Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ДУАЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ В ЗАДАЧАХ О ЩЕЛЯХ И ШТАМПАХ

Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон

(Москва)

При помощи метода, предложенного Трантером [1], авторами получено решение для одного класса дуальных тригонометрических рядов, к которым сводятся как некоторые статические, так и динамические задачи о щелях и штампах. В качестве примера рассмотрена задача об установившихся колебаниях неограниченной плоскости с периодической системой разрезов вдоль действительной оси. Полученное решение позволяет установить чисто инерционный эффект уменьшения разрушающей нагрузки.

1. Рассмотрим дуальные тригонометрические ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} nB_n^* \cos n\xi = f(\xi) \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \cos n\xi = 0 \qquad (\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \pi) \tag{1.1}$$

Следуя Трантеру [1], представим коэффициенты B_n^* в форме

$$B_n^* = \frac{2}{\pi} \int_0^{\xi_0} V(\xi) \cos n\xi d\xi \tag{1.2}$$

$$V(\xi) = \cos {}^1/_2\, \xi \int_x^1 \frac{\chi(s)\, ds}{(s^2 - \sin^2 0.5\xi \csc 0.5\xi_0)^{1/2}}, \quad x = \sin {}^1/_2\, \xi \csc {}^1/_2\, \xi_0 \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.2) и меняя порядок интегрирования, получим

$$B_n^* = 2 \sin {}^1/_2\, \xi_0 \int_0^1 F(n, -n; 1; s^2 \sin^2 0.5\, \xi_0)\, \chi(s)\, ds \tag{1.4}$$

Здесь $F(n, -n; 1; s^2 \sin^2 0.5\xi_0)$ — гипергеометрическая функция.

Интегрируем первое из уравнений (1.1) в пределах от 0 до ξ, а полученный результат умножаем на $\sin {}^1/_2\xi$ и снова интегрируем в тех же пределах, что дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \left[\frac{\sin {}^1/_2 (2n-1)\xi}{2n-1} - \frac{\sin {}^1/_2 (2n+1)\xi}{2n+1}\right] = I_c(\rho) \tag{1.5}$$

Здесь

$${}^1/_2\xi = \arcsin(\rho \sin {}^1/_2\, \xi_0), \qquad I_c(\rho) = \int_0^{\xi} G(\xi) \sin {}^1/_2\, \xi d\xi, \qquad G(\xi) = \int_0^{\xi} f(\xi)\, d\xi$$

Заменяя выражения в квадратных скобках в (1.5) соответствующим гипергеометрическим рядом [2] и подставляя (1.4) в (1.5), получаем уравнение для определения функции $\chi(s)$

$$\int_0^1 \chi(s) \sum_c (s, \rho, \xi_0)\, ds = \frac{3I_c(\rho)}{8\rho^3 \sin^4 0.5\xi_0} \qquad (0<\rho<1) \tag{1.6}$$

Здесь

$$S_1 = \sum_c (s, \rho, \xi_0) = \tag{1.7}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nF(n, -n; 1; s^2 \sin^2 0.5\xi_0)\, F(1+n, 1-n; {}^5/_2; \rho^2 \sin^2 0.5\xi_0)$$

Этот ряд можно просуммировать [1]

$$S_1 = 0 \quad (\rho<s), \qquad S_1 = \frac{3(\rho^2 - s^2)^{1/2}}{4\rho^3 \sin^2 0.5\xi_0} \quad (\rho>s) \tag{1.8}$$

Подставив (1.8) в (1.6), получим

$$\int_0^s \chi(s)(\rho^2 - s^2)^{1/2}\, ds = \frac{1}{2\sin^2 0.5\xi_0} I_c(\rho) \tag{1.9}$$

Легко показать, что решение (1.9) имеет вид

$$\chi(s) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2\sin^2 0.5\xi_0} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{I_c'(\rho)\, d\rho}{(s^2-\rho^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{\rho G(\xi)\, d\rho}{\sqrt{(s^2-\rho^2)(1-\rho^2\sin^2 0.5\xi_0)}} \tag{1.10}$$

что вместе с соотношениями (1.2), (1.3) дает окончательное решение.

Для приложений полезно найти асимптотическое выражение для ряда при $\xi \to \xi_0 + 0$. Дважды дифференцируя по ξ равенство (1.8) и учитывая выражение [2]

$$\frac{\sin {}^1/_2 (2n-1)\xi}{2n-1} - \frac{\sin {}^1/_2 (2n+1)\xi}{2n+1} = \frac{4}{3} \sin^3 0.5\xi nF(1+n, 1-n; {}^5/_2; \sin^2 0.5\xi)$$

найдем

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} nF(n, -n; 1; s^2 \sin^2 0.5\xi_0) \cos n\xi = 0, \quad \sin {}^1/_2\xi < s \sin {}^1/_2\xi_0$$

$$S_2 = -\frac{\sin {}^1/_2 \xi\, (1 - s^2 \sin^2 0.5\xi_0)}{4(\sin^2 0.5\xi - s^2 \sin^2 0.5\xi_0)^{3/2}}, \quad \sin {}^1/_2\xi > s \sin {}^1/_2\xi_0 \tag{1.11}$$

Соотношение (1.11) умножим на $2\sin {}^1/_2\, \xi_0\, \chi(s)$ и проинтегрируем по s от нуля до единицы. Тогда, принимая во внимание (1.1) и (1.4), получим

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n^* \cos n\xi = f(\xi) \qquad (\xi < \xi_0)$$

$$S_3 = -{}^1/_2 \sin {}^1/_2\xi_0 \sin {}^1/_2\xi \int_0^1 \frac{(1 - s^2\sin^2 0.5\xi_0)\chi(s)\, ds}{(\sin^2 0.5\xi - s^2 \sin^2 0.5\xi_0)^{3/2}} \qquad (\xi > \xi_0) \tag{1.12}$$

Выполняя интегрирование по частям, можно показать, что (1.12) имеет следующую особенность при $\xi \to \xi_0 + 0$:

$$S_3 = -{}^1/_2 \sin {}^1/_2\xi \operatorname{ctg} {}^1/_2\xi_0 \cos {}^1/_2\xi_0 \frac{\chi(1)}{(\sin^2 0.5\xi - \sin^2 0.5\xi_0)^{1/2}} + \ldots \qquad (\xi > \xi_0) \tag{1.13}$$

Здесь отброшены члены, ограниченные при $\xi \to \xi_0$.

2. Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях неограниченной плоскости с периодической системой разрезов длины $2l$ вдоль действительной оси (расстояние между центрами разрезов $2L$). К берегам разрезов приложена нормальная нагрузка $p = q\cos\omega t$.

Амплитудные значения перемещений и напряжений можно представить в следующем виде [3]:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$\sigma_x = 2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \lambda\frac{\omega^2}{c_1^2}\varphi, \quad \sigma_y = -2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - (\lambda + 2\mu)\frac{\omega^2}{c_1^2}\varphi$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - \mu\frac{\omega^2}{c_2^2}\psi \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{2.2}$$

Здесь λ, μ — константы Ламе, c_1, c_2 — скорости продольных и поперечных волн.

Функции φ и ψ есть решения уравнений

$$\nabla^2\varphi + \frac{\omega^2}{c_1^2}\varphi = 0, \quad \nabla^2\psi + \frac{\omega^2}{c_2^2}\psi = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

и могут быть представлены в виде (с учетом поведения на бесконечности симметрии напряженного состояния)

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n\Omega_1 y}\cos\alpha_n x, \quad \psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha_n\Omega_2 y}\sin\alpha_n x$$

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_1 = \frac{\omega}{\alpha_n c_1}, \quad \omega_2 = \frac{\omega}{\alpha_n c_2}, \quad \Omega_1 = \sqrt{1 - \omega_1^2}, \quad \Omega_2 = \sqrt{1 - \omega_2^2} \tag{2.4}$$

Коэффициенты A_n и B_n в разложениях (2.4) должны быть определены из следующих условий:

$$\begin{aligned} &\tau_{xy}(x, 0) = 0 \; (|x| < \infty), \qquad \sigma_y(x, 0) = -q \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \\ &v(x, 0) = 0 \qquad (l \leqslant x \leqslant L) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.5) находим

$$A_n = -B_n\frac{1 - {}^1/{}_2\,\omega_2^2}{\Omega_1}$$

$$2\mu\sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[\Omega_2 - \frac{(1 - {}^1/{}_2\,\omega_2^2)^2}{\Omega_1}\right]\alpha_n^2\cos\alpha_n x = -q \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\omega_2 B_n\cos\alpha_n x = 0 \quad (l \leqslant x \leqslant L) \tag{2.7}$$

Для определения коэффициентов B_n, удовлетворяющих дуальным тригонометрическим рядам, будем полагать

$$\omega_1^2 = \frac{\omega^2}{\alpha_n^2 c_1^2} < 1, \quad \omega_2^2 = \frac{\omega^2}{\alpha_n^2 c_2^2} < 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Таким образом, имеют место следующие разложения:

$$\Omega_1 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \omega_1^{2k}, \quad \Omega_2 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \omega_2^{2k}, \quad \Omega_2 - \frac{(1 - {}^1\!/_2\, \omega_2^2)^2}{\Omega_1} = -\sum_{k=1}^{\infty} D_k \omega_1^{2k} \tag{2.8}$$

Здесь $d_0 = 1$, $d_1 = {}^1\!/_2, \ldots$

$$D_k = d_k \left(\frac{c_1^2}{c_2^2}\right)^k + 2(k+1)\, d_{k+1} - 2kd_k \left(\frac{c_1^2}{c_2^2}\right) + \frac{1}{2}(k-1)\, d_{k-1} \left(\frac{c_1^2}{c_2^2}\right)^2$$

С учетом (2.8) соотношения (2.6), (2.7) перепишутся

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \omega_1^{2k-2} \alpha_n B_n^* \cos \alpha_n x = \frac{q}{2\mu} \frac{c_1^2}{\omega^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \cos \alpha_n x = 0 \qquad \left(B_n^* = \frac{B_n}{\alpha_n}\right) \qquad (l \leqslant x \leqslant L) \tag{2.9}$$

Будем искать коэффициенты B_n^* в виде ряда

$$B_n^* = B_{n,-1}^* \left(\frac{c_1^2}{\omega^2}\right) + B_{n,0}^* + B_{n,1}^* \left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\right) + B_{n,2}^* \left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)^2 + \ldots \tag{2.10}$$

Подставим (2.10) в (2.9) и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ω^2/c_1^2, получим следующую последовательность дуальных тригонометрических рядов для нахождения $B_{n,-1}^*, B_{n,0}^*, B_{n,1}^*, \ldots$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n B_{n,-1}^* \cos n\xi = \frac{L}{\pi} \frac{q}{2\mu D_1} \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{n,-1}^* \cos n\xi = 0 \qquad (\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \pi) \tag{2.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n B_{n,0}^* \cos n\xi = -\frac{D_2}{D_1} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n,-1}^*}{n} \cos n\xi \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{n,0}^* \cos n\xi = 0 \qquad (\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \pi) \tag{2.12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n B_{n,1}^* \cos n\xi = -\frac{D_2}{D_1} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n,0}^*}{n} \cos n\xi - $$

$$- \frac{D_3}{D_1} \left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n,-1}^*}{n^3} \cos n\xi \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{n,1}^* \cos n\xi = 0 \qquad (\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \pi) \tag{2.13}$$

$$(\xi = \pi x / L, \ \xi_0 = \pi l / L)$$

В дальнейшем (как показывают расчеты) достаточно ограничиться тремя членами разложения (2.10), с учетом чего нормальные напряжения на продолжении разреза определятся следующим соотношением:

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_y(x,0) = -D_1\left(\frac{\pi}{L}\right)\sum_{n=1}^{\infty} nB_{n,-1}^*\cos n\xi - \left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{L}{\pi}D_2\frac{B_{n,-1}^*}{n} + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{L}D_1B_{n,0}^*n\right]\cos n\xi - \left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left[D_3\left(\frac{L}{\pi}\right)^3\frac{B_{n,-1}^*}{n^3} + \right. \tag{2.14}$$
$$\left. + D_2\left(\frac{L}{\pi}\right)\frac{B_{n,0}^*}{n} + D_1\left(\frac{\pi}{L}\right)B_{n,1}^*n\right]\cos n\xi$$
$$(\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \pi)$$

Учитывая, что ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n,j}^*}{n^k}\cos n\xi \qquad (k = 1, 3, 5, \ldots)$$

будут непрерывными функциями при $\xi = \xi_0$, получаем с учетом (1.13) и (2.14) из условия предельного равновесия [4] [1]

$$K_c = \lim_{x\to l}\sqrt{2\pi(x-l)}\,\sigma_y(x,0) = \mu D_1\cos{}^1/_2\,\xi_0\left(\frac{L}{\pi}\operatorname{tg}{}^1/_2\,\xi_0\right)^{-1/2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)^j\chi_{j-1}(1) \tag{2.15}$$

Здесь K_c — вязкость разрушения. Последовательно определяя $\chi_{j-1}(1)$ $(j = 0, 1, 2)$ из (1.10) и (2.11—2.13), получаем

$$\chi_{-1}(1) = \left(\frac{L}{\pi}\right)\frac{q}{\mu D_1}\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2\,\xi_0}{\cos{}^1/_2\,\xi_0} \tag{2.16}$$

$$\chi_0(1) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3\frac{q}{\mu D_1}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)[N_{-1}^1(\xi_0) + M_0(1,\xi_0)]\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2\,\xi_0}{\cos{}^1/_2\,\xi_0}$$

$$\chi_1(1) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^5\frac{q}{\mu D_1}\left\{\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2[N_0^1(\xi_0) + M_1(1,\xi_0)] + \right.$$
$$\left. + \frac{D_3}{D_1}[N_{-1}^3(\xi_0) - N_{-1}^1(\xi_0)M_0(1,\xi_0)]\right\}\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2\,\xi_0}{\cos{}^1/_2\,\xi_0}$$

$$N_{-1}^1(\xi_0) = -4\sin^2 0.5\xi_0\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}F(n,-n;1;s^2\sin^2 0.5\xi_0)\right]\frac{sds}{1-s^2\sin^2 0.5\xi_0} =$$
$$= 4\sin^2 0.5\xi_0\int_0^1\ln(s\sin{}^1/_2\,\xi_0)\frac{sds}{1-s^2\sin^2 0.5\,\xi_0}$$

$$N_{-1}^3(\xi_0) = -4\sin^2 0.5\xi_0\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}F(n,-n;1;s^2\sin^2 0.5\,\xi_0)\right]\frac{sds}{1-s^2\sin^2 0.5\xi_0}$$

$$M_0(s,\xi_0) = {}^1/_6\,\pi\frac{\cos^2 0.5\xi_0}{\sin{}^1/_2\,\xi_0}\frac{d}{ds}\int_0^s\frac{\rho\xi^3d\rho}{\sqrt{(s^2-\rho^2)(1-\rho^2\sin^2 0.5\xi_0)}} \tag{2.17}$$

---

[1] Условие предельного равновесия сохраняется в таком же виде (что основывается на соображениях инвариантности [5]) и в случае динамической нагрузки, только K_c должно зависеть от частоты колебаний ω и определяется экспериментально

$$N_0^1(\xi_0) = [N_{-1}^1(\xi_0)]^2 + 4\,\mathrm{tg}^2\, 0.5\,\xi_0 \int_0^1 \ln(s \sin {}^1/_2\,\xi_0)\, M_0(s, \xi_0)\, ds$$

$$M_1(s, \xi_0) = {}^1/_{120}\,\pi\, \frac{\cos^2 0.5\xi_0}{\sin {}^1/_2\xi_0} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{\rho\xi^5 d\rho}{\sqrt{(s^2-\rho^2)(1-\rho^2\sin^2 0.5\xi_0)}}$$

С учетом трех членов ряда (2.15) получаем окончательное выражение

$$\frac{K_c}{\sqrt{2\pi}} = q\left(\frac{L}{\pi}\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\xi_0\right)^{1/2}\left\{1 + \left(\frac{\omega L}{\pi c_1}\right)^2\left(\frac{D_2}{D_1}\right)[N_{-1}^1(\xi_0) + M_0(1, \xi_0)] + \right. \qquad (2.18)$$

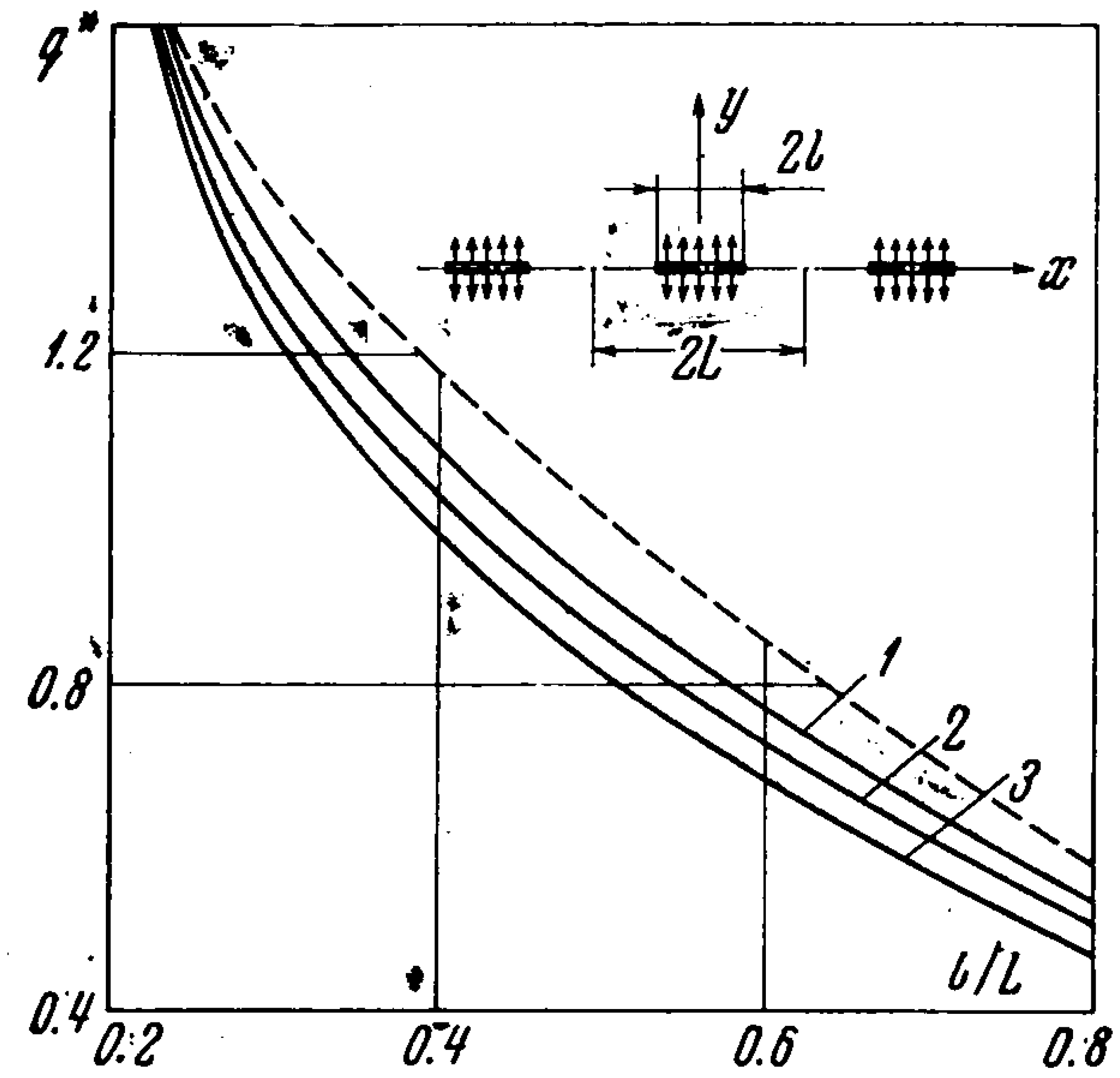
$$\left. + \left(\frac{\omega L}{\pi c_1}\right)^4\left[\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2(N_0^1(\xi_0) + M_1(1, \xi_0)) + \left(\frac{D_3}{D_1}\right)(N_{-1}^3(\xi_0) - N_{-1}^1(\xi_0)\, M_0(1, \xi_0))\right]\right\}$$

Из (2.18) при $\omega = 0$ получаем известный результат [6] решения задачи для плоскости с периодической системой разрезов вдоль оси x, когда к берегам разреза приложена статическая нормальная нагрузка q, постоянная по длине разреза.

На фигуре приведены кривые зависимости (2.18) при различных частотах колебания внешней нагрузки

$$q^* = \frac{q}{K_c}\sqrt{2L}$$

$$\left(\alpha = \frac{\omega L}{\pi c_1}, \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad \frac{c_1^2}{c_2^2} = 4\right)$$



Пунктирная линия соответствует статическому случаю $\omega = 0$. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $\alpha = 0.214$, 0.224, 0.316. Построенное решение показывает, что инерционный эффект сводится к уменьшению величины разрушающей нагрузки при данной длине щели, что для одиночного разреза было отмечено в [7].

Зависимость (2.18) может быть также использована для определения длины щели в полосе шириной $2L$ при действии нормальной нагрузки $p = q \cos \omega t$, приложенной к берегам разреза.

Поступила 19 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Tranter C. J. Dual trigonometrical Series. Proc. of the Glasgow math. association, 1959, vol. 4, pt. 2, p. 49.
2. Грандштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1968.
3. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.
4. Irwin G. R. Fracture. Handbuch der Physik. Berlin, Springer-Verlag, 1958, Bd. 6.
5. Cherepanov G. P. Cracks in solids. Int. J. Solids Structures, 1968, vol. 4, № 8, pp. 811—813.
6. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностр., 1960, № 3.
7. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Динамическая задача для плоскости с разрезом. ДАН СССР, 1969, т. 185, № 3.