер предельного перехода, т. е. относительная скорость стремления к нулю обоих параметров. При этом зависимость от обоих параметров Π_i и Π_j остается существенной как бы малы они ни были. Здесь важную роль играет особый случай

2°. Предела функции $F(\Pi_1, \ldots \Pi_i, \ldots, \Pi_j \ldots, \Pi_{n-k})$ не существует, но существуют такие числа α и β, что при $\Pi_i, \quad \Pi_j \to 0$

$$F \approx \Pi_i^{\alpha} \Phi(\Pi_j/\Pi_i^{\beta}, \Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1}, \quad \Pi_{i+1}, \ldots, \Pi_{j-1}, \Pi_{j+1}, \ldots, \Pi_{n-k}) \tag{4.6}$$

Разумеется, можно выделить аналогичные подклассы и при одновременном стремлении к нулю трех и более параметров.

Рассмотрим теперь некоторую, вообще говоря, неавтомодельную краевую задачу для системы уравнений в частных производных, описывающих некоторое явление. Ее решение можно представить в виде (4.1), (4.2) (число функций a равно числу неизвестных в задаче, величинами $a_1 \ldots a_n$ будут независимые переменные и параметры задачи). При построении автомодельных решений переходят к пределу при значениях некоторых параметров Π_i, стремящихся к нулю или бесконечности. Результирующие автомодельные предельные решения представляют собой одновременно частные точные решения с сингулярными, вообще говоря, краевыми условиями и с меньшим числом определяющих параметров и асимптотические представления неавтомодельных решений.

Если предел F существует и конечен, то в результате указанного предельного перехода могут быть получены автомодельные решения первого рода, для которых показатели степени в автомодельных переменных определяются из соображений размерности по исходным данным задачи (Примеры: задача Л. И. Седова о сильном взрыве [3], задача о тепловом источнике (см. §1) и др.). В этих задачах неавтомодельные параметры исчезают, «не оставляя следа», и могут быть исключены из формулировки предельной задачи.

Если предела функции F не существует, то, вообще говоря, автомодельного предельного решения не существует и асимптотические представления решения неавтомодельной задачи не будут автомодельными при сколь угодно малых (больших) значениях устремляемых к нулю (бесконечности) параметров.

Автомодельные решения второго рода обязаны своим существованием особым случаям 1° *и* 2°.

Применительно к особому случаю 1° это иллюстрируется примерами §§ 2, 3. Особый случай 2° иллюстрируется задачей о сходящейся ударной волне и задачей о коротком ударе. Покажем это несколько детальнее на последней задаче.

Пусть на полупространство, заполненное идеальным газом, имеющим в начальный момент постоянную плотность ρ_0 и равное нулю давление, начиная с момента $t = 0$ в течение времени τ надвигается поршень с постоянной скоростью U. В момент $t = \tau$ поршень убирается. Получающееся движение газа, очевидно, неавтомодельно.

Соображения подобия дают для решения уравнений газодинамики: скорости u давления p и плотности ρ_0, если принять за параметры с независимыми размерностями ρ_0, скорость поршня U и время τ

$$p = \rho_0 U^2 F_p(\Pi_1, \Pi_2), \qquad \rho = \rho_0 F_\rho(\Pi_1, \Pi), \; u = UF_u(\Pi_1, \Pi_2)$$
$$\Pi_1 = \tau / t, \quad \Pi_2 = x / Ut \tag{4.7}$$

Представляет интерес рассмотрение предельного движения при $t \to \infty$. Конечного предела функций F при $\Pi_1 \to 0$ не существует ($\Pi_1 \to 0$ соответствует $\tau \to 0$ при конечных x, U, t; все функции при этом стремятся к нулю). Однако стремление к бесконечности t отвечает одновременному стремлению к нулю Π_1 и Π_2. При этом в данной задаче имеет место особый случай 2°: при $\Pi_1, \Pi_2 \to 0$ функции F_p, F_ρ, F_u имеют главные члены асимптотических представлений вида (4.6)

$$F_p = \Pi_1^{2(1-\alpha)} g_p\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_1^{1-\alpha}}\right), \qquad F_\rho = g_\rho\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_1^{1-\alpha}}\right), \qquad F_u = \Pi_1^{1-\alpha} g_u\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_1^{1-\alpha}}\right) \tag{4.8}$$

где α — некоторое положительное число. Поскольку Π_1 и Π_2 можно стремить к нулю, стремя U к бесконечности, а τ к нулю при постоянных x и t, асимптотическая форма решения (4.8) получается и при таком предельном переходе, однако чтобы давление и скорость оставались конечными необходимо, как показывают соотношения (4.8), осуществлять этот предельный переход так, чтобы оставалось конечным произведение $U_0\tau^{1-\alpha}$.

Получающаяся предельная форма решения и была найдена Я. Б. Зельдовичем и Вайцзеккером [1]; параметр α, явно фигурирующий в формулировке этой задачи, остался в виде своеобразного следа нерегулярности предельного перехода.

Для автомодельных решений второго рода характерно наличие некоторой константы A, входящей в автомодельные переменные. Размерность этой константы определяется параметром α, который находится из условия существования автомодельного решения в целом. Однако величина этой константы, соответствующая асимптотике данного неавтомодельного решения, вообще говоря, не может быть определена из интегральных законов сохранения. Ее можно найти прослеживанием (например, при помощи численных расчетов) всего процесса эволюции неавтомодельного решения к автомодельной асимптотике.

(Если константу A можно найти из интегральных законов сохранения, то это означает, что при надлежащем выборе определяющих параметров задачу можно переформулировать и привести к задаче первого рода. Например, решения задачи о сильном взрыве и задачи о тепловом источнике можно получить как автомодельные решения второго рода, если «неудачно» выбрать определяющие параметры доавтомодельной постановки задачи. Возможность их получения как автомодельных решений первого рода связана с выбором в качестве определяющих параметров соответственно энергии E и суммарного тепла Q, которые в силу соответствующих интегральных законов сохранения не меняются во времени.)

В заключение авторы благодарят В. М. Ентова за внимание к работе.

Поступила 30 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Изд. 2. М., «Наука», 1966.
2. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики. Усп. матем. н., 1963, т. 18, № 2.
3. Седов Л. И. Методы подобия в размерности в механике. Изд. 4. М., Гостехиздат, 1957.
4. Баренблатт Г. И., Крылов А. П. Об упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2.
5. Каменомостская С. Л. Об одной задаче теории фильтрации. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 1.
6. Hadbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, Washington, 1964.