

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян

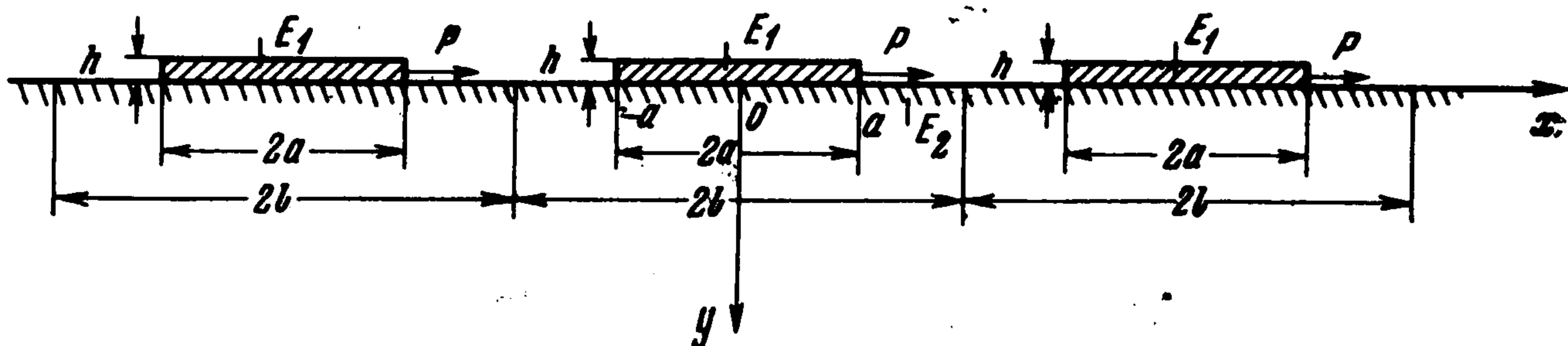
(Ереван)

В данной работе рассматривается периодическая контактная задача для упругой полуплоскости с упругими накладками конечной длины и постоянной толщины.

Решение этой задачи сводится к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению с ядром Гильберта на интервале, не совпадающем с $(-\pi, \pi)$, которое позволяет определить контактные напряжения вдоль участков креплений упругих накладок с полуплоскостью. Приводится эффективное решение этого уравнения, содержащее в явном виде те особенности, которые характеризуют напряженное состояние упругих накладок в окрестностях их концов.

Насколько нам известно, постановка и решение указанной задачи приводится впервые.

§ 1. Постановка задачи. Вывод основного уравнения и его решение. Пусть полуплоскость усилена на конечных отрезках $[-a + 2nl, a + 2nl]$ ($l > a, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), периодически повторяющимися с периодом $2l$ упругими креплениями в виде приваренных (или приклеенных) к ней упругих накладок, имеющих постоянную достаточно малую толщину h (фиг. 1). Цель исследования будет заключаться в определении закона распределения контактных напряжений вдоль отрезков креплений упругих накладок с упругой полуплоскостью, когда к одному из концов накладок приложены сосредоточенные силы P , направленные вдоль их осей. Как и



Фиг. 1

в работе [1], будем предполагать, что вследствие малости толщины h жесткость накладок на изгиб пренебрежимо мала, и поэтому можно пренебречь нормальным давлением накладок на полуплоскость. Иначе говоря, примем, что под накладками действуют только тангенциальные контактные напряжения, т. е. они находятся в одноосном напряженном состоянии.

Будем пользоваться следующей системой обозначений: перемещения и деформации в накладках будем отмечать индексом 1, а в полуплоскости—

индексом 2. Аналогично будем поступать и для обозначения физических констант материалов накладок и полуплоскости.

Поскольку вследствие периодического характера задачи закон распределения контактных напряжений под накладками одинаков, можно ограничиться рассмотрением одной из них, например, той, для которой $n = 0$. Составив уравнение равновесия этой накладки, а затем воспользовавшись законом Гука, можно установить соотношение

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{du^{(1)}}{dx} = \frac{1}{hE_1} \int_{-a}^x \tau^{(1)}(\xi) d\xi \quad (1.1)$$

Здесь E_1 — модуль упругости материала накладки, $u^{(1)}(x)$ — горизонтальные перемещения точек соединения накладок с упругой полуплоскостью, т. е. точек отрезка $[-a, a]$, а $\tau^{(1)}(x)$ — тангенциальное напряжение, действующее на накладку вдоль линии соединения ее с полуплоскостью.

С другой стороны, на основании закона взаимности известно [2], что горизонтальные перемещения $u^{(2)}(x)$ граничных точек упругой полуплоскости, вызванные распределенными по отрезку $[-a, a]$ и периодически повторяющимися с периодом $2l$ тангенциальными контактными напряжениями интенсивности $\tau^{(2)}(x)$, определяются формулой

$$u^{(2)}(x) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_2} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{2|\sin[\pi(x-\xi)/2l]|} \tau^{(2)}(\xi) d\xi$$

где ν — коэффициент Пуассона, а E_2 — модуль упругости полуплоскости.

Отсюда получим

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{1-\nu^2}{E_2 l} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\xi-x)}{2l} \tau^{(2)}(\xi) d\xi \quad (1.2)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

На участке $[-a, a]$ контакта упругой накладки с полуплоскостью должно выполняться условие

$$u^{(1)}(x) = u^{(2)}(x) \quad (y=0, \quad -a \leq x \leq a) \quad (1.3)$$

или, если выполнить дифференцирование, — условие

$$\frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x)}{dx} \quad (y=0, \quad -a \leq x \leq a) \quad (1.4)$$

Следует отметить, что условия (1.3), (1.4) эквивалентны, поскольку постоянная, появляющаяся при интегрировании (1.4), равна нулю, вследствие того, что упругие накладки приварены к полуплоскости и поэтому должны перемещаться вместе, как одно целое.

Подставив выражения $\varepsilon_x^{(1)}$ и $\varepsilon_x^{(2)}$ из (1.1), (1.2) в условие (1.4), придем к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \frac{\pi(\xi-x)}{2l} \psi(\xi) d\xi = -\lambda \psi(x) \quad (1.5)$$

где

$$\psi(x) = \int_{-a}^x \tau(s) ds, \quad \tau(x) = \tau^{(1)}(x) = -\tau^{(2)}(x), \quad \lambda = \frac{E_2 l}{2\pi(1-\nu^2)hE_1}$$

а интеграл в левой части следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Из (1.1) легко видеть, что функция $\psi(x)$ должна удовлетворять условиям

$$\psi(-a) = 0, \quad \psi(a) = P \quad (1.6)$$

Таким образом, периодическая контактная задача для упругой полуплоскости, усиленной периодически повторяющимися с периодом $2l$ упругими накладками постоянной толщины h , приводится к решению интегро-дифференциального уравнения (1.5) с ядром Гильберта при граничных условиях (1.6).

Положив

$$\frac{\pi x}{l} = t, \quad \frac{\pi \xi}{l} = s, \quad \frac{\pi a}{l} = \alpha, \quad \psi\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t)$$

представим интегро-дифференциальное уравнение (1.5) при граничных условиях (1.6) в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} \varphi'(s) ds = -\lambda \varphi(t) \quad (1.7)$$

$$\varphi(-\alpha) = 0, \quad \varphi(\alpha) = P \quad (1.8)$$

Теперь контактное напряжение будет определяться формулой

$$\tau(x) = \frac{\pi}{l} \varphi_t'(t) \quad \left(t = \frac{\pi x}{l}\right) \quad (1.9)$$

Перейдем к решению интегро-дифференциального уравнения (1.7) при граничных условиях (1.8). Для этого сначала обратим (1.7), рассматривая его как интегральное уравнение первого рода с ядром $(2\pi)^{-1} \operatorname{ctg}^{1/2}(s-t)$ и неизвестной функцией $\varphi'(t)$. Формула обращения этого уравнения известна и имеет вид¹ [2,3]

$$\varphi'(t) = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\cos s - \cos \alpha} \varphi(s) ds}{\sin^{1/2}(s-t)} + \frac{A \sqrt{2} \cos^{1/2} t}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \quad (1.10)$$

Для определения неизвестной постоянной A проинтегрируем обе части (1.10), в результате чего получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\cos s - \cos \alpha} \varphi(s) ds \int \frac{dt}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha} \sin^{1/2}(s-t)} + \\ & + 2A \operatorname{arc} \sin \frac{\sin^{1/2} t}{\sin^{1/2} \alpha} + C \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл, предварительно представив его в виде

$$\begin{aligned} J(t, s) &= \int \frac{dt}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha} \sin^{1/2}(s-t)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos(s/2)} \int \frac{dt}{\sqrt{\cos^2(t/2) - \cos^2(\alpha/2)} [\operatorname{tg}(s/2) - \operatorname{tg}(t/2)] \cos(t/2)} \end{aligned}$$

¹ В [3] решение указанного интегрального уравнения сведено к решению некоторой краевой задачи Римана. При построении канонического решения этой задачи там допущена неточность, приводящая в конечном счете к тому, что в формуле обращения неинтегральный член вместо $\cos^{1/2} t$ содержит $\sin^{1/2} t$.

Положив здесь

$$u = \frac{\operatorname{tg}^{1/2} t}{\operatorname{tg}^{1/2} \alpha}, \quad y = \frac{\operatorname{tg}^{1/2} s}{\operatorname{tg}^{1/2} \alpha}$$

после элементарных преобразований получим

$$J(t, s) = \frac{\sqrt{2}}{\sin^{1/2} \alpha \cos^{1/2} s} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}(y-u)}$$

Но выражение последнего интеграла приведено в [4]. Пользуясь этим выражением и возвращаясь к прежним переменным, находим

$$J(t, s) = \frac{1}{\sqrt{\cos s - \cos \alpha}} \ln \frac{2 \cos^{1/2} t \cos^{1/2} s - 2 (\cos^{1/2} \alpha)^2 \cos^{1/2} (t-s) + \vartheta(t, s)}{2 \cos^{1/2} t \cos^{1/2} s - 2 (\cos^{1/2} \alpha)^2 \cos^{1/2} (t-s) - \vartheta(t, s)}$$

$$\vartheta(t, s) = \sqrt{(\cos t - \cos \alpha)(\cos s - \cos \alpha)} \quad (1.11)$$

Имея в виду найденное выражение $J(t, s)$, получим

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} K(t, s) \varphi(s) ds + 2A \operatorname{arc} \sin \frac{\sin^{1/2} t}{\sin^{1/2} \alpha} + C \quad (1.12)$$

$$K(t, s) = J(t, s) \sqrt{\cos s - \cos \alpha} \quad (1.13)$$

Легко видеть, что $K(\alpha, s) \equiv K(-\alpha, s) \equiv 0$, $(-\alpha \leq s \leq \alpha)$. Последние условия вместе с граничными условиями (1.8) позволяют из (1.12) определить неизвестные постоянные

$$A = 1/2 P / \pi, \quad C = 1/2 P$$

Одновременно получим следующий результат: решение интегро-дифференциального уравнения (1.7) при граничных условиях (1.8) эквивалентно решению линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} K(t, s) \varphi(s) ds + \frac{P}{\pi} \operatorname{arc} \sin \frac{\sin^{1/2} t}{\sin^{1/2} \alpha} + \frac{P}{2} \quad (1.14)$$

с ядром $K(t, s)$, выражающимся формулами (1.13) и (1.11).

Из результатов работы [4], (§ 3), непосредственно следует, что интегральный оператор, порожденный ядром $K(t, s)$ $(-\alpha \leq t, s \leq \alpha)$ и определяемый формулами (1.13) и (1.11), вполне непрерывен в пространстве $L_2(-\alpha, \alpha)$ и переводит элементы этого пространства опять в элементы того же пространства. Более того, он является оператором Гильберта — Шмидта. Это важное обстоятельство позволяет получить решение интегрального уравнения (1.14) известным методом последовательных приближений. Однако необходимо отметить, что при таком методе решения интегро-дифференциального уравнения (1.7) не выявляются те особенности, которые исключительно важны для выяснения физической картины напряженного состояния упругих накладок в окрестностях их концов и характеризуют в известном смысле механическую сущность рассматриваемой задачи.

Чтобы представить в явном виде те особенности, которые присущи тангенциальным контактным напряжениям $\tau(x)$ под упругими накладками в окрестностях их концов, мы предлагаем другой метод решения интегрально-дифференциального уравнения (1.7) при граничных условиях (1.8). Этот метод дает возможность не только представить в явном виде особенности в окрестности концов накладок, что нам представляется наиболее важным, но позволяет, кроме того, найти непосредственно значения контактного напряжения $\tau(x) = \pi/l \varphi'(t)$ ($t = \pi x/l$) под накладками. Наконец, этот метод позволит построить приближенные значения контактного напряжения $\tau(x)$, например его n -е приближение, минуя определение предыдущих приближений и оценить это приближение.

Перейдем к изложению метода. Контактное напряжение $\tau(x)$ ($-a \leq x \leq a$), тождественно равно нулю при $a < |x| < l$, изменяется периодически с периодом $2l$, поэтому его можно представить в виде ряда Фурье. При использовании переменной t этот период становится равным 2π , следовательно, можем записать

$$\varphi'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k \cos kt - k\alpha_k \sin kt \quad (-\alpha \leq t \leq \alpha) \quad (1.15)$$

Подчеркнем, что вследствие только что сказанного тригонометрический ряд в правой части равенства (1.15) является разложением в ряд Фурье функции

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t < -\alpha) \\ \varphi'(t) & (-\alpha \leq t \leq \alpha) \\ 0 & (\alpha < t < \pi) \end{cases} \quad (1.16)$$

т. е.

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k \cos kt - k\alpha_k \sin kt \quad (-\pi < t < \pi) \quad (1.17)$$

Отсюда по формуле Фурье для нулевого коэффициента при помощи (1.15) и граничных условий (1.8) находим, что $\alpha_0 = P/\pi$.

Положив

$$F(t) = \int_{-\pi}^t f(s) ds \quad (-\pi < t < \pi) \quad (1.18)$$

и проинтегрировав обе части (1.17) в интервале $(-\pi, t)$, получим

$$F(t) = \gamma + \frac{P}{2\pi} t + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt \quad (-\pi < t < \pi) \quad (1.19)$$

где γ — постоянная интегрирования. Способ ее определения будет указан в следующем параграфе.

Функция $F(t)$ определена только в интервале $(-\pi, \pi)$. На остальной части вещественной оси определим ее посредством периодического про-

должения с периодом 2π функции (1.18). Из (1.19) легко видеть, что это продолжение фактически сводится к периодическому продолжению с периодом 2π линейной функции $g(t) = \gamma + \frac{1}{2}Pt/\pi$. В дальнейшем под функцией $F(t)$ будем понимать именно таким образом продолженную на всю вещественную ось функцию (1.18).

Принимая во внимание (1.16) и (1.18), легко заметить, что

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t \leq \alpha) \\ \varphi(t) & (-\alpha \leq t \leq \alpha) \\ P & (\alpha \leq t < \pi) \end{cases} \quad (1.20)$$

Таким образом, имеет место разложение

$$\varphi(t) = \gamma + \frac{P}{2\pi}t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + \beta_k \sin kt \quad (-\alpha \leq t \leq \alpha) \quad (1.21)$$

Разложим линейную функцию $g(t) = \gamma + \frac{1}{2}Pt/\pi$, продолженную периодически с периодом 2π на всю вещественную ось, в ряд Фурье

$$g(t) = \gamma + \frac{P}{2\pi}t = \gamma + 2P \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kt \quad (-\pi < t < \pi)$$

Тогда функцию $\varphi(t)$ можно представить в виде

$$\varphi(t) = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kt + \left[\beta_k - (-1)^k \frac{2P}{k} \right] \sin kt \quad (-\alpha \leq t \leq \alpha) \quad (1.22)$$

Отметим, что необходимость периодического продолжения функции (1.18) вытекает из физического характера рассматриваемой задачи. А именно: функцией $\varphi(\pi x/l) = \psi(x)$ ($-a \leq x \leq a$) при помощи (1.1) определяются деформации точек упругой накладки с нулевым номером, а функцией $F(\pi x/l)$ ($-l < x < l$) — деформации граничных точек упругой полуполосы $-l < x < l$. Поскольку задача периодическая, то картина деформированного состояния этой полуполосы должна периодически повторяться с периодом $2l$, вследствие чего функция $F(\pi x/l)$ должна быть периодической с периодом $2l$, а функция $F(t)$ должна быть периодической с периодом 2π .

Таким образом, законность представления функции $\varphi(t)$ в виде (1.21) обоснована.

Перейдем к изложению предлагаемого метода решения интегро-дифференциального уравнения (1.7) при граничных условиях (1.8). Будем исходить из уравнения (1.10). Учитывая найденное выше значение постоянной A , получим

$$\varphi'(t) = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\cos s - \cos \alpha} \varphi(s) ds}{\sin^{1/2}(s-t)} + \frac{P \cos^{1/2} t}{\pi \sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}} \quad (-\alpha < t < \alpha)$$

Подставив в последнее выражение разложение функции $\varphi(t)$ (1.22), найдем

$$\varphi'(t) = \frac{P \cos^{1/2} t}{\pi \sqrt{2} (\cos t - \cos \alpha)} + \frac{\lambda \gamma}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} J_0(t) + \quad (1.23)$$

$$+ \frac{\lambda}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k - \frac{(-1)^k 2P}{k} \right] I_k(t) \right\} \quad (-\alpha < t < \alpha)$$

где

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\cos s - \cos \alpha}}{\sin^{1/2}(s-t)} ds \quad (1.24)$$

$$J_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\cos s - \cos \alpha} \cos ks}{\sin^{1/2}(s-t)} ds \quad (k=1, 2, \dots) \quad (1.25)$$

$$I_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\cos s - \cos \alpha} \sin ks}{\sin^{1/2}(s-t)} ds \quad (k=1, 2, \dots) \quad (1.26)$$

Вычисления этих интегралов приводятся ниже.

Для последующего предварительно заметим, что

$$\sqrt{\cos s - \cos \alpha} = 1/2 \sqrt{2} \exp(-1/2 is) [(e^{is} - e^{i\alpha})(e^{is} - e^{-i\alpha})]^{1/2}$$

$$\sin^{1/2}(s-t) = -1/2i \exp[-1/2i(t+s)] (e^{is} - e^{it})$$

Тогда формулы (1.24) — (1.26) примут вид

$$J_0(t) = \frac{i \exp^{1/2 it}}{\pi \sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{[(e^{is} - e^{i\alpha})(e^{is} - e^{-i\alpha})]^{1/2}}{e^{is} - e^{it}} ds$$

$$J_k(t) = \frac{i \exp^{1/2 it}}{2\pi \sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{[(e^{is} - e^{i\alpha})(e^{is} - e^{-i\alpha})]^{1/2} (e^{iks} + e^{-iks})}{e^{is} - e^{it}} ds \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$I_k(t) = \frac{\exp^{1/2 it}}{2\pi \sqrt{2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{[(e^{is} - e^{i\alpha})(e^{is} - e^{-i\alpha})]^{1/2} (e^{iks} - e^{-iks})}{e^{is} - e^{it}} ds \quad (k=1, 2, \dots)$$

Перейдем от отрезка $[-\alpha, \alpha]$ вещественной оси к дуге $\bar{a}a$ единичной окружности, для чего положим

$$e^{is} = \zeta, \quad e^{it} = \sigma, \quad e^{i\alpha} = a$$

Получим

$$J_0(-i \ln \sigma) = J_0^*(\sigma) = \frac{\sqrt{2\sigma}}{2\pi} \int_a^{\bar{a}} \frac{[(\zeta - a)(\zeta - \bar{a})]^{1/2} d\zeta}{\zeta(\zeta - \sigma)} \quad (1.27)$$

$$J_k(-i \ln \sigma) = J_k^*(\sigma) = \frac{\sqrt{\sigma}}{2\pi \sqrt{2}} \int_a^{\bar{a}} \frac{[(\zeta - a)(\zeta - \bar{a})]^{1/2} (\zeta^{k-1} + \zeta^{-k+1})}{\zeta - \sigma} d\zeta \quad (1.28)$$

$$I_k(-i \ln \sigma) = I_k^*(\sigma) = \frac{\sqrt{\sigma}}{2\pi i \sqrt{2}} \int_a^{\bar{a}} \frac{[(\zeta - a)(\zeta - \bar{a})]^{1/2} (\zeta^{k-1} - \zeta^{-k+1})}{\zeta - \sigma} d\zeta$$

$$(k=1, 2, \dots) \quad (1.29)$$

Приступая к вычислению интеграла $J_0^*(\delta)$, введем в рассмотрение кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{[(w-a)(w-\bar{a})]^{1/2}}{w(w-z)} dw$$

с контуром интегрирования C , показанным на фиг. 2.

Входящая в этот интеграл функция $[(w-a)(w-\bar{a})]^{1/2}$ есть двузначная функция с точками ветвления $w = a$, $w = \bar{a}$, расположенными на единичной окружности с центром в начале координат. В плоскости, разрезанной вдоль дуги $\bar{a}a$ единичной окружности, можно выбрать, как нетрудно убедиться, однозначную аналитическую ветвь этой функции. Выберем ту ветвь, у которой радикал берется со знаком плюс. В дальнейшем под $[(w-a)(w-\bar{a})]^{1/2}$ будем подразумевать именно эту ветвь. Тогда функция

$$f(w) = w^{-1}[(w-a)(w-\bar{a})]^{1/2}$$

при $|w| > 1$ может быть представлена в виде

$$f(w) = 1 + O(w^{-1})$$

Чтобы выяснить структуру функции $f(w)$ в начале координат, положим

$$w - a = (a - w)e^{\pi i}, \quad w - \bar{a} = (\bar{a} - w)e^{\pi i}$$

Следовательно

$$f(w) = -w^{-1}(a-w)^{1/2}(\bar{a}-w)^{1/2}$$

Отсюда, пользуясь выражениями биномальных рядов, найдем, что в окрестности начала координат

$$f(w) = -w^{-1} + O(1)$$

т. е. в точке $w = 0$ функция $f(w)$ имеет полюс первого порядка.

Таким образом, функция $f(w)$ голоморфна во всей плоскости, разрезанной вдоль дуги $\bar{a}a$, включая точку $w = \infty$ (где она имеет полюс нулевого порядка с главной частью 1), кроме точки $w = 0$ (являющейся для нее полюсом первого порядка с главной частью $-w^{-1}$).

Далее воспользуемся следующим результатом [5]. Пусть функция $f(w)$ голоморфна в области D , являющейся бесконечной частью плоскости и состоящей из точек, расположенных вне замкнутого контура C , за исключением, быть может, конечных точек a_1, \dots, a_n этой области, а также точки $w = \infty$, где она может иметь полюсы с главными частями $G_1(w), \dots, G_n(w), G_\infty(w)$ (в точке $w = \infty$ полюс может быть нулевого порядка).

В этом случае имеет место формула

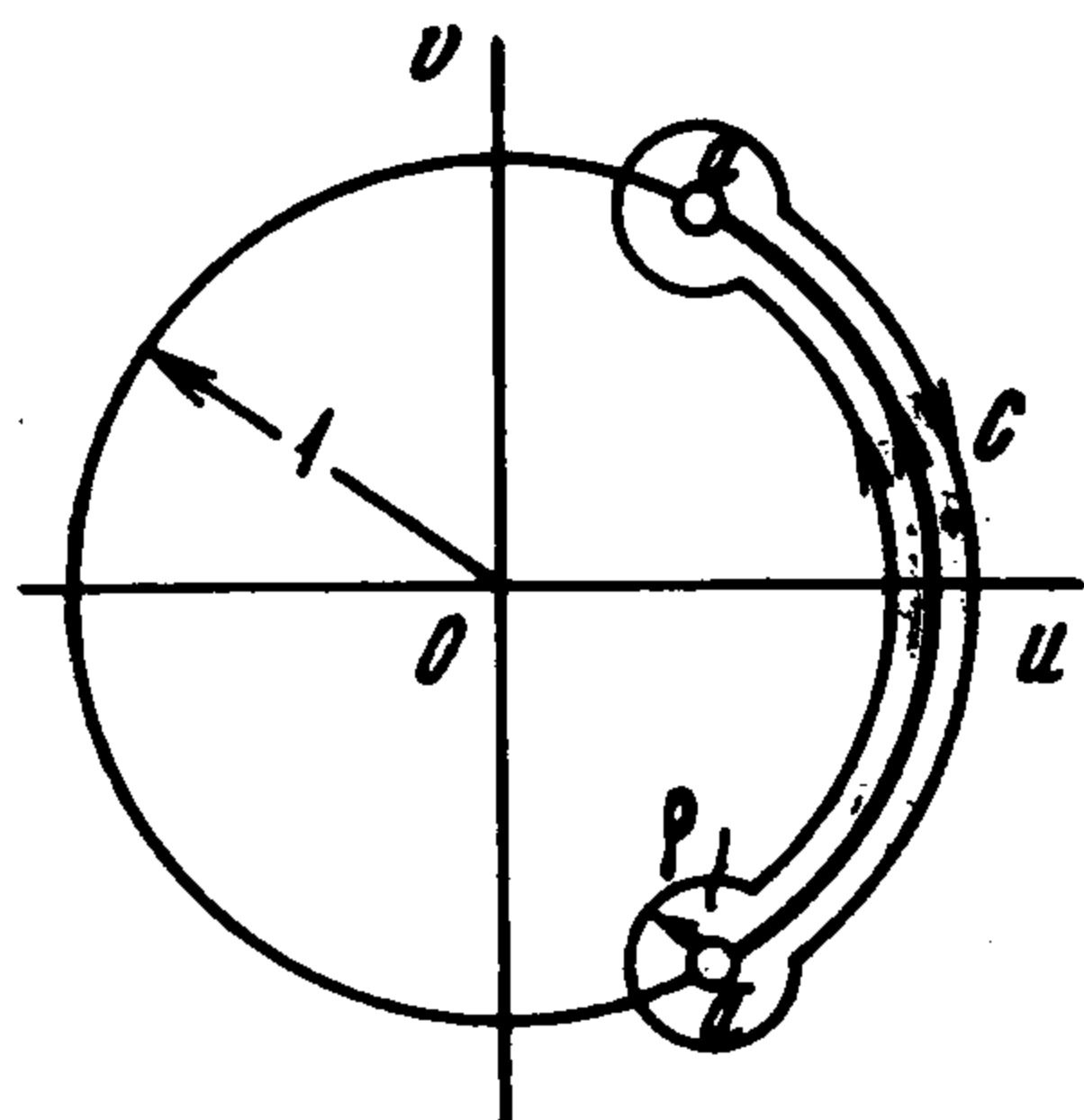
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w) dw}{w-z} = f(z) - G_1(z) - \dots - G_n(z) - G_\infty(z) \quad (z \in D) \quad (1.30)$$

являющаяся формулой Коши для бесконечной области D .

Применив последнюю формулу к функции $f(w) = w^{-1}[(w-a)(w-\bar{a})]^{1/2}$, получим

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{[(w-a)(w-\bar{a})]^{1/2}}{w(w-z)} dw = \frac{[(z-a)(z-\bar{a})]^{1/2}}{z} + \frac{1}{z} - 1 \quad (1.31)$$

Будем стягивать контур C к разрезу $\bar{a}a$ вдоль дуги единичной окружности. Предварительно найдем предельные значения радикала на внутреннем и внешнем берегах этого разреза. Эти значения весьма просто вычисляются в случае разреза, сделанного по некоторому отрезку вещественной оси. Рассматриваемый случай разреза по дуге единичной окружности можно свести к указанному случаю. Это делается при по-



Фиг. 2

мощи конформного отображения внутренности единичного круга на верхнюю полуплоскость. Отображающая функция имеет вид

$$w_1 = i \frac{1-w}{1+w}$$

Для точек единичной окружности $w = \zeta = e^{is}$ ($-\pi \leq s \leq \pi$). Эти точки преобразовываются в точки вещественной оси формулой

$$w_1 = u_1 = \operatorname{tg}^{1/2}s$$

Отсюда видно, что разрез по дуге $\bar{a}a$ единичной окружности в плоскости комплексной переменной w при указанном конформном отображении переходит в разрез по конечному отрезку $[-\operatorname{tg}^{1/2}\alpha, \operatorname{tg}^{1/2}\alpha]$ вещественной оси в плоскости комплексной переменной w_1 . Одновременно находим, что

$$w - a = -\frac{1+a}{1+w_1} \left(w_1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right), \quad w - \bar{a} = -\frac{1+\bar{a}}{1+w_1} \left(w_1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad (1.32)$$

Полагая $w_1 \rightarrow u_1$, будем считать, что на отрезке $[-\operatorname{tg}^{1/2}\alpha, \operatorname{tg}^{1/2}\alpha]$, на верхнем берегу разреза

$$w_1 - \operatorname{tg}^{1/2}\alpha \rightarrow (\operatorname{tg}^{1/2}\alpha - u_1)e^{\pi i}, \quad w_1 + \operatorname{tg}^{1/2}\alpha \rightarrow \operatorname{tg}^{1/2}\alpha + u_1$$

а на нижнем берегу разреза

$$w_1 - \operatorname{tg}^{1/2}\alpha \rightarrow (\operatorname{tg}^{1/2}\alpha - u_1)e^{-\pi i}, \quad w_1 + \operatorname{tg}^{1/2}\alpha \rightarrow \operatorname{tg}^{1/2}\alpha + u_1$$

В правильности этих соотношений легко убедиться, если проследить за изменениями аргументов комплексных чисел $w_1 - \operatorname{tg}^{1/2}\alpha$ и $w_1 + \operatorname{tg}^{1/2}\alpha$ при $w_1 \rightarrow u_1$.

Приняв во внимание только что сказанное, при помощи формул перехода (1.32) установим, что радикал $[(w-a)(w-\bar{a})]^{1/2}$ на внутреннем и внешнем берегах разреза по дуге $\bar{a}a$ единичной окружности принимает соответственно значения

$$i[(a-\zeta)(\zeta-\bar{a})]^{1/2}, \quad -i[(a-\zeta)(\zeta-\bar{a})]^{1/2}$$

или, имея в виду, что $i = +\sqrt{-1}$, — значения

$$-[(\zeta-a)(\zeta-\bar{a})]^{1/2}, \quad [(\zeta-a)(\zeta-\bar{a})]^{1/2} \quad (\zeta \in \bar{a}a) \quad (1.33)$$

Приняв во внимание значения (1.33), стянем в формуле (1.31) контур C к разрезу $\bar{a}a$. Получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{a}}^a \frac{-2[(\zeta-a)(\zeta-\bar{a})]^{1/2} d\zeta}{\zeta(\zeta-z)} = \frac{[(z-a)(z-\bar{a})]^{1/2}}{z} + \frac{1}{z} - 1$$

Отсюда, применив формулы Сохоцкого — Племеля и снова используя значения (1.33), найдем, что при $z \rightarrow \sigma$ слева или справа от разреза, т. е. при устремлении точки z к точке σ внутреннего или внешнего берегов разреза, имеет место соотношение

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\bar{a}}^a \frac{[(\zeta-a)(\zeta-\bar{a})]^{1/2} d\zeta}{\zeta(\zeta-\sigma)} = 1 - \frac{1}{\sigma}$$

Следовательно интеграл $J_0^*(\sigma)$, определяемый равенством (1.27), равен

$$J_0^*(\sigma) = \frac{1}{2}i \sqrt{2\sigma}(1-\sigma^{-1})$$

Положив $\sigma = e^{it}$, получим выражение интеграла $J_0(t)$

$$J_0(t) = -\sqrt{2} \sin \frac{1}{2}t \quad (1.34)$$

¹ Поскольку подынтегральная функция на концах \bar{a} и a разреза есть величина соответственно порядка $O((w-\bar{a})^{1/2})$ и $O((w-a)^{1/2})$, то интегралы, взятые по малым кружочкам, при $\rho \rightarrow 0$ стремятся к нулю.

Перейдем к вычислению интегралов (1.28) и (1.29). Введем обозначение

$$X_k(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a}{\sigma}}^a \frac{[(\zeta - a)(\zeta - \bar{a})]^{1/2} \zeta^{k-1}}{\zeta - \sigma} d\zeta \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} J_k^*(\sigma) &= 1/2 \sqrt{2\sigma} [X_k(\sigma) + X_{-k}(\sigma)] \\ I_k^*(\sigma) &= -1/2i \sqrt{2\sigma} [X_k(\sigma) - X_{-k}(\sigma)] \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.35)$$

Рассмотрим кусочно-голоморфные функции

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{[(w - a)(w - \bar{a})]^{1/2} w^{k-1}}{w - z} dw \\ \Phi_{-k}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{[(w - a)(w - \bar{a})]^{1/2}}{w^{k+1}(w - z)} dw \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

где контур интегрирования C прежний.

Исследуем аналитические свойства функций

$$f_k(w) = [(w - a)(w - \bar{a})]^{1/2} w^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

где радикал, как и выше, берется с положительным знаком. Легко видеть, что в окрестности начала координат эти функции являются голоморфными. Чтобы выяснить структуру этих функций при больших w , представим их в виде

$$f_k(w) = w^k \left(1 - \frac{a}{w}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\bar{a}}{w}\right)^{1/2}$$

Путем перемножения биномиальных рядов, являющихся разложениями в степенной ряд фигурирующих здесь квадратных корней, легко установить, что при $|w| > 1$ эти функции допускают представление

$$f_k(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_n}{w^{n-k}} = \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n w^{k-n} + H(w)$$

Здесь $H(w)$ — голоморфная функция в ∞

$$C_n = \sum_{p=0}^n C_{1/2}^{(p)} C_{1/2}^{(n-p)} a^p \bar{a}^{n-p}$$

Легко показать, что

$$C_n = \bar{C}_n = \sum_{p=0}^n C_{1/2}^{(p)} C_{1/2}^{(n-p)} \cos(2p - n)\alpha$$

Таким образом, функции $f_k(w)$ ($k = 1, 2, \dots$) голоморфны во всей плоскости, разрезанной вдоль дуги $\bar{a}a$ единичной окружности, кроме бесконечно удаленной точки, являющейся для них полюсом порядка k с главными частями

$$G_{\infty}^{(k)}(w) = \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n w^{k-n} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Так же легко показать, что функции

$$f_{-k}(w) = \frac{[(w - a)(w - \bar{a})]^{1/2}}{w^{k+1}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

голоморфны во всей плоскости переменной w , разрезанной вдоль дуги $\bar{a}a$, за исключением точки $w = 0$, в которой они имеют полюс порядка k с главными частями

$$G_0^{(k)}(w) = \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+1} C_n}{w^{k-n+1}}$$

Приняв во внимание указанные аналитические свойства функций $f_k(w)$ и $f_{-k}(w)$ ($k = 1, 2, \dots$) и применив формулу Коши (1.30), найдем способом совершенно аналогичным изложенному выше при вычислении интеграла $J_0^*(\sigma)$, что

$$X_k(\sigma) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \sigma^{k-n}, \quad X_{-k}(\sigma) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^k (-1)^{n+1} C_n \sigma^{n-k-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Используя последние формулы, найдем из (1.35) выражения для интегралов $J_k^*(\sigma)$ и $I_k^*(\sigma)$, а затем из (1.25) и (1.26) следующие выражения для интегралов $J_k(t)$ и $I_k(t)$:

$$J_k(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \sin(k-n+1/2)t \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.36)$$

$$I_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \cos(k-n+1/2)t$$

$$C_n = \sum_{p=0}^n C_{1/2}^{(p)} C_{1/2}^{(n-p)} \cos(2p-n)\alpha \quad (1.37)$$

Прежде чем перейти к решению интегро-дифференциального уравнения (1.7) при граничных условиях (1.8), вычислим еще коэффициенты C_n , фигурирующие в приведенных выше формулах.

Из формулы (1.37) непосредственно находим

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \cos \alpha$$

Остальные коэффициенты C_n легко вычисляются следующим образом. Рассмотрим функцию

$$h(w) = [(w-a)(w-\bar{a})]^{1/2}$$

где радикал берется с положительным знаком. Тем самым выбирается однозначная аналитическая ветвь этой функции в плоскости, разрезанной вдоль дуги $\bar{a}a$ единичной окружности. Нетрудно показать, как и выше, что

$$h(w) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n w^n \quad (|w| < 1) \quad (1.38)$$

$$h(w) = w \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_n}{w^n} \quad (|w| > 1) \quad (1.39)$$

Пусть на единичной окружности положительным направлением считается направление вращения против часовой стрелки. Обозначим через $h_+(\sigma)$ предельные значения $h(w)$, когда точка w стремится к точке σ единичной окружности слева, а через $h_-(\sigma)$ — предельные значения этой же функции при стремлении точки w к той же точке σ справа. Составим разность $h_+(\sigma) - h_-(\sigma)$. Поскольку функция $h(w)$ на всей единичной окружности, кроме разреза по дуге $\bar{a}a$, аналитична, то эта разность обращается в нуль для всех точек σ единичной окружности, не принадлежащих разрезу. Найдем значения этой разности на разрезе по дуге $\bar{a}a$. Для этого воспользуемся значениями (1.33) радикала на внутреннем и внешнем берегах разреза. Получим, что

$$h_+(\sigma) - h_-(\sigma) = 2 \sqrt{(\sigma-a)(\sigma-\bar{a})} \quad (\sigma \in \bar{a}a)$$

Таким образом

$$h_+(\sigma) - h_-(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma \in \bar{a}a \\ -2 \sqrt{(\sigma-a)(\sigma-\bar{a})}, & \sigma \in \bar{a}a \end{cases}$$

С другой стороны, из разложений (1.38), (1.39) получаем

$$h_+(\sigma) - h_-(\sigma) = - \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n \sigma^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n}{\sigma^{n-1}} \right]$$

Сравнивая двумя способами полученные выражения $h_+(\sigma) - h_-(\sigma)$, обнаружим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_n \sigma^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sigma^{1-n} = \begin{cases} 2 \sqrt{(\sigma-a)(\sigma-\bar{a})}, & \sigma \in \bar{a}a \\ 0, & \sigma \notin \bar{a}a \end{cases}$$

Положив $\sigma = e^{it}$, $a = e^{i\alpha}$, будем иметь

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikt} = q(t) = \begin{cases} 2 \exp(i/2 t) \sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)} & (-\alpha \leq t \leq \alpha) \\ 0 & (-\pi + \alpha < t < \pi - \alpha) \end{cases} \quad (1.40)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} d_0 &= C_0 - C_1, & d_1 &= C_0 - C_1 \\ d_k &= (-1)^k C_k & (k = 2, 3, \dots), & & d_{-k} &= (-1)^{k+1} C_{k+1} & (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Далее разложим функцию $q(t)$ в ряд Фурье

$$q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k e^{ikt} \quad (1.42)$$

Для коэффициентов Фурье

$$q_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) e^{-ikt} dt$$

получаем выражения

$$q_k = \frac{P_{k-2}(\cos \alpha) - P_k(\cos \alpha)}{2k-1} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

где $P_k(\cos \alpha)$ — многочлены Лежандра.

Подставляя в (1.40) вместо функции $q(t)$ ее разложение в ряд Фурье (1.42), приравняв коэффициенты при e^{ikt} и используя обозначения (1.41), находим

$$C_k = (-1)^k \frac{P_{k-2}(\cos \alpha) - P_k(\cos \alpha)}{2k-1} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Заметим, что этим путем сами коэффициенты C_0 и C_1 не определяются; определяется лишь их разность.

Таким образом, имеем

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \cos \alpha, \quad C_n = (-1)^n \frac{P_{n-2}(\cos \alpha) - P_n(\cos \alpha)}{2n-1} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (1.43)$$

Теперь решение (1.23) интегро-дифференциального уравнения (1.7) с граничными условиями (1.8) после постановки выражений (1.34) и (1.36) для интегралов $J_0(t)$, $J_k(t)$ и $I_k(t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{P \cos 1/2 t}{\pi \sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}} - \frac{2\lambda \gamma \sin 1/2 t}{\sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}} - \\ &- \frac{\lambda}{\sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \sin(k - n + 1/2)t - \right. \\ &- \left. \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k - (-1)^k \frac{2P}{k} \right] \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \cos(k - n + 1/2)t \right\} \quad (-\alpha < t < \alpha) \quad (1.44) \end{aligned}$$

где коэффициенты C_n определяются формулами (1.43).

Для контактного напряжения $\tau(x)$ под упругими накладками согласно (1.9) окончательно получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \frac{\pi}{l} \varphi' \left(\frac{\pi x}{l} \right) = \frac{P \cos(\pi x / 2l)}{l \sqrt{2(\cos(\pi x / l) - \cos(\pi a / l))}} - \\ & - \frac{2\pi\lambda\gamma \sin(\pi x / 2l)}{l \sqrt{2(\cos(\pi x / l) - \cos(\pi a / l))}} - \frac{\lambda\pi}{l \sqrt{2(\cos(\pi x / l) - \cos(\pi a / l))}} \times \\ & \times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \sin \left[\left(k - n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \right] - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k - (-1)^k \frac{2P}{k} \right] \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \cos \left[\left(k - n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \right] \right\} \quad (-\alpha < x < \alpha) \end{aligned} \quad (1.45)$$

Таким образом, закон распределения контактных напряжений под упругими накладками, склеенными с упругой полуплоскостью и повторяющимися периодически с периодом $2l$, определяется формулой (1.45), если известны коэффициенты α_k и β_k . Как будет доказано в § 3, в этой формуле явно выделены те особенности, которые характеризуют напряженное состояние накладок вблизи их концов. В § 2 будет доказано, что определение коэффициентов α_k и β_k сводится к решению двух порознь бесконечных систем линейных алгебраических уравнений с ограниченными свободными членами. Там же будет показано, что эти бесконечные системы линейных уравнений при

$$\frac{\lambda}{\sin \alpha} < \frac{1}{25}, \quad \lambda = \frac{E_2 l}{2\pi(1-\nu^2)hE_1}$$

будут вполне регулярными, а при $\lambda / \sin \alpha \geq 1/25$ — квазиполностью регулярными. Следовательно, можно опираться на теорию регулярных и квазиполностью регулярных бесконечных систем линейных уравнений с ограниченными свободными членами и утверждать, что коэффициенты α_k и β_k могут быть определены с любой необходимой точностью.

Отметим, что в том случае, когда $\lambda = 0$, упругие накладки заменяются жесткими, т. е. штампами, и формула (1.45) переходит в известную формулу из [2].

§ 2. Вывод и исследование бесконечных систем линейных уравнений. Обратимся к формуле (1.44) с тем, чтобы вывести бесконечные системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов α_k и β_k . Подставив в эту формулу вместо функции $\varphi'(t)$ ее разложение (1.15) в ряд Фурье, имея в виду, что $\alpha_0 = P / \pi$, в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{P}{2\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} m (\beta_m \cos mt - \alpha_m \sin mt) = & \frac{P \cos^{1/2} t}{\pi \sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}} - \frac{2\lambda\gamma \sin^{1/2} t}{\sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}} - \\ & - \frac{\lambda}{\sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \sin(k - n + 1/2)t - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k - (-1)^k \frac{2P}{k} \right] \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \cos(k - n + 1/2)t \right\} \quad (-\alpha < t < \alpha) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Теперь заметим, что сумма ряда, стоящего в левой части последнего равенства, как явствует из (1.16) и (1.17), в интервалах $(-\pi, \alpha)$ и (α, π) должна обращаться тождественно в нуль. Следовательно, для разложения в ряд Фурье всей правой части равенства (2.1), определенной только в интервале $(-\alpha, \alpha)$, необходимо продолжить ее на остальную часть интервала $(-\pi, \pi)$ функцией, тождественно равной нулю. Приняв во внимание это обстоятельство, введем в рассмотрение функции

$$g_p(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < -\alpha \\ \frac{\cos(p + 1/2)t}{\sqrt{2}(\cos t - \cos \alpha)}, & -\alpha \leq t \leq \alpha \\ 0, & \alpha < t \leq \pi \end{cases} \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

$$h_p(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < -\alpha \\ \frac{\sin(p + 1/2)t}{\sqrt{2}(\cos t - \cos \alpha)}, & -\alpha \leq t \leq \alpha \\ 0, & \alpha < t \leq \pi \end{cases} \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

продолженные на всю вещественную ось периодически с периодом 2π .

При помощи этих функций формулу (2.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{P}{2\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} m(\beta_m \cos mt - \alpha_m \sin mt) &= \frac{P \cos 1/2 t}{\pi \sqrt{2}(\cos t - \cos \alpha)} - \\ &- \frac{2\lambda\gamma \sin 1/2 t}{\sqrt{2}(\cos t - \cos \alpha)} - \lambda \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n h_{k-n}(t) - \right. \\ &- \left. \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k - (-1)^k \frac{2P}{k} \right] \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n g_{k-n}(t) \right\} \quad (-\pi \leq t \leq \pi) \quad (2.4) \end{aligned}$$

Далее функции $g_p(t)$ и $h_p(t)$, соответственно четные и нечетные, разложим в ряды Фурье

$$g_p(t) = \frac{C_0^{(p)}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(p)} \cos mt, \quad h_p(t) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m^{(p)} \sin mt \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

коэффициенты которых, согласно (2.2) и (2.3), определяются формулами

$$C_m^{(p)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\cos(p + 1/2)t \cos mt}{\sqrt{2}(\cos t - \cos \alpha)} dt \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$D_m^{(p)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\sin(p + 1/2)t \sin mt}{\sqrt{2}(\cos t - \cos \alpha)} dt \quad (m=1, 2, \dots)$$

Воспользовавшись формулой [6]

$$P_\nu(\cos \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\cos(\nu + 1/2)t}{\sqrt{2}(\cos t - \cos \alpha)} dt \quad (0 < \alpha < \pi)$$

для функций Лежандра первого рода порядка ν , сразу получим

$$C_m^{(p)} = 1/2 [P_{p+m}(\cos \alpha) + P_{p-m}(\cos \alpha)], D_m^{(p)} = 1/2 [P_{p-m}(\cos \alpha) - P_{p+m}(\cos \alpha)]$$

Следовательно

$$g_p(t) = \frac{P_p(\cos \alpha)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_{p+m}(\cos \alpha) + P_{p-m}(\cos \alpha)}{2} \cos mt \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

$$h_p(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_{p-m}(\cos \alpha) - P_{p+m}(\cos \alpha)}{2} \sin mt \quad (2.6)$$

Подставляя в формулу (2.4) вместо функций $g_{k-n}(t)$ и $h_{k-n}(t)$ их разложения в ряды Фурье соответственно из (2.5) и (2.6), после простых вычислений получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} m (\beta_m \cos mt - \alpha_m \sin mt) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k - (-1)^k \frac{2P}{k} \right] \times \\ &\times \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n P_{k-n}(\cos \alpha) + \frac{P}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_m(\cos \alpha) + P_{-m}(\cos \alpha)}{2} \cos mt + \\ &+ 2\lambda\gamma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_m(\cos \alpha) - P_{-m}(\cos \alpha)}{2} \sin mt - \\ &- \lambda \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \frac{P_{k-m-n}(\cos \alpha) - P_{k+m-n}(\cos \alpha)}{2} \right] \sin mt - \right. \\ &\left. - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_k - (-1)^k \frac{2P}{k} \right) \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \frac{P_{k+m-n}(\cos \alpha) + P_{k-m-n}(\cos \alpha)}{2} \right] \cos mt \right\} \\ &(-\pi \leq t \leq \pi) \end{aligned}$$

Сравнение коэффициентов при $\cos mt$ и $\sin mt$ в обеих частях последнего равенства приводит к бесконечным системам линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k - (-1)^k \frac{2P}{k} \right] \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n P_{k-n}(\cos \alpha) = 0 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} m\beta_m &= \frac{P}{\pi} \frac{P_m(\cos \alpha) + P_{-m}(\cos \alpha)}{2} + \quad (m=1, 2, \dots) \quad (2.8) \\ &+ \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k - (-1)^k \frac{2P}{k} \right] \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \frac{P_{k+m-n}(\cos \alpha) + P_{k-m-n}(\cos \alpha)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\alpha_m &= \lambda\gamma [P_{-m}(\cos \alpha) - P_m(\cos \alpha)] + \quad (m=1, 2, \dots) \quad (2.9) \\ &+ \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \frac{P_{k-m-n}(\cos \alpha) - P_{k+m-n}(\cos \alpha)}{2} \end{aligned}$$

Легко заметить, что бесконечная система (2.8) соответствует кососимметрической части контактного напряжения под упругими накладками, а бесконечная система (2.9) — симметрической части контактного напряжения.

Докажем, что

$$\sum_{n=0}^k (-1)^n C_n P_{k-n}(\cos \alpha) \equiv 0 \quad \text{при } 0 < \alpha < \pi; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Отсюда непосредственно будет вытекать, что равенство (2.7) при любых коэффициентах β_k удовлетворяется тождественно и, следовательно, не налагает никаких ограничений на эти коэффициенты.

Чтобы обнаружить справедливость тождества (2.10), заметим, что согласно (1.26) и (1.36)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\cos s - \cos \alpha} \sin ks}{\sin^{1/2}(s-t)} ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \cos(k-n+1/2)t$$

($k = 1, 2, \dots$) ($-\alpha < t < \alpha$)

Умножив обе части последнего равенства на $\frac{2}{\pi \sqrt{\cos t - \cos \alpha}}$ и проинтегрировав по t от $-\alpha$ до α , получим

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin ks K(t, s) \Big|_{t=-\alpha}^{t=\alpha} ds = \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n P_{k-n}(\cos \alpha) \quad (0 < \alpha < \pi)$$

($k = 1, 2, \dots$)

где ядро $K(t, s)$ определяется формулами (1.13) и (1.11). Имея в виду, что

$$K(-\alpha, s) \equiv K(\alpha, s) \equiv 0 \quad (-\alpha \leq s \leq \alpha)$$

из последнего равенства получим тождество (2.10).

Отметим, что равенство (2.7) выражает условие равновесия упругих накладок. В самом деле, проинтегрировав обе части (1.44) от $-\alpha$ до α и используя граничные условия (1.8), приходим к равенству (2.7). С другой стороны, если в ту же формулу (1.44) вместо $\varphi'(t)$ подставить разложение (1.15), учтя при этом, что $\alpha_0 = P/\pi$, а затем проинтегрировать ее обе части от $-\alpha$ до α , то получим равенство

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin ka = P(1 - \alpha/\pi) \quad (2.11)$$

Из сказанного следует, что равенства (2.7) и (2.11) эквивалентны. Следовательно, (2.11) также является тождеством и не налагает никаких ограничений на неизвестные коэффициенты.

Теперь попытаемся удовлетворить граничным условиям (1.8), отталкиваясь от разложения $\varphi(t)$, определяемого равенством (1.21). Тогда получим равенство (2.11), а также следующее равенство:

$$\gamma = \frac{P}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos k\alpha \quad (2.12)$$

Последнее равенство позволяет определить постоянную γ , если известны α_k . Но, как явствует из бесконечной системы (2.9), сами коэффициенты α_k выражаются через γ . Следовательно, соотношение (2.12) будет некоторым уравнением, из которого можно определить постоянную γ .

Эта постоянная имеет простой физический смысл. Для выяснения этого смысла проинтегрируем обе части (1.19) в интервале $(-\pi, \pi)$ и примем во внимание (1.20); в результате получим

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \left[P(\pi - a) + \int_{-a}^a \varphi(t) dt \right]$$

или, полагая $t = \pi x / l$, $l\alpha / \pi = a$

$$\gamma = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{a}{l} \right) + \frac{1}{2l} \int_{-a}^a \varphi \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx \quad (2.13)$$

С другой стороны, согласно (1.1)

$$\frac{du^{(1)}}{dx} = \varepsilon_x^{(1)} = \frac{\psi(x)}{hE_1} = \frac{\varphi(\pi x/l)}{hE_1}$$

Отсюда

$$u^{(1)}(x) = C + \frac{1}{hE_1} \int_{-a}^x \varphi \left(\frac{\pi s}{l} \right) ds$$

Постоянная C характеризует жесткое смещение системы накладки — полуплоскость. Из последней формулы следует, что $C = u^{(1)}(-a)$, поэтому будем иметь

$$u^{(1)}(a) - u^{(1)}(-a) = \frac{1}{hE_1} \int_{-a}^a \varphi \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx$$

Подставив сюда выражение интеграла из (2.13), получим

$$u^{(1)}(a) - u^{(1)}(-a) = \frac{(2\gamma + P)l + Pa}{hE_1}$$

Отсюда заключаем, что постоянная γ определяет перемещения правых концов упругих накладок относительно левых концов тех же накладок. В следующем параграфе будет дано ее приближенное выражение.

Перейдем к исследованию бесконечных систем линейных уравнений (2.8), (2.9). Представим эти системы в виде

$$a_m = \lambda \gamma d_m + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} a_k \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

$$b_m = e_m + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk} b_k \quad (2.15)$$

где

$$A_{mk} = \frac{1}{2k} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n [P_{k-m-n}(\cos \alpha) - P_{k+m-n}(\cos \alpha)] \quad (m, k = 1, 2, \dots)$$

$$B_{mk} = \frac{1}{2k} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n [P_{k+m-n}(\cos \alpha) + P_{k-m-n}(\cos \alpha)] \quad (m, k = 1, 2, \dots)$$

$$a_m = m\alpha_m, \quad b_m = m\beta_m, \quad d_m = P_{-m}(\cos \alpha) - P_m(\cos \alpha) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$e_m = \frac{P}{2\pi} [P_m(\cos \alpha) - P_{-m}(\cos \alpha)] - 2P\lambda \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_{mk} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Отметим, что бесконечную систему (2.8) можно представить в виде, в котором неизвестными будут коэффициенты $b_k - (-1)^k 2P$, входящие в

формулу (1.45) для контактного напряжения. Исследование этой бесконечной системы ничем не будет отличаться от исследования системы (2.15).

Обратимся сначала к бесконечной системе (2.14). Для ее исследования оценим суммы

$$S_m = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} |A_{mk}| \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Имеем

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left| \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n [P_{k-m-n}(\cos \alpha) - P_{k+m-n}(\cos \alpha)] \right| \leq \\ &\leq \frac{\lambda}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=0}^k |C_n| |P_{k-m-n}(\cos \alpha)| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=0}^k |C_n| |P_{k+m-n}(\cos \alpha)| \right] = \\ &= \frac{\lambda}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|P_{k+m}(\cos \alpha)|}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |C_n| |P_{k+m-n}(\cos \alpha)| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|P_{k-m}(\cos \alpha)|}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |C_n| |P_{k-m-n}(\cos \alpha)| \right] \end{aligned}$$

Переменив порядок суммирования в повторных суммах, получим

$$\begin{aligned} S_m &\leq \frac{\lambda}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|P_{k+m}(\cos \alpha)|}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|P_{k-m}(\cos \alpha)|}{k} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|P_{k+m-n}(\cos \alpha)|}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|P_{k-m-n}(\cos \alpha)|}{k} \right] \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} T_m(\alpha) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|P_{k+m}(\cos \alpha)|}{k}, & T_{-m}(\alpha) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|P_{k-m}(\cos \alpha)|}{k} \\ R_m^{(n)}(\alpha) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|P_{m+p}(\cos \alpha)|}{p+n}, & R_{-m}^{(n)}(\alpha) &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|P_{p-m}(\cos \alpha)|}{p+n} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

последнее неравенство представим в виде

$$S_m \leq \frac{\lambda}{2} \left[T_m(\alpha) + T_{-m}(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| (R_m^{(n)}(\alpha) + R_{-m}^{(n)}(\alpha)) \right] \quad (2.16)$$

Можно показать, что величина S_m будет удовлетворять условию, при котором система (2.14) вполне регулярна.

Предварительно оценим каждую сумму, входящую в неравенство (2.16) в отдельности. Для этого воспользуемся известным результатом [7]: имеет место неравенство

$$|P_n(\cos \alpha)| < \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{n \sin \alpha}} \quad (0 < \alpha < \pi; \quad n = 1, 2, \dots)$$

Заметим, что константа $\sqrt{2/\pi}$ не может быть заменена меньшей. Ради простоты выкладок и получаемых далее формул эту константу заменим единицей, тем самым утверждая, что имеет место неравенство

$$|P_n(\cos \alpha)| < \frac{1}{\sqrt{n \sin \alpha}} \quad (0 < \alpha < \pi; n = 1, 2, \dots) \quad (2.17)$$

Используя это неравенство, найдем

$$T_m(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \sqrt{k+m}} < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} = \frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{\sin \alpha}}$$

Здесь $\zeta(x)$ ($x > 1$) — функция Римана [6,8].

Итак, справедливо неравенство

$$T_m(\alpha) < \frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{\sin \alpha}} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.18)$$

Чтобы найти более точную оценку для суммы $T_m(\alpha)$ заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \sqrt{k+m}} < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \left(\frac{1}{\sqrt{m+1}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{m+x}} \right)$$

Вычислив последний интеграл ([6], формула 2.246), получим

$$T_m(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \left(\frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \ln \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}} \right) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.19)$$

Легко показать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \ln \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}} = 0$$

Следовательно

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \ln \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}} \leq A \quad (m = 1, 2, \dots)$$

После выполнения элементарных вычислений последнее неравенство примет вид

$$m + 1 \leq \frac{1}{2} (1 + \operatorname{ch} A \sqrt{m})$$

Подставив сюда разложение функции $\operatorname{ch} A \sqrt{m}$ в степенной ряд, придем к неравенству

$$\left(\frac{A^2}{4} - 1 \right) m + \frac{A^4 m^2}{2 \cdot 4!} + \frac{A^6 m^3}{2 \cdot 6!} + \dots \geq 0$$

Отсюда видно, что для неотрицательности правой части достаточно считать, что

$$\frac{1}{4} A^2 - 1 \geq 0, \text{ или } A \geq 2$$

Таким образом, установлено неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \ln \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}} \leq 2 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.20)$$

Оценим теперь сумму $T_{-m}(\alpha)$. Пользуясь известной [6] формулой $P_{-n}(\cos \alpha) = P_{n-1}(\cos \alpha)$, а также равенством $P_0(\cos \alpha) = 1$, представим сумму $T_{-m}(\alpha)$ в следующем виде

$$T_{-m}(\alpha) = \sum_{k=1}^{m-2} \frac{|P_{m-k-1}(\cos \alpha)|}{k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|P_{k-m}(\cos \alpha)|}{k} + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \quad (m \geq 3)$$

Во второй сумме правой части заменим $k - m$ на k , а затем применим к первым двум членам неравенство (2.17), в результате чего получим (2.21)

$$T_{-m}(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \left[\sum_{k=1}^{m-2} \frac{1}{k \sqrt{m-k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+m) \sqrt{k}} \right] + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \quad (m \geq 3)$$

Далее оценим суммы

$$H_m = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k \sqrt{m-k}} \quad (m = 2, 3, \dots)$$

С этой целью заметим, что

$$H_m < \frac{1}{\sqrt{m-1}} + \int_1^m \frac{dx}{x \sqrt{m-x}} = \frac{1}{\sqrt{m-1}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \ln \frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}{\sqrt{m} - \sqrt{m-1}} \quad (m \geq 2)$$

Для второй суммы, входящей в правую часть неравенства (2.21), имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+m) \sqrt{k}} < \frac{1}{m+1} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(m+x) \sqrt{x}}$$

или, после вычисления последнего интеграла ([6], формула 2.246)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+m) \sqrt{k}} < \frac{1}{m+1} + \frac{\pi}{\sqrt{m}} - \frac{2}{\sqrt{m}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Используя выведенные неравенства, из неравенства (2.21) получим

$$T_{-m}(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \left[\frac{1}{\sqrt{m-1}} \ln \frac{\sqrt{m-1} + \sqrt{m-2}}{\sqrt{m-1} - \sqrt{m-2}} - \frac{2}{\sqrt{m}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{m}} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m-2}} + \frac{1}{m+1} \right] + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \quad (m \geq 3) \quad (2.22)$$

Из того же неравенства (2.21), используя неравенство (2.20), получим

$$T_{-m}(\alpha) < \frac{5}{6} + \frac{3 + \zeta(3/2)}{\sqrt{\sin \alpha}} \quad (m = 3, 4, \dots)$$

Отдельное рассмотрение сумм $T_{-1}(\alpha)$ и $T_{-2}(\alpha)$ приводит к неравенствам

$$T_{-1}(\alpha) < 1 + \frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{\sin \alpha}}, \quad T_{-2}(\alpha) < \frac{3}{2} + \frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{\sin \alpha}}$$

Сравнение последних трех неравенств показывает, что

$$T_{-m}(\alpha) < \frac{5}{6} + \frac{3 + \zeta(3/2)}{\sqrt{\sin \alpha}} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.23)$$

Способами, совершенно аналогичными изложенным, получаем неравенства

$$R_m^{(n)}(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \ln \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}} \right) \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (2.24)$$

$$R_m^{(n)}(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \left[1 + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \right] \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (2.25)$$

$$R_{-m}^{(n)}(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \left(\frac{1}{\sqrt{m-1}} \ln \frac{\sqrt{m-1} + \sqrt{m-2}}{\sqrt{m-1} - \sqrt{m-2}} - \frac{2}{\sqrt{m}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{m}} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{m-2}} + \frac{\pi}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m+1} \right) + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \quad \begin{matrix} (m = 3, 4, \dots) \\ (n = 1, 2, \dots) \end{matrix} \quad (2.26)$$

$$R_{-m}^{(n)}(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \left[3 + \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \right] + \frac{5}{6} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (2.27)$$

Наконец, для коэффициентов C_n при помощи (2.17) получим оценки

$$|C_1| < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}}, \quad |C_2| < \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2 \sin \alpha}} \right), \quad |C_n| < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} \frac{1}{(n-2)^{3/2}} \quad (n=3, 4, \dots)$$

Последние неравенства позволяют написать

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n| < \frac{1}{\sqrt{\sin \alpha}} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2 \sin \alpha}} \right) + \frac{\zeta(3/2)}{\sqrt{\sin \alpha}} \quad (2.28)$$

Учитывая (2.18), (2.23), (2.25), (2.27) и (2.28) из (2.16), найдем

$$S_m < \frac{\lambda}{\sin \alpha} \frac{1}{36} \left[\frac{29}{\sqrt{2}} + 131 + \left(171 + \frac{12}{\sqrt{2}} \right) \zeta \left(\frac{3}{2} \right) + 36 \zeta^2 \left(\frac{3}{2} \right) \right] \quad (m=1, 2, \dots)$$

Чтобы бесконечная система линейных уравнений (2.14) была вполне регулярной, необходимо выполнение условия [9]

$$S_m \leq \theta < 1 \quad (m=1, 2, \dots)$$

которое приводит к тому, что при значениях λ , удовлетворяющих условию

$$\frac{\lambda}{\sin \alpha} < 36 \left[\frac{29}{\sqrt{2}} + 131 + \left(171 + \frac{12}{\sqrt{2}} \right) \zeta \left(\frac{3}{2} \right) \zeta^2 \left(\frac{3}{2} \right) \right]^{-1}$$

бесконечная система (2.14) вполне регулярна. Подставив в правую часть этого неравенства $\zeta(3/2) = 2.612$ [8], после простых вычислений представим его в виде

$$\frac{\lambda}{\sin \alpha} < \frac{1}{25} \quad (2.29)$$

Таким образом, при условии (2.29) бесконечная система линейных уравнений (2.14) вполне регулярна.

Доказательство того, что бесконечная система линейных уравнений (2.15) при том же условии (2.29) также вполне регулярна, ничем не отличается от приведенного.

При других значениях параметра λ бесконечные системы (2.14) и (2.15) квазивполне регулярны. В самом деле, после некоторых упрощений выражений, фигурирующих в правых частях неравенств (2.19), (2.22), (2.24), (2.26) и (2.28), неравенство (2.16) примет вид

$$S_m < \frac{3\lambda}{\sqrt{\sin \alpha}} G_m \quad (m=3, 4, \dots) \quad (2.30)$$

$$G_m = \frac{2}{\sqrt{m-1}} \ln \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}} + \frac{4}{\sqrt{m-2}} + \frac{\pi}{\sqrt{m}} + \frac{3}{m-1} \quad (2.31)$$

Поскольку $\lim_{m \rightarrow \infty} G_m = 0$ при $m \rightarrow \infty$, правую часть (2.30) при любом λ можно сделать сколько угодно малой при достаточно большом m . Это обстоятельство позволяет утверждать, что обе бесконечные системы линейных уравнений (2.14) и (2.15) при

$$\frac{\lambda}{\sin \alpha} \geq \frac{1}{25}$$

квазивполне регулярны, причем можно точно указать тот номер N , начиная с которого указанные системы вполне регулярны.

Так как свободные члены бесконечных систем линейных уравнений (2.14) в (2.15) в совокупности ограничены, точнее стремятся к нулю со скоростью $O(m^{-1/2})$, то, согласно теории вполне регулярных и квазивполне регулярных систем [9], в классе ограниченных последовательностей они имеют единственные решения. Эти решения могут быть получены методом последовательных приближений, отправляясь от любых ограниченных в совокупности начальных значений. Они могут быть получены также методом редукции. После того как определены a_k и b_k , коэффициенты α_k и β_k могут быть найдены посредством формул

$$\alpha_k = \frac{a_k}{k}, \quad \beta_k = \frac{b_k}{k}$$

Если $a_k^{(n)}$ и $b_k^{(n)}$ — приближенные значения коэффициентов a_k и b_k , стремящихся при $n \rightarrow \infty$ к ним, то приближенные значения $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$ коэффициентов α_k и β_k можно определять по формулам

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{a_k^{(n)}}{k}, \quad \beta_k^{(n)} = \frac{b_k^{(n)}}{k}$$

Отметим, что $a_k^{(n)}$ и $b_k^{(n)}$ могут быть последовательными приближениями или же решениями усеченных систем конечного числа линейных уравнений, когда к бесконечным системам (2.14) и (2.15) применяется метод редукции.

В заключение отметим, что можно было бы получить более точные оценки. Однако это усложнило бы структуру окончательных формул.

§ 3. Исследование напряженного состояния упругих накладок. Исследованию напряженного состояния упругих накладок предпошлем изложение некоторых результатов, позволяющих, с одной стороны, обосновать выполненные выше формальные операции, а с другой стороны, подтверждающих законность применяемого здесь аналитического аппарата рядов Фурье. Во-первых, выясним вопрос о сходимости тригонометрических рядов, встречавшихся в предыдущих параграфах. Во-вторых, рассмотрим следующий важный вопрос. Коэффициенты α_k и β_k , при помощи которых составляются тригонометрические ряды для функций $\varphi'(t)$ и $\varphi(t)$, определяются из бесконечных систем линейных уравнений. Заранее нет гарантии, что определенные таким образом коэффициенты α_k и β_k будут коэффициентами Фурье некоторой функции с определенными свойствами. Вопросы существования и определения функции, имеющей наперед заданную последовательность чисел в качестве последовательности коэффициентов Фурье, относятся к известной тригонометрической проблеме моментов. Однако существующие критерии из этой области практически непригодны, так как не позволяют в конкретных случаях проверить есть ли для заданной последовательности чисел такая функция определенного класса, которая имела бы эту последовательность чисел в качестве своих коэффициентов Фурье. Выяснение этих вопросов для рассмотренных тригонометрических рядов оказывается элементарным и основывается на оценках их коэффициентов.

Приступим к оценке коэффициентов. Для этого бесконечные системы (2.14), (2.15) запишем в виде

$$\gamma_m = \lambda \gamma d_m m^{1/2-\delta} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2-\delta} \gamma_k \quad (3.1)$$

$$\delta_m = e_m m^{1/2-\delta} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk} \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2-\delta} \delta_k \quad (3.2)$$

$$\gamma_m = a_m m^{1/2-\delta} = m^{3/2-\delta} \alpha_m, \quad \delta_m = b_m m^{1/2-\delta} = m^{3/2-\delta} \beta_m \quad (m = 1, 2, \dots)$$

а δ — сколь угодно малое положительное число. Оценим суммы

$$V_m = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} |A_{mk}| \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2-\delta} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Имеем

$$V_m < \lambda m^{1/2-\delta} \sum_{k=1}^{\infty} |A_{mk}|$$

Принимая во внимание (2.30), можем записать

$$V_m < \frac{3\lambda m^{1/2-\delta}}{\sqrt{\sin \alpha}} G_m \quad (m = 3, 4, \dots). \quad (3.3)$$

Пользуясь правилом Лопиталья легко показать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^\delta} \ln \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}} = 0 \quad (3.4)$$

Учитывая последнее равенство и используя выражения G_m из (2.31), заключаем, что

$$\lim V_m = 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

Чтобы получить для V_m оценку, не зависящую от m , заметим, что вследствие (3.4)

$$\frac{1}{m^\delta} \ln \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}} \leq K \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Отсюда, как и при выводе неравенства (2.20), получим

$$m \leq \frac{K^2 m^{2\delta}}{2 \cdot 2} + \frac{K^4 m^{4\delta}}{2 \cdot 4!} + \dots + \frac{K^{2k} m^{2k\delta}}{2 \cdot (2k)!} + \dots \quad (3.6)$$

Легко видеть, что

$$\frac{K^{2k} m^{2k\delta}}{2 \cdot (2k)!} > \frac{K^{2k} m^{k/q}}{2 \cdot (2k)!} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad q = E(\delta^{-1})$$

Здесь $E(x)$ — целая часть числа x . Выберем k таким образом, чтобы

$$\frac{K^{2k} m^{k/q}}{2 \cdot (2k)!} > m \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Очевидно, достаточно считать $k = q$. Следовательно, если

$$K \geq [2 \cdot (2q)!]^{1/2q}$$

то неравенство (3.6) удовлетворяется. Таким образом

$$\frac{1}{m^\delta} \ln \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}} \leq L = [2 \cdot (2q)!]^{1/2q} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

Используя неравенство (3.7), при помощи (2.31) находим¹

$$V_m < \lambda V / \sqrt{\sin \alpha}, \quad V = 3(L\sqrt{6} + 4\sqrt{3} + \pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}) \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

Положив

$$\theta = \frac{\lambda V}{\sqrt{\sin \alpha}} \quad (3.9)$$

найдем, что $\theta < 1$, если λ удовлетворяет условию

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\sin \alpha}} < \frac{1}{V} \quad (3.10)$$

Таким образом, если имеет место условие (3.10), то бесконечная система (3.1) вполне регулярна, а в противном случае, как это следует из (3.5), она квазивполне регулярна. Очевидно, что это утверждение справедливо и для бесконечной системы (3.2).

Далее легко найти, что

$$\begin{aligned} |\gamma_m| &\leq \lambda |\gamma| m^{1/2-\delta} |d_m| + \lambda M \sum_{k=1}^{\infty} |A_{mk}| \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2-\delta} < \\ &< \lambda |\gamma| m^{1/2-\delta} |d_m| + MV_m \quad (m=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.11)$$

При выводе этого неравенства использовано то обстоятельство, что $|\gamma_k| \leq M$ ($k=1, 2, \dots$), поскольку, согласно только что доказанному, бесконечная система (3.1) линейных уравнений вполне регулярна или квазивполне регулярна и, следовательно, имеет единственное ограниченное решение.

Приняв во внимание неравенства (2.17) и (3.5), из (3.11) найдем, что $\lim \gamma_m = 0$ при $m \rightarrow \infty$. Аналогично, можно показать, что также $\lim \delta_m = 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Последнее обстоятельство позволяет утверждать, что

$$\alpha_m = o\left(\frac{1}{m^{3/2-\delta}}\right), \quad \beta_m = o\left(\frac{1}{m^{3/2-\delta}}\right)$$

Значит, имеют место и формулы

$$\alpha_m = O\left(\frac{1}{m^{3/2-\delta}}\right), \quad \beta_m = O\left(\frac{1}{m^{3/2-\delta}}\right) \quad (3.12)$$

Поскольку коэффициенты α_m и β_m величины указанных порядков, тригонометрический ряд, входящий в формулу (1.19), сходится абсолютно и равномерно. Из одной лишь равномерной сходимости вытекает, что этот тригонометрический ряд является рядом Фурье некоторой функции $F(t) - \frac{1}{2}Pt/\pi$. В интервале $(-\alpha, \alpha)$ она обозначается у нас через $\varphi(t) - \frac{1}{2}Pt/\pi$. Таким образом, функция $\varphi(t)$ ($-\alpha \leq t \leq \alpha$), продолженная на интервал $(-\pi, \pi)$ посредством формулы (1.20), представляется рядом Фурье (1.22).

Исследуем сходимость тригонометрического ряда, полученного формальным дифференцированием ряда Фурье (1.22), т. е. ряда, входящего в правую часть (1.15).

¹ Для $m \geq 3$ это неравенство получается из (3.3). Но оно имеет место и для $m=1, 2$.

Коэффициенты α_k и β_k этого ряда определяются, как было показано, из бесконечных систем линейных уравнений (2.8), (2.9), вывод которых основывается на формуле (2.1). Следовательно, сходимость тригонометрического ряда (1.15) равносильна сходимости ряда, входящего в правую часть равенства (2.1).

Далее введем обозначения

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \sin(k - n + 1/2)t - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \cos(k - n + 1/2)t \quad (-\alpha \leq t \leq \alpha) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\Psi(t) = 2P \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \cos(k - n + 1/2)t \quad (3.14)$$

Приняв во внимание (3.12) и (2.28), обнаружим, что ряд (3.13) на отрезке $[-\alpha, \alpha]$ сходится абсолютно и равномерно и, следовательно, его сумма $\Phi(t)$ на том же отрезке является непрерывной функцией.

Обращаясь к ряду (3.14), переставим там порядок суммирования, а затем используем известные формулы [6]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin kt}{k} = -\frac{t}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kt}{k} = \ln \frac{1}{2 \cos 1/2 t} \quad (-\pi < t < \pi) \quad (3.15)$$

После выполнения элементарных вычислений равенство (3.14) примет вид

$$\begin{aligned} \Psi(t) = & 2P \cos \frac{t}{2} \left\{ \ln \frac{1}{2 \cos 1/2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n \left[\cos nt \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kt}{k} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sin nt \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin kt}{k} \right] \right\} + 2P \sin \frac{t}{2} \left\{ \frac{t}{2} - \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n \left[\cos nt \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin kt}{k} - \sin nt \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kt}{k} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Так как числовая последовательность $u_k = (-1)^k k^{-1}$ будет последовательностью ограниченной вариации, т. е.

$$|\Delta u_1| + |\Delta u_2| + |\Delta u_3| + \dots < \infty \quad (\Delta u_k = u_k - u_{k-1})$$

Поэтому ряды (3.15) при $\varepsilon < |t| < \pi$ (ε — сколь угодно малое положительное число) сходятся равномерно [10]. При $t = 0$ они, очевидно, просто сходятся. Из сказанного следует, что

$$\begin{aligned} |q_n(t)| \leq K, \quad |r_n(t)| \leq K \quad (0 \leq t \leq \pi) \\ q_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kt}{k}, \quad r_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin kt}{k} \end{aligned}$$

На основании последних неравенств и неравенств (2.28) убедимся что ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n \frac{\cos nt}{\sin nt} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{\cos kt}{\sin kt}$$

в интервале $(-\pi, \pi)$, а следовательно, и на отрезке $-\alpha \leq t \leq \alpha$ сходятся абсолютно и равномерно. Поэтому функция $\Psi(t)$ на отрезке $[-\alpha, \alpha]$ непрерывна.

Таким образом, доказано, что

$$\varphi'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} k (\beta_k \cos kt - \alpha_k \sin kt) = \frac{\chi(t)}{\sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}} \quad (-\alpha < t < \alpha) \quad (3.17)$$

Здесь функция

$$\chi(t) = P\pi^{-1} \cos \frac{1}{2}t - 2\lambda\gamma \sin \frac{1}{2}t - \lambda [\Phi(t) - \Psi(t)]$$

на отрезке $[-\alpha, \alpha]$ будет непрерывной функцией.

Из (3.17) следует, что функция $\varphi'(t)$ в интервале $(-\alpha, \alpha)$ абсолютно интегрируема. Это дает основание утверждать, что $F(t)$ из (1.18) в интервале $(-\pi, \pi)$ является абсолютно непрерывной функцией. Но согласно (1.20) $F(t) \equiv \varphi(t)$ при $-\alpha \leq t \leq \alpha$. Следовательно, функция $\varphi(t)$ ($-\alpha \leq t \leq \alpha$) также будет абсолютно непрерывной функцией, представляющейся рядом Фурье (1.22). Остается воспользоваться следующим результатом [10], чтобы убедиться в том, что ряд (1.15) является рядом Фурье¹ для $\varphi'(t)$. Тригонометрический ряд, полученный формальным дифференцированием ряда Фурье абсолютно непрерывной функции, является рядом Фурье для ее производной. Таким образом, обосновано, что ряд Фурье функции $\varphi(t)$ из (1.22) можно почленно дифференцировать и в результате получится снова ряд Фурье, представляющий функцию $\varphi'(t)$.

Обращаясь к исследованию напряженного состояния упругих накладок, вспомним, что контактные напряжения определяются формулой (1.44), точнее (1.45). Эта формула была представлена в виде (3.17) с явно выделенными особенностями, которые характеризуют напряженное состояние упругих накладок вблизи их концов. Из этой формулы видно, что контактные напряжения на концах упругих накладок обращаются в бесконечность интегрируемого порядка. Приведенные рассуждения одновременно с этим позволяют утверждать, что закон распределения контактных напряжений под периодически повторяющимися накладками имеет такую аналитическую структуру, что особенности, присущие напряженному состоянию упругих накладок вблизи их концов, имеют такой же тип, как и в случае периодически повторяющихся жестких штампов. Таким

¹ Точнее говоря, здесь речь идет о ряде Фурье для функции $f(t)$, определенной формулой (1.16), которая в интервале $(-\alpha, \alpha)$ совпадает с функцией $\varphi'(t)$. Это замечание относится и к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$.

образом, утверждение, что в формуле (1.44) явно выделены особенности, характеризующие напряженное состояние упругих накладок вблизи их концов, высказанное в § 1, теперь полностью обосновано.

Отметим следующее обстоятельство. Коэффициенты α_k и β_k , входящие в формулы (1.44) и (3.17), определяются методом последовательных приближений или методом редукции из бесконечных систем (2.8) и (2.9), представленных в виде (2.14), (2.15) или в виде (3.1), (3.2). Если в формуле (1.44) или (3.17) вместо коэффициентов α_k и β_k подставить последовательные приближения $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$, сходящиеся при $n \rightarrow \infty$ к α_k и β_k соответственно, то получится некоторая функциональная последовательность

$$\chi_n(t) = \frac{P\pi^{-1} \cos^{1/2} t - 2\lambda\gamma \sin^{1/2} t - \lambda[\Phi_n(t) - \Psi(t)]}{\sqrt{2}(\cos t - \cos \alpha)} \quad (-\alpha < t < \alpha) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \sin(k - n + 1/2)t - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(n)} \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \cos(k - n + 1/2)t \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Докажем, что последовательность $\chi_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно стремится к функции $\varphi'(t)$. Легко видеть, что такое доказательство сводится к доказательству равномерной сходимости последовательности $\Phi_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ к $\Phi(t)$.

Приступая к последнему доказательству, заметим, что можно положить

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{\gamma_k^{(n)}}{k^{3/2-\delta}}, \quad \beta_k^{(n)} = \frac{\delta_k^{(n)}}{k^{3/2-\delta}} \quad (3.20)$$

где $\gamma_k^{(n)}$ и $\delta_k^{(n)}$ — последовательные приближения, стремящиеся при $n \rightarrow \infty$ к решениям γ_k и δ_k бесконечных систем линейных уравнений (3.1), (3.2).

Имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_n(t) - \Phi(t)| \leq & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\gamma_k^{(n)} - \gamma_k|}{k^{3/2-\delta}} \sum_{n=0}^k |C_n| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\delta_k^{(n)} - \delta_k|}{k^{3/2-\delta}} \sum_{n=0}^k |C_n| \\ & (-\alpha \leq t \leq \alpha) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Далее необходимо получить оценки для $|\gamma_k^{(n)} - \gamma_k|$ и $|\delta_k^{(n)} - \delta_k|$. Для этого воспользуемся принципом сжатых отображений Банаха [11]. Этот принцип позволяет установить не только вполне регулярность или квазивполне регулярность бесконечных систем линейных уравнений (2.14), (2.15) или (3.1), (3.2), но и получить нужные нам оценки. В связи с этим приведем некоторые элементарные сведения из функционального анализа [11].

Введем в рассмотрение множество Ξ всех ограниченных числовых последовательностей $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$. Это значит, что $|\xi_i| \leq K_x$ для всех i , где K_x — постоянная, зависящая только от элемента x . Пусть $x = \{\xi_i\}$ и $y = \{\eta_i\}$ принадлежат Ξ . Введем метрику равенством

$$\rho(x, y) = \sup_i \{\xi_i - \eta_i\}$$

Как известно [11], множество Ξ с введенной таким равенством метрикой становится полным метрическим пространством. Оно называется пространством m ограниченных числовых последовательностей.

Рассмотрим в пространстве m линейный оператор $y = Ax$, заданный при помощи равенств

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k + b_i \quad (i = 1, 2, \dots), \quad \{b_i\} \in m \quad (3.22)$$

Предположим, что бесконечная матрица $\|a_{ik}\|_{i,k=1}^{\infty}$ такова, что если $\{\xi_i\} \in m$, то и $\{\eta_i\} \in m$, т. е. оператор A переводит элементы пространства m снова в элементы этого же пространства. Имеем

$$\begin{aligned} \rho(y_1, y_2) &= \rho(Ax_1, Ax_2) = \sup_i |\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}| = \\ &= \sup_i \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} (\xi_k^{(1)} - \xi_k^{(2)}) \right| \leq \sup_i \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| |\xi_k^{(1)} - \xi_k^{(2)}| \leq \\ &\leq \sup_i \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \sup_k |\xi_k^{(1)} - \xi_k^{(2)}| = \sup_i \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \rho(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leq \theta < 1 \quad (3.23)$$

при всех i . Если выполнено условие (3.23), то, согласно принципу сжатых отображений Банаха, можно утверждать, что оператор A , заданный равенством (3.22), имеет в пространстве m единственную неподвижную точку x_0 , такую, что $Ax_0 = x_0$. Точка x_0 может быть найдена методом последовательных приближений, отправляясь от любого начального элемента X . Эти последовательные приближения сходятся к x_0 в метрике пространства m . Иными словами, при выполнении условия (3.23) бесконечная система линейных уравнений

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k + b_i \quad (3.24)$$

в пространстве ограниченных числовых последовательностей имеет единственное решение $\{\xi_i\}$, которое можно получить методом последовательных приближений, отправляясь от любого начального элемента из того же пространства, иными словами система (3.24) вполне регулярна.

Отметим, что при этом оценка близости n -го приближения x_n к неподвижной точке x_0 дается формулой

$$\rho(x_n, x_0) = \frac{\theta^n}{1 - \theta} \rho(X, AX) \quad (3.25)$$

В том случае, когда вместо условия (3.23) выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leq \theta < 1 \quad (i = N+1, \dots), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

определенный выше оператор A можно рассматривать в подпространстве R_N пространства m , состоящем из элементов, первые N компоненты которых равны нулю. В этом случае, опять на основании принципа Банаха, можно утверждать, что оператор A в подпространстве R_N имеет единственную неподвижную точку, т. е. бесконечная система (3.24) квазиполностью регулярна.

Таким образом, классическая теория вполне регулярных и квазивполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений укладывается в общую схему, представляющую принцип сжатых отображений Банаха.

Используем теперь оценку (3.25) к бесконечным системам (3.1), (3.2). Имеем

$$\rho(x_n, x_0) = \frac{\theta^n}{1-\theta} \rho(X, A_1 X), \quad \rho(y_n, y_0) = \frac{\theta^n}{1-\theta} \rho(X, A_2 X),$$

где

$$x_n = \{\gamma_k^{(n)}\}, \quad x_0 = \{\gamma_k\}, \quad y_n = \{\delta_k^{(n)}\}, \quad y_0 = \{\delta_k\}$$

а A_1 и A_2 — операторы, соответствующие в указанном выше смысле бесконечным системам линейных уравнений (3.1), (3.2) соответственно.

Возвращаясь к формуле (3.21), находим

$$|\Phi_n(t) - \Phi(t)| \leq \frac{2\theta^n \mu}{1-\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2-\delta}} \sum_{n=0}^k |C_n| \quad (-\alpha \leq t \leq \alpha) \quad (3.26)$$

где

$$\mu = \max(\mu_1, \mu_2), \quad \mu_1 = \rho(X, A_1 X), \quad \mu_2 = \rho(X, A_2 X) \quad (3.27)$$

а θ определяется формулой (3.9).

Используя неравенство (2.28), из (3.26) получим

$$|\Phi_n(t) - \Phi(t)| < \frac{2\theta^n \mu}{1-\theta} \frac{5 + 3\zeta^{(3/2)}}{3 \sqrt{\sin \alpha}} \zeta \left(\frac{3}{2} - \delta \right) \quad (-\alpha \leq t \leq \alpha) \quad (3.28)$$

Неравенство (3.28) показывает справедливость высказанного выше утверждения.

Таким образом, при λ , удовлетворяющих условию (3.10), последовательность $\chi_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно t ($-\alpha < t < \alpha$) стремится к функции $\varphi'(t)$. Легко показать, что это утверждение имеет место и в том случае, когда λ не удовлетворяет условию (3.10). На этом, однако, останавливаться не будем.

Рассмотрим выражение

$$|\chi_n(t) - \varphi'(t)| = \frac{\lambda |\Phi_n(t) - \Phi(t)|}{\sqrt{2(\cos t - \cos \alpha)}} \quad (-\alpha < t < \alpha)$$

представляющее собой абсолютную разность между приближенными и истинными выражениями контактных напряжений под упругими накладками. Желая оценить эту разность, заметим, что функция $[2(\cos t - \cos \alpha)]^{-1/2}$ определяет те особенности, которые присущи контактным напряжениям вблизи концов упругих накладок. Поэтому естественно о близости приближенных выражений $\chi_n(t)$ контактных напряжений к истинным $\varphi'(t)$ судить по оценке разности $|\Phi_n(t) - \Phi(t)|$. Эту оценку, представленную формулой (3.28), можем записать в виде¹

$$\sup_{t \in (-\alpha, \alpha)} |\Phi_n(t) - \Phi(t)| < \frac{2\theta^n \mu}{1-\theta} \frac{5\zeta^{(3/2)} + 3\zeta^{(3/2)}}{3 \sqrt{\sin \alpha}} \quad (3.29)$$

¹ Практически можно считать $\delta = 0$.

Займемся теперь оценкой μ_1 и μ_2 из (3.27). Известно, что выбор элемента X произвольный и влияет только на быстроту сходимости последовательных приближений. В качестве X для случая оператора A_1 или же бесконечной системы (3.1) возьмем нулевой элемент. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sup_m \{ \lambda |\gamma| m^{1/2-\delta} |P_{-m}(\cos \alpha) - P_m(\cos \alpha)| \} \leq \\ &\leq \lambda |\gamma| \left\{ \sup_m m^{1/2-\delta} |P_{-m}(\cos \alpha)| + \sup_m m^{1/2-\delta} |P_m(\cos \alpha)| \right\} < \\ &< \frac{\lambda |\gamma|}{\sqrt{\sin \alpha}} \left(\sup_{m=2,3,\dots} \left(\frac{m}{m-1} \right)^{1/2} + 1 \right) < \frac{\lambda |\gamma| (1 + \sqrt{2})}{\sqrt{\sin \alpha}} \end{aligned}$$

В случае оператора A_2 или же бесконечной системы (3.2) примем $X = \{(-1)^k 2P\}$. Получим

$$\mu_2 = \frac{P}{2\pi} \sup_m [m^{1/2-\delta} |P_m(\cos \alpha) + P_{-m}(\cos \alpha)|] < \frac{P(1 + \sqrt{2})}{2\pi \sqrt{\sin \alpha}}$$

Таким образом, имеют место оценки

$$\mu_1 < \frac{\lambda |\gamma| (1 + \sqrt{2})}{\sqrt{\sin \alpha}}, \quad \mu_2 < \frac{P(1 + \sqrt{2})}{2\pi \sqrt{\sin \alpha}} \quad (3.30)$$

Отсюда видно, что константы μ_1 и μ_2 , следовательно, и μ , зависят от величин λ , $|\gamma|$ и P .

Остановившись на n -х приближениях $\{\gamma_k^{(n)}\}$ и $\{\delta_k^{(n)}\}$, которые строятся соответственно из бесконечных систем линейных уравнений (3.1), (3.2), отталкиваясь от указанных выше начальных элементов X , находим по формулам (3.20) $\{\alpha_k^{(n)}\}$ и $\{\beta_k^{(n)}\}$. Затем по формулам (3.18), (3.19) составляем функции $\chi_n(t)$ и $\Phi_n(t)$. Эти функции определяют приближенные выражения контактных напряжений. Насколько они близки к истинному выражению контактных напряжений, видно из неравенства (3.29). Это неравенство показывает, что $\sup |\Phi_n(t) - \Phi(t)|$ при $t \in (-\alpha, \alpha)$ с увеличением номера n последовательных приближений становится все меньше и меньше.

Несколько подробнее остановимся на первом приближении. Для первых приближений $\{\gamma_k^{(1)}\}$ и $\{\delta_k^{(1)}\}$ из бесконечных систем (3.1), (3.2) находим

$$\gamma_k^{(1)} = \lambda \gamma k^{1/2-\delta} [P_{-k}(\cos \alpha) - P_k(\cos \alpha)] \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\delta_k^{(1)} = \frac{P}{2\pi} k^{1/2-\delta} [P_k(\cos \alpha) + P_{-k}(\cos \alpha)]$$

и, следовательно, по формулам (3.20)

$$\alpha_k^{(1)} = \lambda \gamma \frac{P_{-k}(\cos \alpha) - P_k(\cos \alpha)}{k}, \quad \beta_k^{(1)} = \frac{P}{2\pi} \frac{P_k(\cos \alpha) + P_{-k}(\cos \alpha)}{k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

По формуле (2.12) находим приближенное значение (в первом приближении) константы γ

$$\gamma \approx P \left[2 - 2\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{-k}(\cos \alpha) - P_k(\cos \alpha)}{k} \cos k\alpha \right]^{-1} \quad (3.31)$$

Таким образом, контактные напряжения под упругими накладками, определяемые формулой (1.45), в первом приближении могут быть вычислены по расчетной формуле

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \frac{P \cos(\pi x / 2l)}{l \sqrt{2 [\cos(\pi x / l) - \cos(\pi a / l)]}} - \frac{2\pi\lambda\gamma \sin(\pi x / 2l)}{l \sqrt{2 [\cos(\pi x / l) - \cos(\pi a / l)]}} - \\ & - \frac{\lambda\pi}{l \sqrt{2 [\cos(\pi x / l) - \cos(\pi a / l)]}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\gamma \frac{P_{-k}(\cos \alpha) - P_k(\cos \alpha)}{k} \times \right. \\ & \times \sum_{n=0}^k (-1)^n C_n \sin \left[(k - n + 1/2) \frac{\pi x}{l} \right] - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{P}{2\pi} \frac{P_k(\cos \alpha) + P_{-k}(\cos \alpha)}{k} - (-1)^k \frac{2P}{k} \right] \times \\ & \times \left. \sum_{n=1}^k (-1)^n C_n \cos \left[(k - n + 1/2) \frac{\pi x}{l} \right] \right\} \quad (-a < x < a) \quad (3.32) \end{aligned}$$

где γ и C_n определяются соответственно из формул (3.31) и (1.43).

Допущенная при этом абсолютная ошибка определяется согласно (3.29) неравенством

$$\sup_{t \in (-a, a)} |\Phi_1(t) - \Phi(t)| < \frac{2\theta\mu}{1-\theta} \frac{5\zeta^{(3/2)} + 3\zeta^2^{(3/2)}}{3\sqrt{\sin \alpha}} \quad (3.33)$$

где θ определяется формулой (3.9), а μ — формулами (3.30). Очевидно, что левая часть неравенства (3.33) сколь угодно мала при достаточно малых λ .

Соответствующие оценки можно получить и в том случае, когда λ не удовлетворяет неравенству (3.10) и, следовательно, бесконечные системы линейных уравнений (3.1), (3.2) квазивполне регулярны.

Поступила 5 VI 1969

Институт математики и
механики АН АрмССР

ЛИТЕРАТУРА

1. А р у т ю н я н Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. Ш т а е р м а н И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. Ч и б р и к о в а Л. И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1962, т. 122, кн. 3.
4. К о г а н Х. М. Об одном сингулярном интегро-дифференциальном уравнении. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 2.
5. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.
6. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4. М., Физматгиз, 1962.
7. С е г ё Г. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.
8. Я н к е Е., Э м д е Ф., Л ё ш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1968.
9. К о н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5. М.—Л., Физматгиз, 1962.
10. Б а р и Н. К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.
11. Л ю с т е р н и к, Л. А., С о б о л е в В. И. Элементы функционального анализа. Изд. 2. М., «Наука», 1965.