

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий
(Пермь)

В теории гидродинамической устойчивости существует известное преобразование Сквайра [1,2], позволяющее свести задачу об устойчивости плоскопараллельного изотермического течения относительно пространственных возмущений к соответствующей задаче для плоских возмущений.

Полученные Сквайром формулы преобразования числа Рейнольдса и волнового числа позволяют получить всю информацию об устойчивости из решения двумерной краевой задачи Орра — Зоммерфельда. При этом оказывается, что плоские возмущения более опасны: им соответствуют меньшие (по сравнению с пространственными возмущениями) критические числа Рейнольдса.

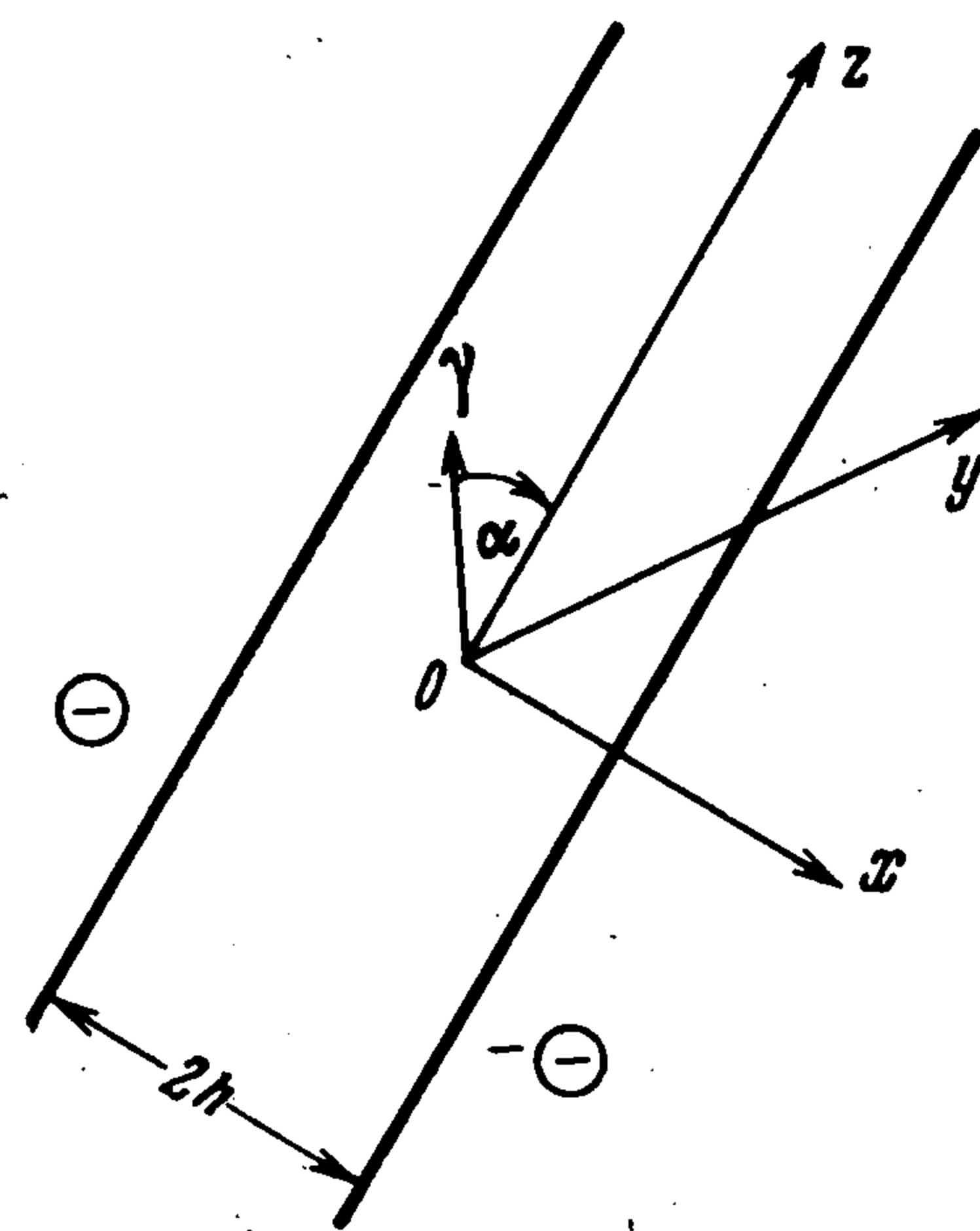
Ситуация осложняется в случае плоскопараллельного неизотермического течения. В работе [3] рассмотрена устойчивость плоского течения Пуазейля между горизонтальными параллельными плоскостями, нагретыми до разной температуры. В этом случае также существует преобразование, аналогичное преобразованию Сквайра. При этом, однако, в отличие от изотермического случая оказывается, что при определенных значениях параметров относительно более опасны пространственные возмущения.

Ниже рассматривается устойчивость относительно пространственных возмущений свободных стационарных конвективных движений (возникающих вследствие неоднородности температуры) между параллельными бесконечными плоскостями, нагретыми до разной температуры и произвольно ориентированными в поле тяжести (фиг. 1).

Получены преобразования числа Грассхофа, волнового числа и угла наклона слоя к вертикали, сводящие задачу об устойчивости относительно пространственных нормальных возмущений к эквивалентной задаче о плоских возмущениях.

При помощи этих преобразований и результатов исследования устойчивости относительно плоских возмущений [4] получены диаграммы устойчивости конвективного течения относительно трехмерных возмущений.

Из полученных результатов следует, что в случае вертикальной ориентации слоя, а также при наклонной ориентации, когда верхняя плоскость имеет более высокую температуру, более опасны плоские возмущения. В случае же наклонной ориентации, когда более высокую температуру имеет нижняя плоскость, действуют два механизма неустойчивости — гидродинамическая неустойчивость встречных конвективных потоков и конвективная (релеевская) неустойчивость подогреваемой снизу жидкости. Ответ на вопрос о том, какие из возмущений — плоские или пространственные — будут в этом случае более опасными, существенно определяется значениями двух параметров: угла наклона слоя и числа Прандтля.



Фиг. 1

1. Рассмотрим слой жидкости, ограниченный параллельными бесконечными плоскостями $x = \pm h$, которые поддерживаются при постоянных температурах $\mp \Theta$ (см. фиг. 1, где указано расположение осей координат). При таких условиях в жидкости возникает замкнутое стационарное плоскопараллельное течение с кубическим профилем скорости и линейным распределением температуры

$$v_0 = 1/6 (x^3 - x) \cos \alpha = f(x) \cos \alpha, \quad T_0 = -x \quad (1.1)$$

Здесь и далее используются безразмерные величины; единицы измерения указаны в [4].

Уравнения малых возмущений (v, T, p) основного движения имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + G [(v \nabla) v_0 + (v_0 \nabla) v] = -\nabla p + \Delta v + T \gamma \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + G [v \nabla T_0 + v_0 \nabla T] = \frac{1}{P} \Delta T, \quad \operatorname{div} v = 0 \quad (1.3)$$

$$\left(G = \frac{g \beta \Theta h^3}{\nu^2}, \quad P = \frac{\nu}{\chi} \right)$$

Здесь γ — единичный вектор, направленный вертикально вверх, а G и P — числа Грассхофа и Прандтля.

Возмущения скорости и температуры обращаются в нуль на границах слоя

$$v = 0, \quad T = 0 \quad (x = \pm 1) \quad (1.4)$$

Введем нормальные пространственные возмущения v_x, v_y, v_z, T, p , зависящие от времени и от координат y и z по закону $\exp[-\lambda t + i(k_y y + k_z z)]$, где λ — декремент, а k_y и k_z — волновые числа, характеризующие периодизм возмущения вдоль осей y и z . Из (1.2) — (1.4) следуют амплитудные уравнения (штрих означает дифференцирование по поперечной координате x)

$$-\lambda v_x + ik_z G \cos \alpha f v_x = -p' + (v_x'' - k^2 v_x) - \sin \alpha T \quad (1.5)$$

$$-\lambda v_y + ik_z G \cos \alpha f v_y = -ik_y p + (v_y'' - k^2 v_y) \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} -\lambda v_z + ik_z G \cos \alpha f v_z + G \cos \alpha f' v_x = \\ = -ik_z p + (v_z'' - k^2 v_z) + \cos \alpha T \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$-\lambda T + ik_z G \cos \alpha f T + G T_0' v_x = P^{-1} (T'' - k^2 T) \quad (1.8)$$

$$v_x' + i(k_y v_y + k_z v_z) = 0 \quad (k^2 = k_y^2 + k_z^2) \quad (1.9)$$

и граничные условия

$$v_x = v_y = v_z = T = 0 \quad (x = \pm 1) \quad (1.10)$$

Сформулируем теперь краевую задачу для амплитуд плоских нормальных возмущений. Эти возмущения имеют вид

$$(v_{1x}, v_{1z}, T_1, p_1) \sim \exp(-\lambda_1 t + ik_1 z)$$

(далее все неизвестные функции и параметры, относящиеся к задаче о плоских возмущениях, будут отмечаться индексом 1).

Амплитудные уравнения для плоских возмущений могут быть получены из (1.5) — (1.9) при $v_y = 0$ и $k_y = 0$

$$-\lambda_1 v_{1x} + ik_1 G_1 \cos \alpha_1 f v_{1x} = -p_1' + (v_1'' - k_1^2 v_{1x}) - \sin \alpha_1 T_1 \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_1 v_{1z} + ik_1 G_1 \cos \alpha_1 f v_{1z} + G_1 \cos \alpha_1 f' v_{1x} = \\ = -ik_1 p_1 + (v_{1z}'' - k_1^2 v_{1z}) + \cos \alpha_1 T_1 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$-\lambda_1 T_1 + ik_1 G_1 \cos \alpha_1 f T_1 + G_1 T_0' v_{1x} = P_1^{-1} (T_1'' - k_1^2 T_1) \quad (1.13)$$

$$v_{1x}' + ik_1 v_{1z} = 0 \quad (1.14)$$

Граничные условия для плоских возмущений

$$v_{1x} = v_{1z} = T_1 = 0 \quad (x = \pm 1) \quad (1.15)$$

Покажем теперь, что существуют преобразования, сводящие пространственную задачу (1.5) — (1.10) к плоской задаче (1.11) — (1.15).

Уравнение непрерывности (1.9) принимает вид (1.14), если положить

$$v_x = v_{1x}, \quad k_y v_y + k_z v_z = k_1 v_{1z} \quad (1.16)$$

Чтобы уравнение (1.5) перешло в (1.11), нужно к (1.16) добавить преобразования

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_1, \quad k_z G \cos \alpha = k_1 G_1 \cos \alpha_1, \quad p = p_1 \\ \sin \alpha T = \sin \alpha_1 T_1, \quad k^2 = k_y^2 + k_z^2 = k_1^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Комбинация (1.6) и (1.7) дает (1.12) при добавлении условия

$$k_z \cos \alpha T = k_1 \cos \alpha_1 T_1 \quad (1.18)$$

Наконец, при отождествлении уравнений теплопроводности (1.8) и (1.13) возникают еще два требования:

$$\sin \alpha G = \sin \alpha_1 G_1, \quad P = P_1 \quad (1.19)$$

Определенные соотношениями (1.16) — (1.19) функции v_{1x} , v_{1z} , T_1 удовлетворяют граничным условиям (1.15).

Система условий (1.16) — (1.19) непротиворечива и дает преобразования, сводящие задачу о пространственных возмущениях к соответствующей задаче о плоских возмущениях¹.

В частности, число Грассхофа, волновое число и угол наклона слоя преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} G = G_1 \sqrt{\sin^2 \alpha_1 + (k_1/k_z)^2 \cos^2 \alpha_1} \\ k_1 = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} \quad k_1 \operatorname{tg} \alpha = k_z \operatorname{tg} \alpha_1 \end{aligned} \quad (1.20)$$

¹ При сведении к плоской задаче теряется ветвь спектра, соответствующая v_y -возмущениям. Легко убедиться при помощи уравнения (1.6), что, как и в случае, рассмотренном Сквайром [1], эти возмущения затухают независимо от вида основного профиля скорости.

Таким образом, критическое число G трехмерных возмущений с волновыми числами k_y и k_z для слоя, ориентированного под углом α к вертикали, можно определить при помощи формул (1.20), если известно критическое число Грассхофа G_1 для плоских возмущений с волновым числом k_1 в слое, наклоненном под углом α_1 (отличным от α).

2. Обсудим два частных случая.

Если слой жидкости расположен горизонтально ($\alpha = \pm 90^\circ$), то скорость стационарного движения обращается в нуль (см. (1.1)), и задача сводится к определению условий устойчивости равновесия горизонтального слоя жидкости, подогреваемого снизу ($\alpha = -90^\circ$) или сверху ($\alpha = 90^\circ$). В этом случае из формул (1.20) следует: $\alpha_1 = \pm 90^\circ$ и $G = G_1$.

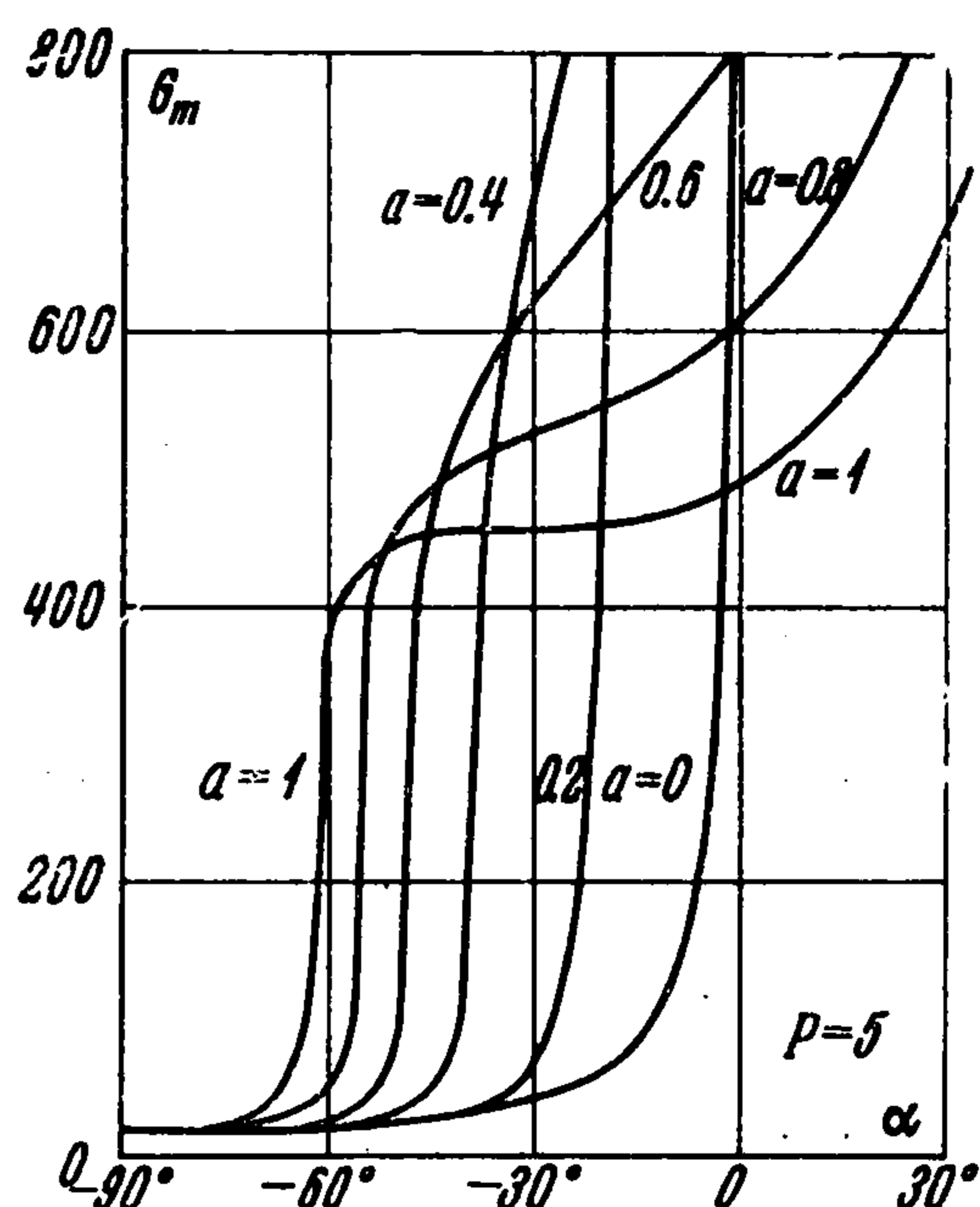
Таким образом, критические числа для пространственных и плоских возмущений совпадают (известное вырождение релеевской границы неустойчивости для конвективных «ячеек» и «валов»).

В случае вертикального слоя ($\alpha = 0$) из формул (1.20) находим

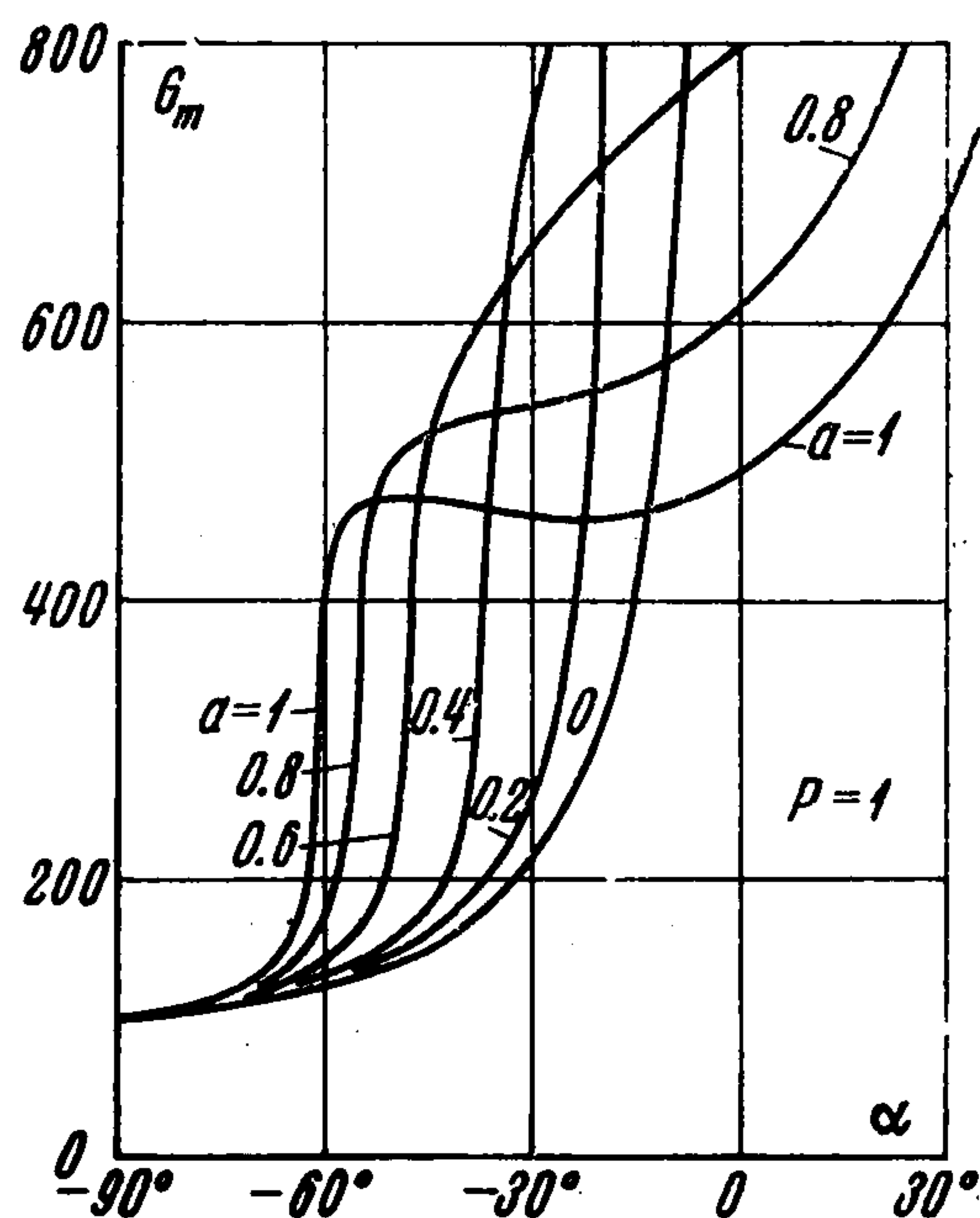
$$\alpha_1 = 0, G = G_1 k_1 / k_z \quad (2.1)$$

Так как $k_z / k_1 = k_z / (k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \leq 1$, то $G \geq G_1$, т. е., как и в случае изотермического движения, трехмерным возмущениям соответствуют более высокие критические числа Грассхофа и, следовательно, наиболее опасны плоские возмущения ($k_y = 0$).

Перейдем к случаю произвольной ориентации слоя. Решение задачи об устойчивости конвективного движения относительно плоских возмущений получено в работе [4]. В этой работе, в частности, приведены минимальные критические числа Грассхофа



Фиг. 2



Фиг. 3

G_{1m} в зависимости от угла наклона слоя α_1 и числа Прандтля. При помощи формул (1.20) можно произвести пересчет и определить критические параметры пространственных возмущений. При пересчете удобно считать фиксированным параметр $a \equiv k_z / k_1$. Этот параметр меняется в пределах $0 \leq a \leq 1$. Значение $a = 1$ соответствует плоским возмущениям ($k_y = 0$; валы с горизонтальными осями); значение $a = 0$ соответствует возмущениям, периодически зависящим от горизонтальной координаты y и не зависящим от z ($k_z = 0$; валы, оси которых параллельны скорости основного движения).

В случае пространственных возмущений зависимость $G = G(k_y, k_z)$ определяет нейтральную поверхность (аналог нейтральной кривой $G_1(k_1)$ для плоских возмущений). Фиксированному значению параметра a соответствует сечение этой поверхности плоскостью, проходящей через ось G ; в этом сечении получается кривая с минимальным значением G_m , зависящим от α и a . При данных значениях α и a критические числа G и G_1 в соответствии с (1.20) отличаются (для всех волновых чисел) на один и тот же мно-

житель $(\sin^2\alpha_1 + a^{-2} \cos^2\alpha_1)^{1/2}$. Поэтому преобразование (1.20) переводит минимальную точку нейтральной кривой плоской задачи G_{1m} в минимальную же точку G_m сечения нейтральной поверхности.

Результаты расчетов минимальных критических чисел G_m пространственных возмущений с различными значениями параметра a представлены на фиг. 2—4. Эти расчеты проведены для трех значений числа Прандтля при помощи формул (1.20) с использованием зависимости $G_1(k_1)$ по данным работы [4].

Фиг. 2, 3 относятся к значениям числа Прандтля $P = 5$ и $P = 1$. Как видно из графиков $G_m(\alpha)$, при $\alpha \geq 0$ (вертикальная ориентация слоя, либо наклонная ориентация при условии, что верхняя плоскость имеет более высокую температуру) наиболее опасны плоские возмущения ($a = 1$). Если $\alpha < 0$ (наклонный слой, более высокую температуру имеет нижняя граница), то в значительной области изменения α более опасны пространственные возмущения, причем абсолютный минимум G_m достигается при $a = 0$. Этому значению a , как указывалось выше, соответствуют возмущения, периодические вдоль горизонтальной координаты y и не зависящие от z ($k_z = 0$).

Значение критического числа $G_m(\alpha)$ в этом важном предельном случае может быть найдено непосредственно из общей краевой задачи для пространственных возмущений (1.5)—(1.10). Полагая $k_z = 0$, из уравнений (1.5), (1.6), (1.8) и (1.9) получим

$$\begin{aligned} -\lambda v_x &= -p' + (v_x'' - k_y^2 v_x) - \sin \alpha T, & -\lambda v_y &= -ik_y p + (v_y'' - k_y^2 v_y) \\ v_x' + ik_y v_y &= 0, & -\lambda T + [GT_0' v_x + P^{-1}(T'' - k_y^2 T)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

с однородными граничными условиями

$$v_x = v_y = T = 0 \quad (x = \pm 1) \quad (2.3)$$

Эта краевая задача, как видно, не содержит профиля основного движения и совпадает с задачей Релея о возмущениях неподвижного слоя жидкости¹. Критическое число Грассхофа находится известным образом из условия $\lambda = 0$ путем минимизации $G(k_y)$ и определяется соотношением

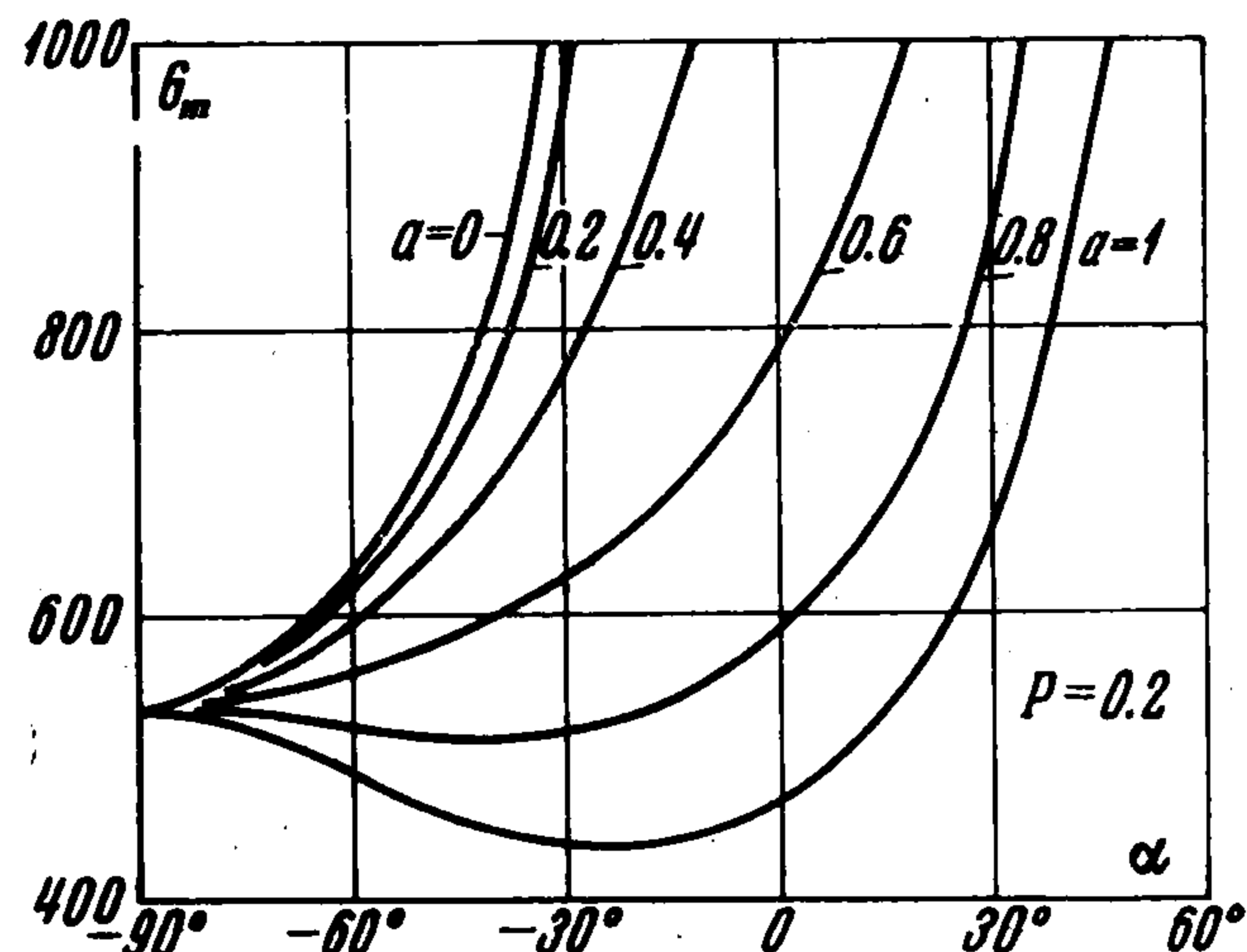
$$-G_m P \sin \alpha = 1708/16 \quad (2.4)$$

(множитель $1/16$ связан с выбором в качестве единиц расстояния и температуры полуширины слоя и полуразности температур границ). Итак, для возмущений с $k_z = 0$ имеем

$$G_m = \frac{106.7}{-P \sin \alpha} \quad (2.5)$$

Пространственные возмущения с $k_z = 0$ соответствуют абсолютному минимуму G_m в интервале углов $-90^\circ < \alpha < \alpha_*$, где значение α_* определяется пересечением кривых $G_m(\alpha)$, соответствующих параметрам $a = 0$ и $a = 1$. Это значение α^* зависит от числа Прандтля; так, для $P = 5$ и $P = 1$ имеем соответственно $\alpha_* = -2.5^\circ$ и $\alpha_* = -13^\circ$. С уменьшением числа Прандтля точка пересечения сдвигается влево, стремясь к $\alpha_* = -90^\circ$. Таким образом, при достаточно малых значениях числа Прандтля (см.

¹ Возмущения с $k_z = 0$ не являются плоскими. Составляющая скорости v_z отлична от нуля и может быть найдена из уравнения (1.7).



Фиг. 4

фиг. 4; $P = 0.2$) абсолютный минимум переходит к возмущениям с $a = 1$ (плоские возмущения) для всех углов $\alpha > -90^\circ$ (в случае $\alpha = -90^\circ$ имеется вырождение, о котором говорилось выше).

Как уже было отмечено ранее [4], кризис конвективного течения при разных углах наклона слоя вызывается физически различными механизмами неустойчивости: в области углов, близких к -90° (релеевская область), кризис обусловлен конвективной неустойчивостью жидкости, подогреваемой снизу; за пределами же релеевской области действует гидродинамический механизм неустойчивости встречных конвективных потоков.

Результаты проведенного исследования устойчивости относительно пространственных возмущений подтверждают вывод о смене механизма неустойчивости при изменении угла наклона. В самом деле, в релеевской области ответственными за неустойчивость являются пространственные возмущения с $a = 0$; кризис этих возмущений связан лишь с неустойчивой температурной стратификацией и не зависит от стационарного движения жидкости (скорость этого движения при углах, близких к -90° , мала, и само по себе это движение гидродинамически устойчиво). В случае же вертикального расположения слоя и тем более при $\alpha > 0$ единственной причиной неустойчивости может быть гидродинамическая неустойчивость встречных конвективных потоков; при этом наиболее опасны, как и в случае плоскопараллельных течений изотермической жидкости, плоские возмущения ($a = 1$).

Если число Прандтля мало (малая вязкость), то уже небольшое отклонение слоя от горизонтали ($\alpha \gtrsim -90^\circ$) приводит к достаточно интенсивному конвективному движению, и в этом случае даже при углах, близких к -90° (в релеевской области), неустойчивость имеет гидродинамическую природу и связана с развитием плоских возмущений.

Поступила 4 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. S q u i r e H. B. On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. Proc. Roy. Soc. A, 1933, vol. 142, № 847.
2. Л и н ь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
3. G a g e K. S., R e i d W. H. The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt. 1.
4. Б и р и х Р. В., Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М., Р у д а к о в Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.