

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ СРЕДЫ КОССЕРА

Л. Н. Тер-Мкртчян

(Ленинград)

Теория сред, свойства которых выводятся из вариационного принципа, названного Э. и Ф. Коссера — евклидовским действием, изложена в книге П. Апеля [1]. Аргументы подынтегральной функции в математическом выражении этого принципа всецело определяются геометрией пространства. Для евклидовского пространства в общем статическом случае в эту функцию может входить 21 независимых один от другого кинематических элементов. Некоторые современные авторы [2,3] и другие сокращают число аргументов до 14, связывая некоторые между собой дифференциальными соотношениями. В частности, рассматриваются компоненты вектора перемещения и компоненты вихря вектора перемещения. Исходя из последней предпосылки в [4] приводится основной аппарат для решения плоской задачи теории упругости, который и используется в этой работе.

§ 1. Решение плоской задачи при помощи функций напряжений Эри и Миндлина. Компоненты силовых и моментных напряжений выражаются при помощи двух функций напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \mu_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \mu_y = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь функция φ — обычная функция Эри, ψ — функция напряжения, введенная Миндлиным:

Функции напряжений должны удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям [4]:

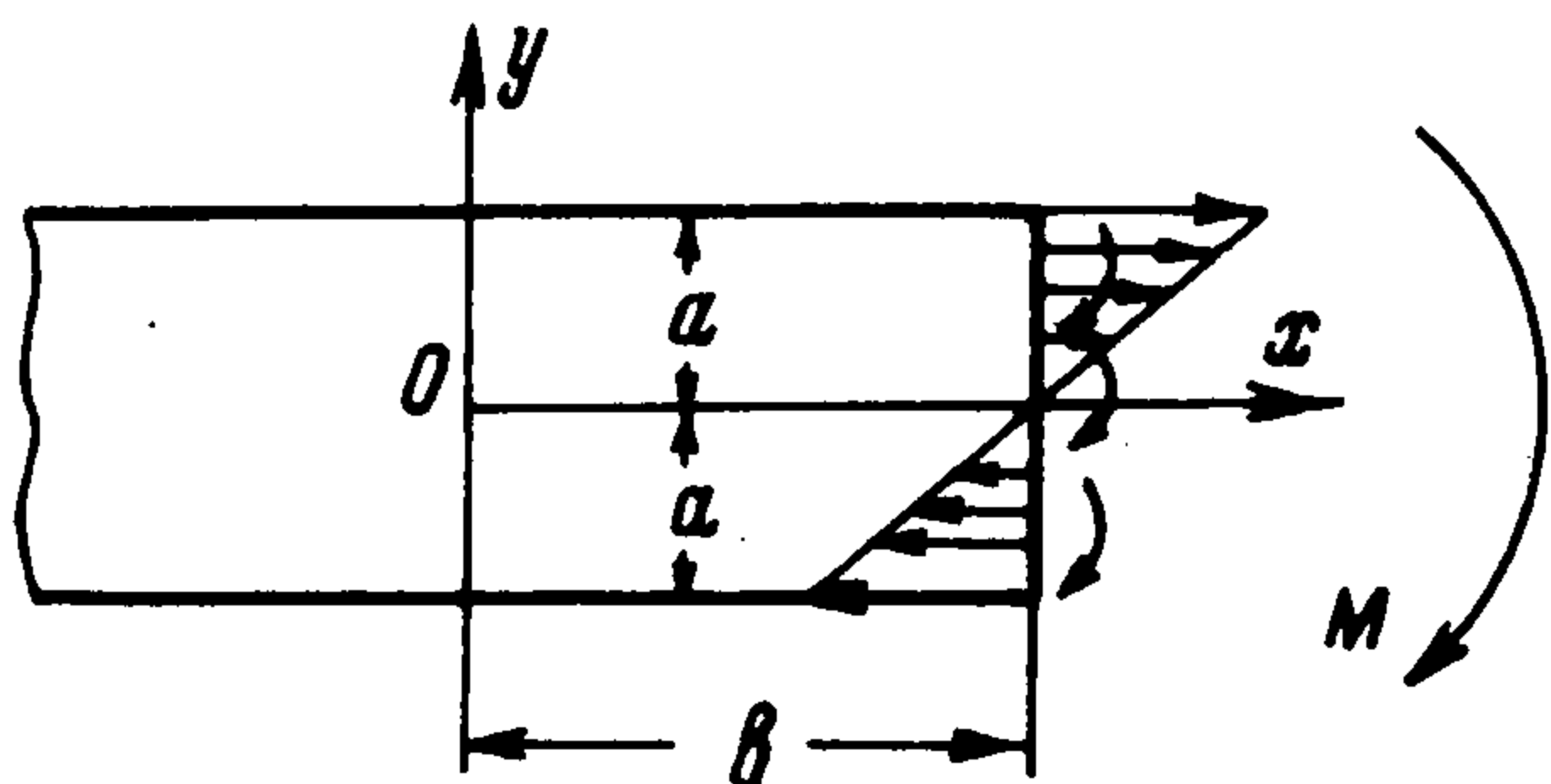
$$\nabla^4 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \psi - l^2 \nabla^4 \varphi = 0 \quad (l^2 = B / G) \quad (1.2)$$

Здесь l — специфическая для среды Коссера упругая постоянная, имеющая размерность длины, G — модуль упругости при сдвиге, B — модуль, связывающий кривизну с компонентами моментных напряжений формулами

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{4B} \mu_x, \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{4B} \mu_y \quad (1.3)$$

Рассмотрим прямоугольную область, представленную на фигуре. Будем искать однородные решения для этой области, у которой границы $y = \pm a$ свободны как от силовых, так и от моментных напряжений. Таких решений может быть два:

- 1) однородные решения с силовой симметрией относительно оси x ;



2) однородные решения с кососимметричными относительно оси x силовыми факторами.

Ниже приводятся однородные решения второго типа.

§ 2. Однородные решения для прямоугольной области, две параллельные границы которой свободны от силовых и моментных напряжений. Искомое решение второго типа (косая симметрия относительно оси x) может быть построено при помощи функций напряжений

$$\varphi = \operatorname{ch} \alpha x (C_1 \sin \alpha y + C_2 y \cos \alpha y) \quad (2.1)$$

$$\psi = Bl^2 \operatorname{sh} \alpha x \cos \beta y + 4(1 - \nu) l^2 \alpha C_2 \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha y$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + l^{-2} \quad (2.2)$$

Здесь C_1, C_2, B — произвольные постоянные. Из условия равенства нулю на границах $y = \pm a$ силовых и моментных напряжений получается следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{\alpha a}{\operatorname{tg} \alpha a} + \alpha a \operatorname{tg} \alpha a - 1 - 4(1 - \nu) l^2 \alpha^2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{\operatorname{tg} \alpha a}{\operatorname{tg} \beta a} - 1 \right) = 0 \quad (2.3)$$

Это трансцендентное уравнение будет иметь бесчисленное множество корней. Компоненты силовых и моментных напряжений будут выражаться формулами

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_i C_i \operatorname{ch} \alpha_i x \left[\left(\frac{\alpha_i^2 a}{\operatorname{tg} \alpha_i a} - 2\alpha_i \right) \sin \alpha_i y - \alpha_i^2 y \cos \alpha_i y - \right. \\ &\quad \left. - 4(1 - \nu) \alpha_i^3 l^2 \left(\frac{\sin \alpha_i a}{\sin \beta_i a} \sin \beta_i y - \sin \alpha_i y \right) \right] \\ \sigma_y &= \sum_i C_i \operatorname{ch} \alpha_i x \left[-\frac{\alpha_i^2 a}{\operatorname{tg} \alpha_i a} \sin \alpha_i y + \alpha_i^2 y \cos \alpha_i y + \right. \\ &\quad \left. + 4(1 - \nu) \alpha_i^3 l^2 \left(\frac{\sin \alpha_i a}{\sin \beta_i a} \sin \beta_i y - \sin \alpha_i y \right) \right] \\ \tau_{xy} &= \sum_i C_i \operatorname{sh} \alpha_i x \left[\left(\frac{\alpha_i^2 a}{\operatorname{tg} \alpha_i a} - \alpha_i \right) \cos \alpha_i y + \alpha_i^2 y \sin \alpha_i y - \right. \\ &\quad \left. - 4(1 - \nu) l^2 \alpha_i^2 \left(\beta_i \frac{\sin \alpha_i a}{\sin \beta_i a} \cos \beta_i y - \alpha_i \cos \alpha_i y \right) \right] \\ \tau_{yx} &= \sum_i C_i \operatorname{sh} \alpha_i x \left[\left(\frac{\alpha_i^2 a}{\operatorname{tg} \alpha_i a} - \alpha_i \right) \cos \alpha_i y + \alpha_i^2 y \sin \alpha_i y - \right. \\ &\quad \left. - 4(1 - \nu) l^2 \alpha_i^3 \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} \frac{\sin \alpha_i a}{\sin \beta_i a} \cos \beta_i y - \cos \alpha_i y \right) \right] \\ \mu_x &= 4(1 - \nu) l^2 \sum_i C_i \alpha_i^2 \operatorname{ch} \alpha_i x \left(-\frac{\alpha_i}{\beta_i} \frac{\sin \alpha_i a}{\sin \beta_i a} \cos \beta_i y + \cos \alpha_i y \right) \\ \mu_y &= 4(1 - \nu) l^2 \sum_i C_i \alpha_i^2 \operatorname{sh} \alpha_i x \left(\frac{\sin \alpha_i a}{\sin \beta_i a} \sin \beta_i y - \sin \alpha_i y \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Корни трансцендентного уравнения (2.3) зависят от упругой постоянной l , специфической для среды Коссера, входящей в выражение α , и от коэффициента Пуассона ν . При $l \rightarrow \infty$ имеет место наивысшее влияние мо-

ментных напряжений; при этом в пределе $\beta = \alpha$; трансцендентное уравнение (2.3) вырождается и приобретает вид

$$\frac{2\alpha a}{\sin 2\alpha a} = -\frac{3-2\nu}{1-2\nu} \left(\frac{2\alpha a}{\sin 2\alpha a} = -6 \text{ при } \nu = 0.3 \right) \quad (2.5)$$

Другой крайний случай, когда $l = 0$, приводит к трансцендентному уравнению для безмоментной, симметричной (классической) теории упругости [5], а именно

$$\frac{2\alpha a}{\sin 2\alpha a} = 1 \quad (2.6)$$

Это уравнение имеет только комплексные корни (не считая нулевого). Трансцендентное уравнение (2.5) при $\nu = 0,3$ имеет первые два корня вещественные, а все остальные комплексные; приводим первые 12 корней.

$$2\alpha_k a = 2r_k + 2t_k i = x + iy$$

1	2	3	4
$x = 3.835$	5.226	10.863197	17.172427
$y = 0$	0	-1.2104398	-1.7187154
5	6	7	8
$x = 23.472110$	29.766839	36.058627	42.348509
$y = -2.0446282$	-2.2875990	-2.4820034	-2.6442697
9	10	11	12
$x = 48.637078$	54.924699	61.211611	67.497976
$y = -2.7836203$	-2.9057768	-3.0145427	-3.1125788

Трансцендентное уравнение (2.3) будет иметь комплексные корни и, таким образом, решение, даваемое формулами (2.4), будет комплексной формой решения. Переход к вещественной форме совершается, если принять во внимание, что сопряженные корням комплексные величины также удовлетворяют соответствующему трансцендентному уравнению.

Комбинируя два варианта выражений (2.4) для системы комплексно сопряженных корней и вводя комплексно сопряженные произвольные постоянные, получим искомое решение в вещественной форме. Каждому комплексному корню будут соответствовать, таким образом, две произвольные вещественные постоянные.

§. 3. Представление решения в вещественной форме; краевая задача для двух нагруженных границ прямоугольной области. Представим решение в вещественной форме, соответствующее трансцендентному уравнению (2.5). Функции напряжения для этого случая будут

$$\varphi = 2a \sum_k [a_k R_k(x, y) - b_k S_k(x, y)] \quad (3.1)$$

$$\psi = -4(1-\nu)a \sum_k [a_k P_k(x, y) - b_k Q_k(x, y)]$$

Здесь a_k, b_k — вещественные произвольные постоянные, соответствующие k -му корню трансцендентного уравнения (2.5), а $R_k(x, y), S_k(x, y), P_k(x, y), Q_k(x, y)$ — вещественные функции указанных аргументов, соот-

ветствующие тому же k -му корню. Приводим выражения для этих функций

$$\begin{aligned}
 R_k(x, y) &= -A_k(Y_1X_1 - Y_2X_2) - B_k(Y_1X_2 + Y_2X_1) + \\
 &\quad + (y/a)Y_3X_1 + (y/a)Y_4X_2 \\
 S_k(x, y) &= B_k(Y_1X_1 - Y_2X_2) - A_k(Y_1X_2 + Y_2X_1) + \\
 &\quad + (y/a)Y_3X_2 - (y/a)Y_4X_1 \\
 P_k(x, y) &= (A_k + C_k)(Y_3X_3 + Y_4X_4) + (B_k + D_k)(Y_3X_4 - Y_4X_3) - \\
 &\quad - (y/a)Y_1X_3 - (y/a)Y_2X_4 \quad (3.2) \\
 Q_k(x, y) &= (A_k + C_k)(Y_3X_4 - Y_4X_3) - (B_k + D_k)(Y_4X_4 + Y_3X_3) + \\
 &\quad + (y/a)Y_1X_4 + (y/a)Y_2X_3
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 A_k &= \frac{\sin 2r_k}{2(\sin^2 r_k \operatorname{ch}^2 t_k + \cos^2 r_k \operatorname{sh}^2 t_k)}, & C_k &= \frac{r_k}{r_k^2 + t_k^2} \quad (3.3) \\
 B_k &= \frac{\operatorname{sh} 2t_k}{2(\sin^2 r_k \operatorname{ch}^2 t_k + \cos^2 r_k \operatorname{sh}^2 t_k)}, & D_k &= \frac{t_k}{r_k^2 + t_k^2} \\
 X_1 &= \operatorname{ch} \frac{r_k x}{a} \cos \frac{t_k x}{a}, & X_2 &= \operatorname{sh} \frac{r_k x}{a} \sin \frac{t_k x}{a}, & X_3 &= \operatorname{sh} \frac{r_k x}{a} \cos \frac{t_k x}{a} \\
 X_4 &= \operatorname{ch} \frac{r_k x}{a} \sin \frac{t_k x}{a}, & Y_1 &= \sin \frac{r_k y}{a} \operatorname{ch} \frac{t_k y}{a}, & Y_2 &= \cos \frac{r_k y}{a} \operatorname{sh} \frac{t_k y}{a} \\
 Y_3 &= \cos \frac{r_k y}{a} \operatorname{ch} \frac{t_k y}{a}, & Y_4 &= \sin \frac{r_k y}{a} \operatorname{sh} \frac{t_k y}{a}
 \end{aligned}$$

Компоненты силовых и моментных напряжений будут выражаться ниже следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2a \sum_k \left(a_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial y^2} - b_k \frac{\partial^2 S_k}{\partial y^2} \right) + 4(1 - \nu) a \sum_k \left(a_k \frac{\partial^2 P_k}{\partial x \partial y} - b_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial x \partial y} \right) \\
 \sigma_y &= 2a \sum_k \left(a_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x^2} - b_k \frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2} \right) - 4(1 - \nu) a \sum_k \left(a_k \frac{\partial^2 P_k}{\partial x \partial y} - b_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial x \partial y} \right) \\
 \tau_{xy} &= -2a \sum_k \left(a_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x \partial y} - b_k \frac{\partial^2 S_k}{\partial x \partial y} \right) + 4(1 - \nu) a \sum_k \left(a_k \frac{\partial^2 P_k}{\partial y^2} - b_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial y^2} \right) \\
 \tau_{yx} &= -2a \sum_k \left(a_k \frac{\partial^2 R_k}{\partial x \partial y} - b_k \frac{\partial^2 S_k}{\partial x \partial y} \right) - 4(1 - \nu) a \sum_k \left(a_k \frac{\partial^2 P_k}{\partial x^2} - b_k \frac{\partial^2 Q_k}{\partial x^2} \right) \\
 \mu_x &= -4(1 - \nu) a \sum_k \left(a_k \frac{\partial P_k}{\partial x} - b_k \frac{\partial Q_k}{\partial x} \right) \\
 \mu_y &= -4(1 - \nu) a \sum_k \left(a_k \frac{\partial P_k}{\partial y} - b_k \frac{\partial Q_k}{\partial y} \right) \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Произвольные постоянные a_k и b_k определяются из граничных условий: при $x = b$ (силовая симметрия относительно оси y)

$$\sigma_x = \sigma_x^*(y), \tau_{xy} = \tau_{xy}^*(y), \mu_x = \mu_x^*(y);$$

причем эти заданные функции от y должны удовлетворять кривой симметрии относительно оси x .

Элементарно простое решение получается для случая чистого изгиба при плоской деформации и при обобщенном плоском напряженном состоянии. Эти случаи также относятся к однородным решениям, поскольку остаются свободными две параллельные границы области. В случае плоской деформации для чистого изгиба решение получается при помощи следующих двух функций напряжений:

$$\varphi = \frac{D}{6}y^3, \quad \psi = -2(1-\nu)l^2Dx \quad (3.5)$$

Компоненты силовых и моментных напряжений при этом будут

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Dy, & \sigma_y &= 0, & \tau_{yx} &= 0, & \tau_{xy} &= 0 \\ \mu_y &= 0, & \mu_x &= -2(1-\nu)l^2D \end{aligned} \quad (3.6)$$

Моментные напряжения равномерно распределены по высоте (оси y). Постоянная D определится из приравнивания момента, создаваемого силовыми и моментными напряжениями величине изгибающего момент M

$$M = \int_{-a}^{+a} \sigma_x y dy - \int_{-a}^{+a} \mu_x dy = D \frac{2}{3} a^3 \left[1 + 6(1-\nu) \frac{l^2}{a^2} \right] \quad (3.7)$$

Отсюда

$$D = \frac{M}{\frac{2}{3}a^3 \left[1 + 6(1-\nu) \frac{l^2}{a^2} \right]} \quad (3.8)$$

Путем интегрирования, определяя перемещение, получим уравнение упругой линии в следующем виде:

$$v|_{y=0} = - \frac{M(1-\nu^2)}{2EJ_z \left(1 + \frac{L^2}{a^2} \right)} x^2, \quad L^2 = 6(1-\nu)l^2 \quad (3.9)$$

Формула (3.9) показывает, что при наличии моментных напряжений изгибная жесткость должна быть в $(1 + L^2/a^2)$ больше обычной жесткости для классической среды.

Опыты, сделанные аспирантом кафедры строительной механики Ленинградской лесотехнической академии А. И. Ладаткиным, для стальных полос, практически никакого увеличения изгибной жесткости не обнаружили. Таким образом, для стали упругая характеристика материала l , специфическая для среды Коссера, очень мала, и моментные напряжения практически обнаружить не удастся. Этот результат находится в полном соответствии с указанием, имеющимся в [6] со ссылкой на [7], что для технических металлов упругая постоянная среды Коссера порядка $l \approx 0,1$ мм.

Изложенное выше показывает, что однородные решения могут быть построены для прямоугольной области среды Коссера. Эти однородные решения могут быть полезны при рассмотрении краевых задач для прямоугольной области, нагруженной на границах распределенными силами и моментами.

Поступила 18 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. А п п е л ь П. Руководство теоретической (рациональной) механики. М., 1911.
2. T o u r i n R. Elastic materials with couple-stresses. Arch. Rational Mech. and Analysis, 1962, vol. 11, № 5, pp. 385—414.
3. M i n d l i n R. D. T i e r s t e n H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rational Mech. and Analysis, 1962, vol. 11, № 5, pp. 415—448.
4. M i n d l i n R. D. Influence of couple-stresses on stress concentrations. Experimental Mech., 1963, vol. 3, № 1, pp. 1—7.
5. П а п к о в и ч П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 4.
6. S c h a e f e r H. Das Cosserat-Kontinuum. ZAMM, 1967, Bd 47, H. 8.
7. S c h i j v e J. Note on couple stresses. J. Mech. and Phys. Solids, 1966, vol. 14, pp. 113—120.