Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

К ОСНОВАМ ТЕОРИИ РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИН В УПРУГИХ ТЕЛАХ

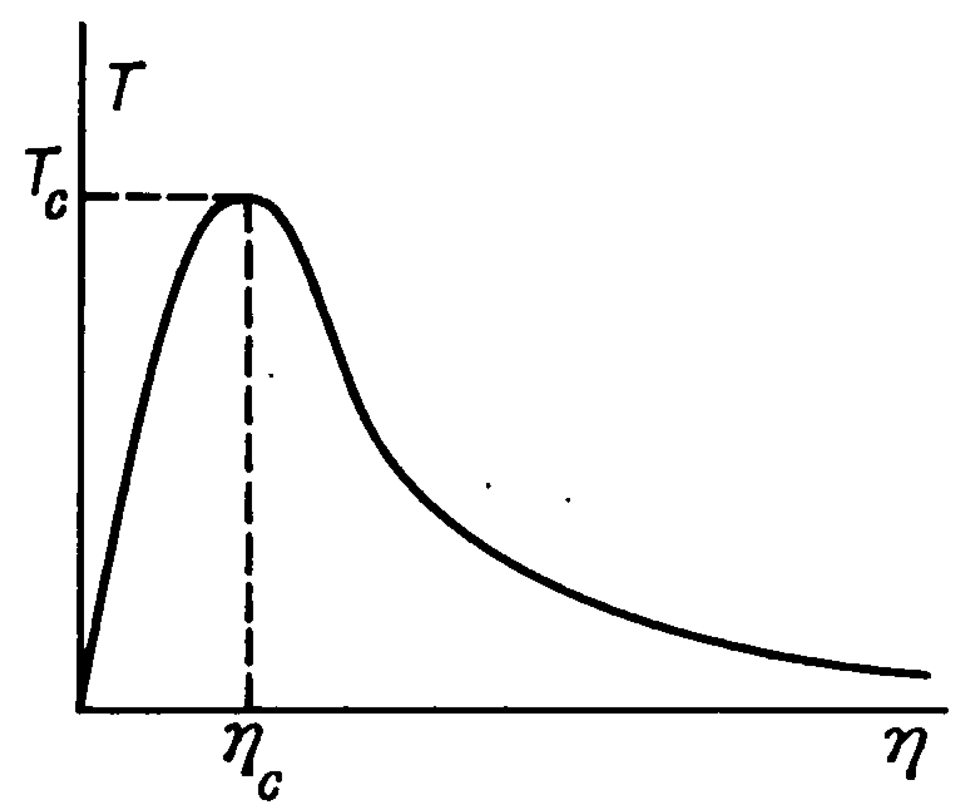
В. В. Новожилов

(Ленинград)

В работе получают дальнейшее развитие, уточняются и приводятся в систему положения, высказанные в [9]. Исходя из закона взаимодействия атомов, предлагается концепция, рассматривающая трещины в упругих телах как нетривиальные формы равновесной деформации. Образование трещин трактуется как потеря устойчивости (в большом) тривиальных форм равновесия. Уточняется формулировка критерия хрупкого разрушения в окрестности конца трещины. На примере задачи А. Гриффитса приближенно оценивается несущая способность тела, имеющего равновесную трещину.

1. Обозначим через $T = D\sigma$ (где $D = 2a$ — атомный диаметр) силу взаимодействия между двумя параллельными рядами атомов, отнесенную к единице длины этих рядов. Зависимость T от изменения расстояния между центрами атомов 2η имеет вид, показанный на фиг. 1. Одной из подходящих аппроксимаций этой зависимости будет выражение

$$T = D\sigma = 2E\eta e^{-\eta/\eta_c} \tag{1.1}$$



Фиг. 1

где η_c — значение η, соответствующее максимальному значению T ($T_c = D\sigma_c$, E — модуль Юнга, σ_c — предел прочности на разрыв). Из (1.1) вытекают соотношения

$$T_m = 2E\eta_c e^{-1}, \qquad \sigma_c = \frac{E\eta_c}{a} e^{-1} \tag{1.2}$$

$$\sigma = \sigma_c \frac{\eta}{\eta_c} e^{1-\eta/\eta_c} \tag{1.3}$$

на основании которых

$$\gamma = \frac{1}{2}\int_{\eta_c}^{\infty} \sigma d\eta = \eta_c\sigma_c = e\frac{\sigma_c^2 a}{E} \approx 1.35\frac{D\sigma_c^2}{E} \tag{1.4}$$

где γ — плотность поверхностной энергии упругого твердого тела. Результат (1.4) отличается от известной формулы (1.5)

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{\sigma_c^2 D}{E} \tag{1.5}$$

числовым коэффициентом. Однако формула (1.5), будучи выведена в предположении, что кривая $\sigma \sim \eta$ аппроксимирована полусинусоидой [1], вероятно, преуменьшает γ. Разумеется, могут рассматриваться и другие формы зависимости σ от η, например

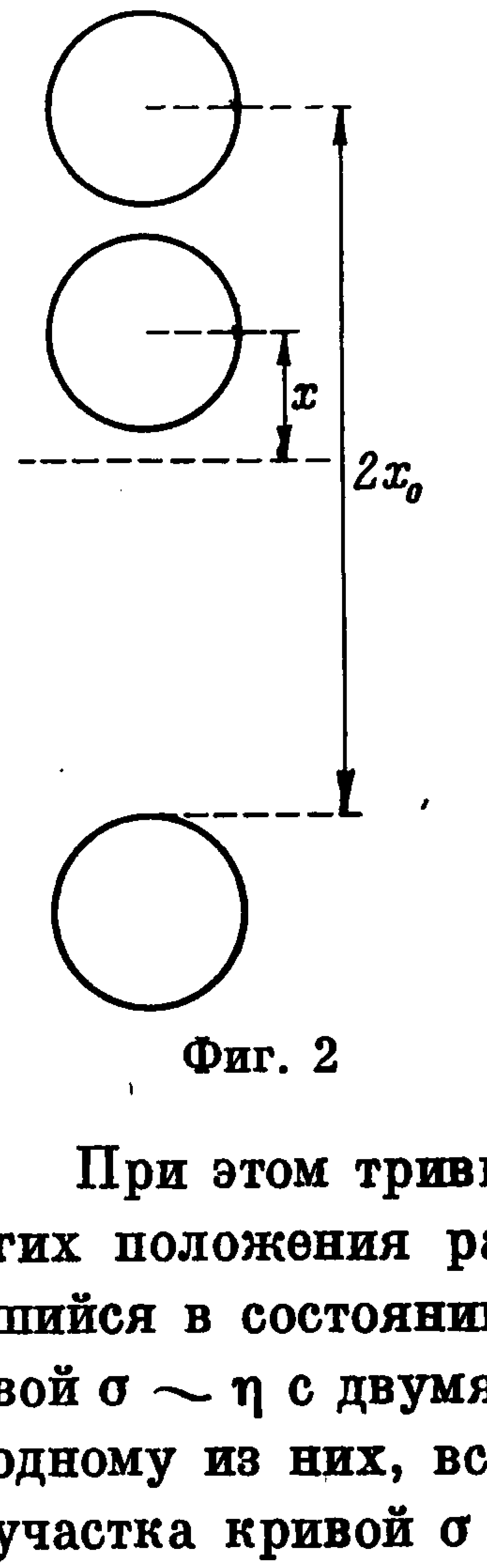
$$\sigma = \frac{E}{k}\frac{1}{(1+\eta/a)^m}\left[1-\frac{1}{(1+\eta/a)^k}\right] \tag{1.6}$$

Данному выражению соответствуют соотношения

$$\sigma_c = \frac{E}{m}\frac{1}{(1+k/m)^{(1+m)/k}}, \quad \eta_c = D\left[\left(1+\frac{k}{m}\right)^{1/k}-1\right]$$

$$\gamma = ED\frac{2m+k-1}{2m(m-1)(m+k-1)}\frac{1}{(1+k/m)^{(m+k-1)/k}} \tag{1.7}$$

которые сложнее чем (1.2), (1.4): это заставляет предпочесть формулу (1.1) формуле (1.6). Качественный характер дальнейшего исследования позволяет не останавливаться на вопросе, какая из двух приведенных аппроксимаций дает возможность ближе подойти к действительности.



Фиг. 2

2. Рассмотрим следующую ситуацию (фиг. 2). Пусть расстояние между двумя закрепленными в пространстве атомами равно $2x_0 \geqslant D + 4\eta_c$ и пусть между ними имеется еще один атом, подверженный только силам взаимодействия с фиксированными атомами. Принимая, что эти силы подчиняются закону (1.1), нетрудно установить, что промежуточный атом имеет, кроме тривиального положения равновесия $x_1 = 0$, еще два положения равновесия $x_{2,3} = \pm x^*$, где x_2, x_3 суть корни трансцендентного уравнения

$$x = (x_0 - {}^1/_2 D)\,\mathrm{th}\,({}^1/_2 x\eta_c) \tag{2.1}$$

При этом тривиальное положение равновесия неустойчиво, а два других положения равновесия устойчивы. Поэтому внешний атом, оказавшийся в состоянии взаимодействия по закону нисходящего участка кривой $\sigma \sim \eta$ с двумя смежными с ним атомами, неизбежно будет притянут к одному из них, вступив с ним во взаимодействие по закону восходящего участка кривой $\sigma \sim \eta$.

Отсюда видно, что равновесие атомов, взаимодействующих по закону нисходящей ветви кривой $\sigma \sim \eta$, неустойчиво. Если бы все атомы тела оказались в таком состоянии, то оно утратило бы способность сопротивляться деформации. Более того, оно не могло бы сопротивляться деформации и в том случае, если бы в неустойчивом взаимодействии оказались все атомы двух смежных слоев, пересекающих тело. Из сказанного следует вывод, что в упругом теле, находящемся в состоянии устойчивой равновесной деформации, взаимодействие по закону нисходящего участка кривой $\sigma \sim \eta$ может существовать только локально. Оно может возникать лишь на участках смежных атомных слоев при условии, что атомы, не принадлежащие этим участкам, находятся в состоянии устойчивого взаимодействия с атомами других атомных слоев. Как выяснится из дальнейшего, при равновесии упругих тел с наличием в них участков атомных слоев, взаимодействующих по закону нисходящей ветви кривой $\sigma \sim \eta$, наибольшие расстояния между атомными слоями в пределах таких участков, как правило, существенно превосходят атомный диаметр. Вследствие этого о подобных участках можно говорить как о щелях, нарушающих сплошность тела. Вокруг же этих щелей все атомы находятся в состоянии устойчивого взаимодействия по закону восходящей ветви кривой $\sigma \sim \eta$, в соответствии с чем расстояние между атомами в окрестности щелей $x < D + 2\eta_c$, и можно считать, что сплошность тела здесь сохраняется.

На основании изложенного, при теоретическом исследовании равновесных деформаций упругих тел, всегда можно трактовать тело как сплошную среду, используя методы теории упругости. При желании, однако, можно учесть не только формы равновесия, когда все атомы взаимодействуют по закону восходящей (устойчивой) ветви кривой $\sigma \sim \eta$, но и такие формы, когда в теле возникают щелевидные незаполненные атомами области, между берегами которых осуществляется взаимодействие по закону нисходящей ветви кривой $\sigma \sim \eta$. Тогда надо допустить возможность появления внутри тела новых границ, имеющих вид разрезов. Форма и размеры этих разрезов заранее неизвестны. Они могут быть определены из уравнений теории упругости при задании на берегах каждой щели соответствующих граничных условий, вытекающих из (1.1) при $\eta > \eta_c$.

Строгая постановка и решение описанной существенно нелинейной задачи представляют собой большие трудности, ввиду чего на первом этапе ее исследования целесообразно наметить приближенный подход, улавливающий хотя бы качественную сторону изучаемого явления. Такой подход может быть сформулирован на основе следующих упрощающих допущений:

1) соотношение между напряжениями и деформациями на восходящем (устойчивом) участке кривой ($\eta < \eta_c$), т. е. во всей области тела, где сохраняется его сплошность, аппроксимируется законом Гука;

2) уравнения равновесия и формулы, связывающие деформации с перемещениями, принимаются в линейной форме, т. е. задача трактуется как геометрически линейная;

3) нисходящий участок зависимости $\sigma \sim \eta$ аппроксимируется ступенчатой кривой

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \delta_0 (\eta_k - \eta_*) \qquad (\eta_* = \eta - \eta_c) \tag{2.2}$$

Здесь $\delta_0(x)$ есть функция Хевисайда

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Постоянные σ_k, η_k могут быть выбраны из соображений наилучшей аппроксимации (2.2) к кривой $\sigma \sim \eta$ при $\eta \geqslant \eta_c$. Принятие перечисленных упрощений равносильно линеаризации всех уравнений рассматриваемой проблемы и позволяет получить приближенные решения ее конкретных задач.

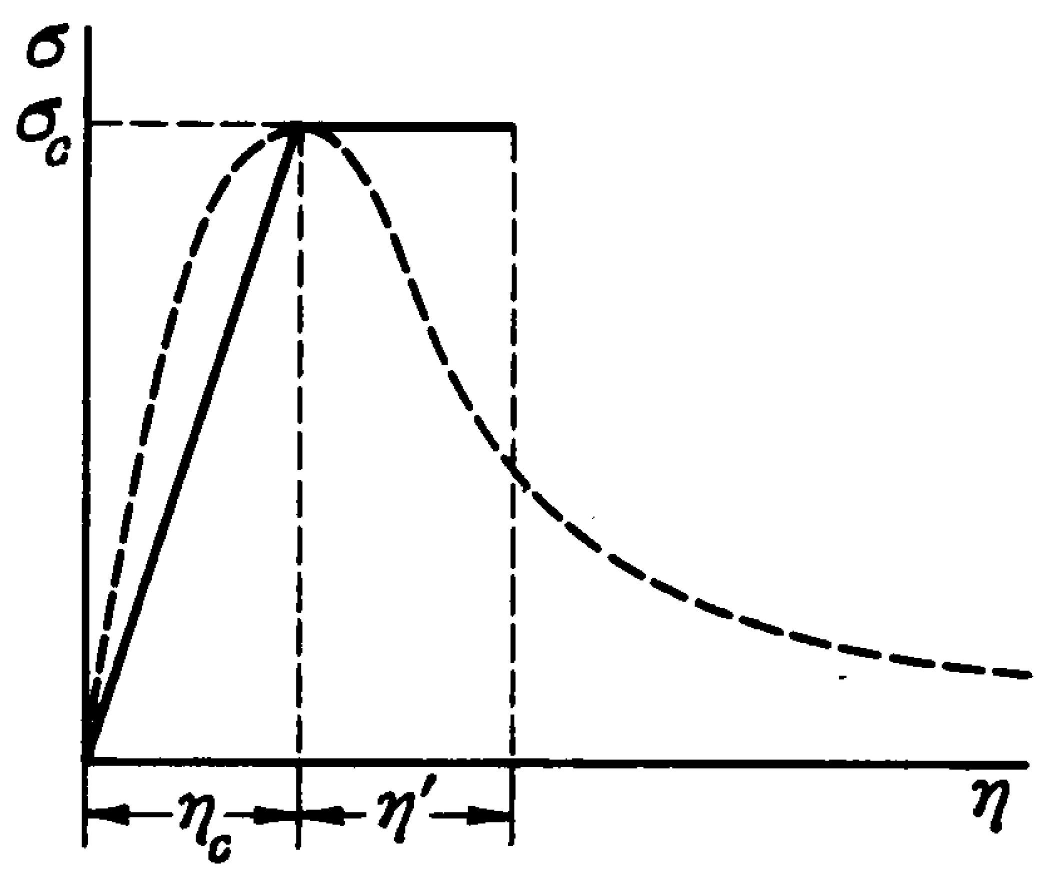
3. Простейший мыслимый вариант, описанной приближенной теории, получается, если сохранить в (2.2) лишь один его первый член, положив

$$\sigma = \sigma_1 \delta_0 (\eta_1 - \eta_*) \qquad (\eta_* > 0) \tag{3.1}$$

При этом следует принять, что $\sigma_1 = \sigma_c$, а η_1 определить из условия

$$\sigma_1 \eta_1 = \sigma_c \eta_1 = \gamma \tag{3.2}$$

потребовав тем самым, чтобы площадь аппроксимирующей кривой (фиг. 3) была равна площади кривой (1.1) в интервале $\eta_c \leqslant \eta \leqslant \infty$. Это условие равносильно требованию, чтобы аппроксимирующая зависимость давала то же значение плотности поверхностной энергии, что и формула (1.1). Оно напоминает широко применяющийся в теории нелинейных колебаний принцип линеаризации, основывающийся на приравнивании работы нелинейных сил работе приближенно их заменяющих линейных сил за характерный для задачи интервал аргумента.



Фиг. 3

Рассмотрим в этой простейшей постановке задачу о равновесии упругой изотропной плоскости под действием заданных на бесконечности растягивающих напряжений $\sigma_{yy}(x, \pm\infty) = \sigma$.

Данная задача имеет тривиальное решение

$$\sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{xy}(x, y) = 0, \qquad \sigma_{yy}(x, y) = \sigma \tag{3.3}$$

Однако это решение не единственно, если учесть нелинейность связи между напряжениями и деформациями по закону (1.1).

Не ставя перед собою целью отыскание всех возможных в данном случае нетривиальных форм равновесий деформации тела, ограничимся тем, что исследуем возможность существования формы, при которой в произвольной точке тела образуется бесконечно длинная плоская щель, перпендикулярная направлению растяжения, т. е. рассмотрим случай, исследованный Гриффитсом [2].

При этом оказывается возможным воспользоваться уже известным решением М. Я. Леонова и В. В. Панасюка [3,4], которым принадлежит полезная идея аппроксимировать нисходящий участок кривой $\sigma \sim \eta$ формулами (3.1), (3.2).

Согласно цитированным авторам

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \sigma_c + \frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}}\left[\sigma - \frac{2\sigma_c}{\pi}\arccos\frac{l_0}{l}\right] + \\ + \frac{\sigma_c}{\pi}\left[\arcsin\frac{l^2 - xl_0}{l(x - l_0)} - \arcsin\frac{l^2 + xl_0}{l(x + l_0)}\right] \tag{3.4}$$

$$v(x, 0) = \eta^*(x, 0) = \frac{2}{E}\left[\sigma - \frac{2}{\pi}\sigma_c \arccos\frac{l_0}{l}\right]\sqrt{l^2 - x^2} +$$
$$+ \frac{\sigma_c}{\pi E}\left[(x - l_0)\,\Gamma(l, x, l_0) - (x + l_0)\,\Gamma(l, x, -l_0)\right] \qquad (3.5)$$
$$(|x| \leqslant l)$$

Здесь $2l = L$ — длина щели, $l - l_0 = \Delta$ — ширина участка щели (у ее конца), в пределах которого между берегами щели имеется взаимодействие по закону (3.1)

$$\Gamma(l, x, k) = \ln\frac{l^2 - xk - \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - k^2)}}{l^2 - xk + \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - k^2)}} \qquad (3.6)$$

Ось y направлена перпендикулярно щели, а ось x — вдоль щели с началом отсчета в средней ее точке.

Формула (3.4) дает распределение нормального напряжения σ вдоль оси x (при $|x| \geqslant l$), а формула (3.5) определяет равновесную форму искривления «берегов» щели.

В этих формулах заданными величинами будут σ, σ_c, E. Что же касается длины щели и ширины участков взаимодействия берегов щели Δ, то они не могут быть взяты произвольно. Они определяются однозначно, если принять во внимание соотношения (3.1), (3.2), которые в (3.4), (3.5) еще не использованы. Но прежде чем составлять соответствующие уравнения, целесообразно произвести упрощения выражений (3.4) — (3.6), которые возможны, если учесть, что практический интерес представляют лишь случаи, когда

$$\frac{\sigma}{\sigma_c} \ll 1, \qquad \frac{\Delta}{l} \ll 1 \qquad (3.7)$$

Первое неравенство вытекает из того, что предельная прочность σ_c бездефектной решетки на растяжение имеет, как это видно хотя бы из (1.2.2), порядок модуля Юнга. Справедливость второго упрощения подтвердится последующими выкладками, согласно которым Δ окажется величиной порядка атомного диаметра D. Ввиду (3.7) можно заменить выражения (3.4), (3.5) следующими (справедливыми в окрестности концов щели) асимптотическими формулами:

$$\sigma_y(\xi, 0) = \frac{1}{2}\sigma_c + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{l}{\xi}}\left[\sigma - \frac{2\sqrt{2}\sigma_c}{\pi}\sqrt{\frac{\Delta}{l}}\right] + \frac{\sigma_c}{\pi}\arcsin\left(\frac{\Delta - \xi}{\Delta + \xi}\right) \qquad (3.8)$$

$$v(\xi^*, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{E}\left[\sigma - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sigma_c\sqrt{\frac{\Delta}{l}}\right]\sqrt{l\xi^*} + \frac{4\sigma_c}{\pi E}\sqrt{\Delta\xi^*} + \qquad (3.9)$$
$$+ \frac{\sigma_c}{\pi E}(\Delta - \xi)\ln\frac{(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\xi})^2}{(\sqrt{\Delta} + \sqrt{\xi})^2} \qquad (x = l + \xi,\ x = l - \xi^*)$$

При выводе (3.8), (3.9) из (3.4) — (3.6) были последовательно отброшены величины порядка Δ/l, ξ / l, ξ^* / l по сравнению с единицей, а также произведения этих малых величин.

Из (3.8) следует, что при

$$\sigma - \frac{2\sqrt{2}\sigma_c}{\pi}\sqrt{\frac{\Delta}{l}} > 0 \tag{3.10}$$

у концов щели возникают бесконечно большие растягивающие напряжения, а при

$$\sigma - \frac{2\sqrt{2}\sigma_c}{\pi}\sqrt{\frac{\Delta}{l}} < 0 \tag{3.11}$$

бесконечно большие сжимающие напряжения. Если предположить, что недопустимы как те, так и другие, то придем к условию

$$\sigma - \frac{2\sqrt{2}\sigma_c}{\pi}\sqrt{\frac{\Delta}{l}} = 0 \tag{3.12}$$

являющемуся для рассматриваемой конкретной задачи формулировкой постулата С. А. Христиановича — Г. И. Баренблатта [5,6], согласно которому в задачах о деформации тел, имеющих трещины-разрезы, решения с бесконечными напряжениями в окрестности концов следует считать физически некорректными, исключая их из рассмотрения.

Несколько ниже этот постулат будет обсужден и отвергнут. Однако предварительно целесообразно согласиться с равенством (3.12) и рассмотреть следствия из него вытекающие. Помимо (4.12) параметры задачи должны подчиняться еще соотношению

$$v(\Delta, 0) = \frac{4\sigma_c\Delta}{\pi E}\frac{\gamma}{\sigma_c} \tag{3.13}$$

следующему из (3.9) и формул (3.1), (3.2), с учетом того, что $\eta_1 = \gamma / \sigma_c$.

Исключая Δ из (3.12) и (3.13), приходим к равенству

$$L = 2l = L_g = \frac{4}{\pi}\frac{E\gamma}{\sigma^2} \tag{3.14}$$

идентичному известной формуле Гриффитса.

Таким образом, если принять постулат конечности напряжений (как при растяжении, так и при сжатии), то оказывается, что всякому значению σ соответствует вполне определенная длина равновесной щели. Щель не может быть больше этой длины, так как при этом в окрестности ее концов возникнут бесконечные растягивающие напряжения, и не может быть меньше этой длины, так как тогда в окрестности ее концов возникнут бесконечно большие сжимающие напряжения.

Следует отметить, что авторы рассмотренного решения [3,4], считают возможным применить его и к трещинам длиною $L < L_g$. Однако для этого им приходится положить, что взаимодействие между берегами щели на участке $|x| \leqslant l_0$ отсутствует и в том случае, если

$$v(l_0, 0) < \gamma / \sigma_c \tag{3.15}$$

Дело в том, что цитированные авторы трактуют щель, как реальный, заранее заданный бесконечно тонкий разрез в теле. Но тогда возникает вопрос: каким образом берега щели могут разойтись при наличии сил междуатомного взаимодействия? Чтобы преодолеть эту трудность, в теории трещин-разрезов иногда молчаливо, а иногда и явно постулируют существование в плоскости разреза как бы некоего бесконечно тонкого экрана, непрозрачного для междуатомных сил.

В теории [3,4] в качестве длины принимается $2l_0$ и вдоль всей этой длины трещина считается «заэкранированной» от взаимодействия между берегами, независимо от того, какое расстояние между ними. Отсюда условие (3.13) записывается в виде

$$v(\Delta,\ 0) \leqslant \gamma / \sigma_c \tag{3.16}$$

причем знаку равенства здесь соответствует критическая длина равновесной трещины $L = L_g$.

Предложенная выше трактовка трещин-разрезов как нетривиальных форм равновесия упругих тел с физически нелинейными свойствами позволяет обойтись без «мистического» экрана, не пропускающего силы атомного взаимодействия.

Возникновение трещины при этой трактовке рассматривается как потеря устойчивости (в большом) тривиальной формы деформации тела, т. е. как эффект, аналогичный, например, явлению хлопка в оболочках. При таком подходе для образования щели не требуется наличия в теле какого-либо разреза и сама собой отпадает необходимость экранирования междуатомных сил. Переход тела в состояние равновесия со щелью сопряжен, однако, с преодолением энергетического барьера, пропорционального площади щели. При этом в реальных телах, по-видимому, имеется достаточно локальных обстоятельств, способствующих осуществлению перехода от тривиальной формы равновесия к нетривиальной, подобно тому, как у реальных оболочек всегда имеется достаточно причин, обеспечивающих преодоление энергетического барьера, стоящего на пути образования хлопковой вмятины.

4. Таким образом, согласно приведенному выше приближенному решению длина равновесной трещины рассмотренного вида вполне определенна: $L = L_g$. При этом щель оказывается всегда неустойчивой, так как сколь угодно малое конечное изменение внешней нагрузки на тело $\sigma \pm \Delta\sigma$ приводит к возникновению в окрестности концов щели бесконечно больших напряжений, которые запрещаются принципом С. А. Христиановича — Г. И. Баренблатта. Обязательность этого принципа, по крайней мере в отношении растягивающих напряжений, на первый взгляд представляется несомненной, поскольку закон связи между напряжениями и деформациями (1.1) ограничивает первые конечной величиной σ_c. Да и возможность восприятия реальными телами бесконечно больших сжимающих напряжений кажется совершенно неправдоподобной.

Покажем однако, что решение задач теории упругости с бесконечно большими напряжениями далеко не всегда следует отвергать. Дело в том, что разрушение твердых тел есть процесс дискретный: нельзя отделить, например, половину атома от половины другого атома, сохранив связь между остальными их двумя половинами. «Квантом» разрушения будет нарушение связи у одной пары атомов, т. е. достижение у какой-либо пары атомов предельного значения силы сцепления T_m. Поскольку $T = D\sigma$, то условием разрушения будет неравенство

$$\sigma_n \geqslant \sigma_c \tag{4.1}$$

где σ_n — максимальное значение нормального растягивающего напряжения. Однако возможны случаи, когда градиент нормального напряжения в окрестности его наибольшего значения настолько велик, что нельзя пренебречь изменением σ_n, даже в пределах одного атомного диаметра. Тогда

$$T = \iint \sigma_n d\Omega \tag{4.2}$$

где интегрирование выполняется в пределах квадрата со стороной l_0. (Здесь и в дальнейшем, имея в виду грубость последующих рассуждений, опирающихся на аппарат линейной теории упругости, нет смысла вдаваться в особенности строения атомных решеток. Последние трактуются как простые кубические неплотно упакованные.)

В указанных выше особенных случаях (4.1) должно быть заменено неравенством

$$\frac{1}{D^2} \iint \sigma_n d\Omega \geqslant \sigma_c \tag{4.3}$$

Коль скоро обратное ему неравенство

$$\frac{1}{D^2} \iint \sigma_n d\Omega < \sigma_c \tag{4.4}$$

выполняется во всех точках тела, то прочность последнего заведомо обеспечена, поскольку тогда внешние силы, действующие на тело, недостаточны для того, чтобы максимальная сила сцепления была преодолена хотя бы у одной пары атомов.

Из этого, однако, не следует, что условие (4.3) можно считать критерием разрушения. Оно будет условием выхода из строя всего лишь одного элемента весьма сложной многократно статически неопределенной системы атомной решетки. Поэтому, будучи необходимым критерием разрушения, неравенство (4.3), вообще говоря, не будет достаточным. Формулировка достаточного критерия хрупкого разрушения должна быть связана с оценкой несущей способности атомной решетки тела под действием заданной на него внешней нагрузки.

Практически дискретный критерий (4.3) отличается от континуального (4.1) только в окрестностях сингулярных точек поля напряжений, причем бесконечность напряжений, безусловно запрещаемая критерием (4.1), далеко не всегда оказывается в противоречии с критерием (4.4), гарантирующим прочность атомной решетки. Покажем это на простейшем примере.

5. Рассмотрим задачу о растяжении плоскости с разрезом напряжениями $\sigma_y(x, \pm\infty) = \sigma$, пренебрегая при этом взаимодействием берегов разреза (задача Гриффитса). Ось x считаем совпадающей с разрезом, принимая начало отсчета на одном из его концов. Распределение нормальных напряжений σ_y вблизи конца трещины определяется известной асимптотической формулой Снеддона [7]

$$\sigma_y = \sigma\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{x}}\right) \tag{5.1}$$

Из формулы (5.1) вытекает, что $\sigma_y \to \infty$ при $x \to 0$ и, следовательно, условие прочности $\sigma_n \leqslant \sigma_c$ у концов трещины не выполняется при любой длине трещины L. Дискретный критерий (4.4) для рассматриваемого частного случая принимает вид

$$\frac{1}{D}\int_0^D \sigma_y dx = \sigma\left(1 + \sqrt{\frac{L}{D}}\right) < \sigma_c \tag{5.2}$$

Отсюда прочность тела заведомо обеспечена, если

$$L < D\frac{(\sigma_c - \sigma)^2}{\sigma^2} \approx \frac{D\sigma_c^2}{\sigma^2} \tag{5.3}$$

Воспользовавшись (1.2.2), можно привести это выражение к виду

$$L \leqslant 0.74\frac{E\gamma}{\sigma^2} = 0.58L_g \tag{5.4}$$

где L_g — критическая длина трещины по Гриффитсу. Если же для преобразования (5.3) воспользоваться не (1.2), а альтернативной формулой Е. Орована (1.5), то будем иметь

$$L \leqslant \frac{2E\gamma}{\sigma^2} = 1.56L_g \tag{5.5}$$

Таким образом, формулы (1.2.2) и (1.5), соответствующие двум различным способам аппроксимации кривой междуатомного взаимодействия, будучи использованы для преобразования (5.3), дают несколько преуменьшенное и несколько преувеличенное значения критической длины трещины по сравнению с результатом А. Гриффитса (3.14).

В п. 7 будет приведена теория равновесных трещин, обходящаяся без постулата конечности напряжений, в которой рассмотренный пример содержится как частный случай. Тогда станут более ясны взаимоотношения между (5.3) и формулой Гриффитса (3.14), причем окажется, что приведенный выше анализ не строг. Однако его следовало все же сохранить в работе как один из этапов исследования, наиболее просто демонстрирующий, что дискретный критерий прочности (4.4), будучи применен к задаче Гриффитса, дает количественные результаты, близкие к тем, которые получены упомянутым автором из энергетических соображений.

Из рассмотренного примера вытекают следующие выводы:

а) в точках тела, где напряжения и их градиенты бесконечно велики, характеристикой прочности следует считать напряжения, осредненные в пределах одного атома

$$\bar{\sigma}_n = \frac{1}{D^2}\int \sigma_n d\Omega \tag{5.6}$$

б) критерий прочности (4.4), будучи применен к оценке устойчивости трещин, дает результаты не только качественно, но и количественно согласующиеся с энергетической теорией Гриффитса;

в) наличие в поле напряжений сингулярных точек еще не означает физической некорректности решения. При выполнении равенства (4.4) такие решения допустимы. Более того, поскольку условие (4.4) только необходимо, но не достаточно, оно, вообще говоря, преуменьшает область нагрузок, не нарушающих прочность тела. На необходимость перехода при оценке прочности тела у конца трещины от напряжений к междуатомным силам обращали внимание ряд авторов. Это хорошо понимал уже основоположник теории хрупкого разрушения А. Гриффитс [2]. В форме, отличающейся от изложенной, дискретное условие прочности на конце трещины рассматривалось Г. Эллиотом [8].

6. В связи с рассуждениями двух предыдущих пунктов может возникнуть сомнение — допустимо ли в решениях задач, полученных из уравнений теории упругости, рассматривать расстояния порядка атомного диаметра как конечные величины и можно ли рассчитывать на получение хотя бы качественно правильных результатов.

В пользу такой возможности имеются, однако, следующие соображения. В механике сплошных сред реальные твердые тела, имеющие дискретное строение, аппроксимируются телами, состоящими из бесконечно малых частиц. Соотношения между деформациями и напряжениями в сплошном теле берутся при этом такими, чтобы при осреднении их в пределах размеров одного атома получались соотношения, выражающие взаимодействие двух атомов. Употребляя несколько вульгарное, но зато образное выражение, можно сказать, что дискретное взаимодействие атомов как бы «размазывается» по всему объему тела. Однако это не означает пренебрежения размерами атомов. Поясним последнюю фразу примером, взятым из теории оболочек. В этой теории часто используется метод расчета оболочек, подкрепленных часто стоящими ребрами, основанный на распределении жесткости ребер вдоль пролета между ними. В результате оребренная оболочка превращается в приближенно ей эквивалентную по механическим свойствам анизотропную гладкую оболочку. Дискретные ребра конечной жесткости заменяются при этом бесконечно близкими ребрами бесконечно малой ширины. Само собой разумеется, это только расчетный прием. Его использование вовсе не означает, что при практическом применении вытекающих из него результатов можно пренебречь размерами имеющихся в действительности дискретных ребер или расстоянием между ними. Так например, желая определить изгибные напряжения в ребрах, следует, взяв из расчета фиктивной конструктивно анизотропной оболочки значения изменений кривизны вдоль рассматриваемого ребра, получить затем изгибающий момент в нем, умножив кривизну на EI, где I — момент инерции ребра.

Из данного примера видно, что методы, основанные на приближенной замене дискретных механических систем континуальными, не исключают возможности получения информации об усилиях, возникающих в элементах дискретных систем. Будь иначе — такие методы были бы лишены практической ценности. Появление бесконечных напряжений при решении некоторых задач теории упругости свидетельствует о том, что в такого рода задачах междуатомные силы в атомной решетке быстро изменяются при переходе от одной пары атомов к другой. Естественно, что, при замене реальной дискретной решетки сплошной средой (т. е. устремив D к нулю), в соответствующих точках будут получаться бесконечно большие напряжения и их градиенты. Однако при пересчете напряжений в междуатомные силы последние оказываются конечными, как это видно из примера, приведенного в предыдущем пункте. Удовлетворительное количественное совпадение получаемых этим путем результатов с энергетической теорией Гриффитса может рассматриваться как подтверждение допустимости описанного подхода к оценке прочности хрупких тел.

7. Возвратимся теперь к п. 3, где была выведена формула (3.14), однозначно определяющая длину равновесной трещины. Эта формула получена из равенств (3.8), (3.9) при наложении на них условий (3.12) и (3.13). Второе из них вытекает из принятой аппроксимации закона междуатомной связи на нисходящей ветви кривой $\sigma \sim \eta$ (3.1), (3.2), а первое выражает требование конечности напряжений у конца трещины. Последнее (как это было показано выше) не является обязательным и должно быть заменено неравенством (4.4), принимающим в рассматриваемой плоской задаче вид

$$\frac{1}{D}\int_0^D \sigma_y dx \leqslant \sigma_c \tag{7.1}$$

Здесь знаку равенства соответствует критическое состояние трещин, при котором силы взаимодействия между парами атомов, ближайшими к ее концам, достигают предельного значения T_m. Определим критическую длину трещины $L_k = 2l_k$, соответствующую этому состоянию. Подставив (3.8) в (7.1) и применяя данную формулу со знаком равенства, получаем

$$2\sqrt{\frac{L_k}{D}}\frac{\sigma}{\sigma_c} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\alpha} + (1+\alpha)\left[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)\right] \qquad \left(\alpha = \frac{\Delta}{D}\right) \tag{7.2}$$

Уравнение (3.13) с учетом необязательности условия (3.11) будет

$$v(\Delta, 0) = \frac{2}{E}\left[\sigma\sqrt{L_k\Delta} - \frac{2}{\pi}\sigma_c\Delta\right] = \frac{\gamma}{\sigma_c} \tag{7.3}$$

Если ввести обозначения

$$L_g = 2l_g = \frac{4}{\pi}\frac{E\gamma}{\sigma^2}, \qquad \beta = \frac{\gamma E}{D\sigma_c^2}, \qquad U^2 = \frac{\pi}{4}\frac{\beta}{\alpha} \tag{7.4}$$

то (7.3) может быть записано либо в форме

$$2\frac{\sigma}{\sigma_c}\sqrt{\frac{L_k}{D}} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{4}{\pi}\sqrt{\alpha} \tag{7.5}$$

либо в форме

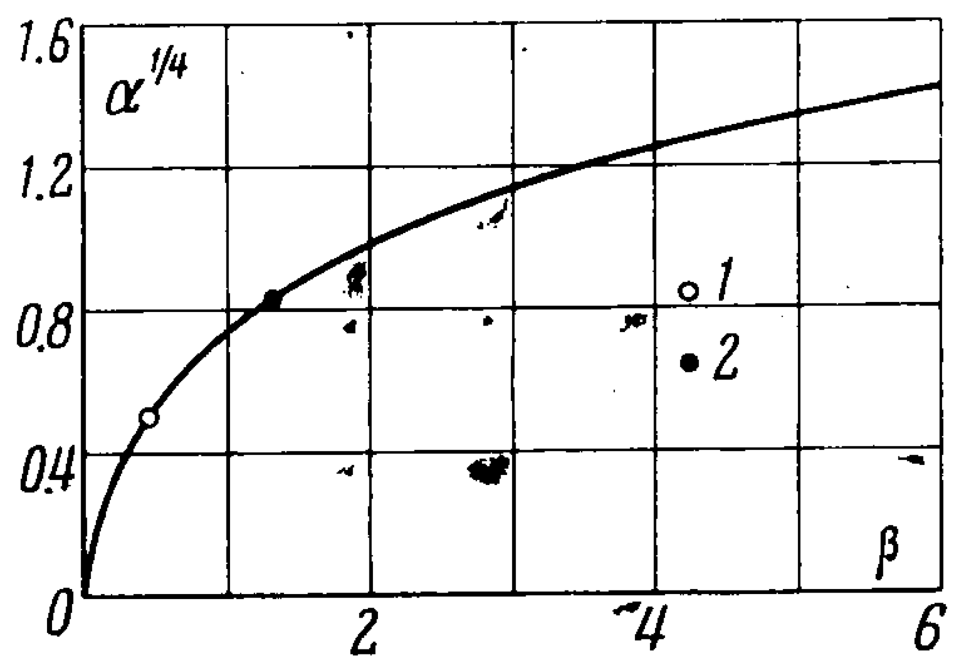
$$2\sqrt{\frac{L_k}{L_g}} = U + \frac{1}{U} \tag{7.6}$$

Отсюда видно, что $L_k > L_g$. Вычтя далее из (7.2) (7.5), находим

$$\beta = \sqrt{\alpha}(1+\alpha)\left[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right] \tag{7.7}$$

Здесь β есть функция только физических констант задачи, т. е. заданная величина. Отсюда (7.7) будет трансцендентным уравнением с одной неизвестной α.

На фиг. 4 приведен график, показывающий зависимость $\sqrt[4]{\alpha}$ от β. На основании этого графика с помощью формул (7.4.2), (7.5), (7.6) могут быть вычислены коэффициенты λ и $\varkappa$ в формулах



Фиг. 4

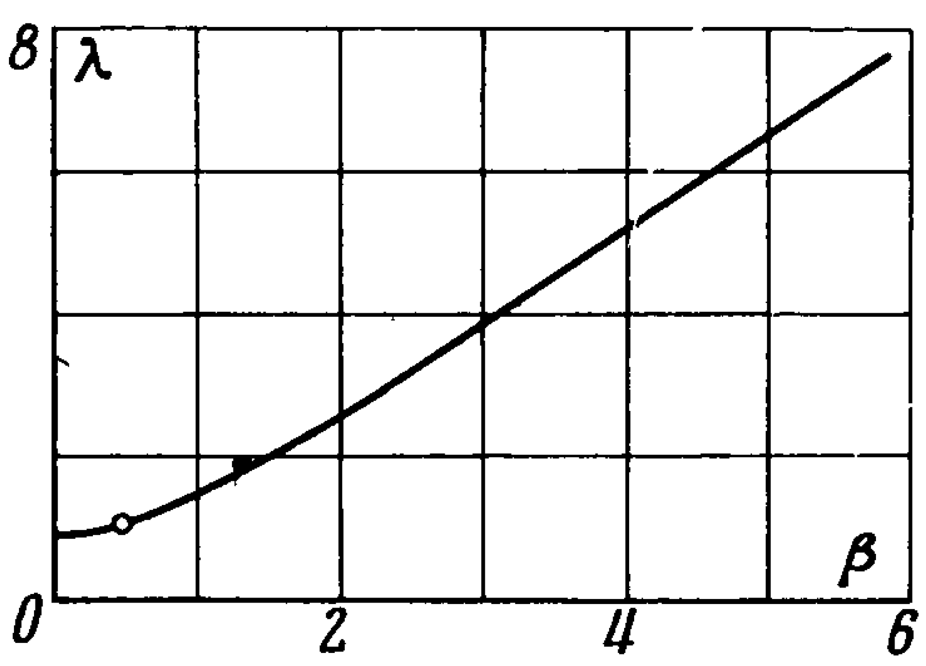
$$L_k = \lambda \frac{D\sigma_c^2}{\sigma^2}, \qquad L_g = \varkappa L_k \tag{7.8}$$

$$\lambda = \frac{2}{\pi}\beta + \frac{4}{\pi^2}\alpha + \frac{1}{4}\frac{\beta^2}{\alpha} \tag{7.9}$$

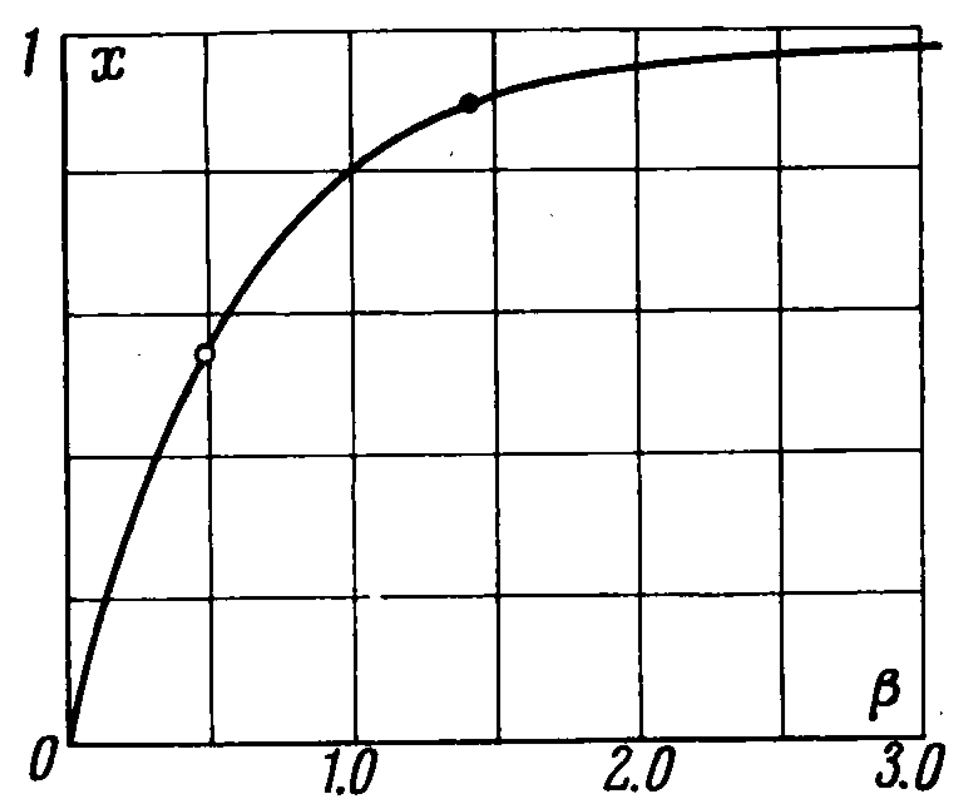
$$\varkappa = \frac{4U^2}{(1+U^2)^2} \tag{7.10}$$

Эти выражения, связывающие λ и $\varkappa$ с α, β, U, вытекают из (7.5), (7.6). На фиг. 5 и 6 приведены кривые зависимости λ и $\varkappa$ от β. Интересно отметить два предельных случая $\beta \to 0$ и $\beta \to \infty$. В первом из них $\gamma = 0$, что соответствует пренебрежению междуатомными силами на нисходящем участке кривой $\sigma \sim \eta$. При этом $L_g = 0$. Однако L_k оказывается конечной ввиду того, что учитывается конечность размеров атомов. Отвечающее данному случаю решение уже было получено в п. 5.

Другой крайний случай ($\beta \to \infty$) соответствует предположению, что $D = 0$, т. е. переходу к сплошной среде с конечным значением γ. Естественно, что тогда $L_k = L_g$, поскольку именно такая постановка задачи соответствует условиям вывода формулы Гриффитса. Из построенного решения следует, что вообще говоря, L_k не совпадает с L_g, причем всегда $L_k \geqslant L_g$. L_k будет верхней границей для длины равновесной щели L. Возникает вопрос: какова нижняя граница этой величины?



Фиг. 5



Фиг. 6

Чтобы ответить на него, рассмотрим как изменится уравнение, определяющее размеры щели, если

$$\frac{1}{D}\int_0^D \sigma_y dx < \sigma_c$$

При этом (7.2) превратится в неравенство

$$2\sqrt{\frac{L}{D}}\frac{\sigma}{\sigma_c} < \frac{4}{\pi}\sqrt{\alpha} + (1+\alpha)\left[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)\right] \tag{7.11}$$

а (7.3) останется без изменения. Соответственно сохраняются все формулы (7.5), (7.6), поскольку они будут следствиями только (7.2). Поэтому для любой (а не только для критической длины трещины)

$$2\sqrt{\frac{L}{L_g}} = U + \frac{1}{U} \tag{7.12}$$

Отсюда следует, что $L \geqslant L_g$. Таким образом оказывается, что возможные длины равновесных трещин ограничиваются интервалом

$$L_g \leqslant L \leqslant L_k \tag{7.13}$$

При $\beta = 0$ ($\gamma = 0$) этот интервал превращается в $0 \leqslant L \leqslant L_k$, т. е. для тел с пренебрежимой малой поверхностной энергией возможны равновесные трещины любой длины, меньшей чем критическая.

При $\beta \to \infty$ ($D = 0$) этот интервал стягивается в точку

$$L = L_k = L_g$$

т. е. для сплошной среды (среды с бесконечно малыми атомами) возможно возникновение равновесной трещины только одной, вполне определенной длины. Как видно из графика (фиг. 6), в наиболее вероятном диапазоне изменения β ($0.5 < \beta < 1.3$), соответствующем формулам (1.4), (1.3), L_g изменится в пределах $0.6 L_k \leqslant L_g < 0.9\, L_k$.

Результат (7.13) представляется несколько неожиданным. Из него следует, что хотя равновесные трещины с бесконечными напряжениями у их концов и могут существовать, однако непременно требуется, чтобы эти напряжения были положительны. Равновесных трещин с отрицательными бесконечными напряжениями не существует. Не исключена возможность, однако, что данный результат не окончателен, что более аккуратный анализ несколько расширит интервал (7.13) в левую сторону.

Дело в том, что согласно изложенному решению оказывается, что при $L < L_g$ берега трещин начинают пересекаться вблизи ее концов,что физически абсурдно. Именно поэтому данный случай и запрещается построенным решением. Однако отмеченный абсурд присущ не рассматриваемой задаче, а лишь той идеализированной постановке, в которой она рассматривалась.

Действительно, согласно изложенной концепции, трещина есть полость между двумя рядами атомов, в пределах которой расстояние между атомами превосходит $D + 2\eta_c$. Перемещения $v(x, 0)$, определяющие форму этой полости, были определены как

$$v(x, 0) = \eta - \eta_c = \eta^*$$

Но при таком определении отрицательные значения $v(x, 0)$ отнюдь не исключаются и не противоречат физическому смыслу.

Их появление означает лишь, что на соответствующих участках всей длины атомные ряды сближаются на расстояние $\eta < D + 2\eta_c$, т. е. что атомы от взаимодействия по закону нисходящего участка кривой $\sigma \sim \eta$ переходят к взаимодействию по закону восходящего участка кривой.

В приведенном выше решении атомный диаметр, считаясь конечным на интервале $|x| < 0.5L$ (поскольку здесь используется кривая междуатомного взаимодействия в форме (1.1), связывающей напряжения с остальными перемещениями атомов), принимается равным нулю на интервале $|x| > 0.5L$ (поскольку здесь применяется модель сплошной среды). Последнее и приводит к тому, что физически допустимый случай превращается в абсурдный. Отсюда возникает некоторое сомнение в нижней границе неравенства (7.13).

Что касается его верхней границы, то здесь также можно высказать сомнение, основывающееся на том, что критерий разрушения (4.3), с использованием которого эта граница была определена, будет только необходимым, но вообще говоря, недостаточным. Однако в рассматриваемой задаче данный критерий, по-видимому, не только необходим, но и достаточен.

В самом деле, если междуатомная сила для двух пар ближайших к концам щели атомов достигает предельного значения T_m, то это, по существу, означает, что длина щели увеличивается на $2D$. Но тогда следующие две пары атомов оказываются в такой же ситуации, какая была у двух предыдущих пар атомов, а следовательно, и у них междуатомные силы должны достигать предельного значения T_m. Тем самым щель, у которой $L > L_k$, будет расширяться, пока не произойдет разрушение тела. Поэтому следует считать, что значение $L = L_k$ соответствует исчерпанию несущей способности тела, имеющего щель, т. е. верхняя граница (7.13) не нуждается в корректировке принципиального характера.

На количественные результаты, вытекающие из приведенного решения следует смотреть, разумеется, лишь как на первое приближение. Их уточнение в сторону более аккуратного исследования ситуации в окрестности конца щели, представляется желательным.

8. Согласно изложенной теории, всякому значению напряжения на бесконечности σ соответствует некоторый интервал значений L, причем и верхняя и нижняя границы этого интервала убывают с увеличением σ. Это выглядит парадоксально, поскольку отсюда, на первый взгляд, следует, что в телах должны возникать тем более длинные и тем более опасные трещины, чем меньше действующая на тело нагрузка. Однако не следует забывать, что чем больше длина равновесной трещины и чем меньше σ, тем больше энергетический барьер, который должен быть преодолен для появления щели, и тем меньше вероятность возникновения условий, при которых этот барьер (величина которого убывает с возрастанием σ как $1 / \sigma^4$, поскольку он пропорционален площади трещины) оказывается преодолимым. Одним из возможных механизмов перехода через энергетический барьер будут например, тепловые флуктуации. Ясно, что появление в каком-либо объеме тела флуктуаций одностороннего направления тем менее вероятно, чем больше объем, в пределах которого она возникает. Ввиду сказанного представляется очевидным, что образование щелей в упругих телах возможно лишь при достаточно больших значениях σ, т.е. при достаточно малых L_k.

В качестве примера, дающего представление о порядке величин, приведем значения L_g, L_k и $2U_{\max}\ D^{-1}$ при $\beta = 1$ и нескольких различных значениях σ/σ_c

$$\frac{2U_{\max}}{D} = 23, \quad 9.30\cdot 10^3 D \leqslant L \leqslant 1.15\cdot 10^4 D \quad \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} = 0.01\right)$$

$$\frac{2U_{\max}}{D} = 2.8, \quad 235\, D \leqslant L \leqslant 280\, D \quad \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} = 0.05\right)$$

$$\frac{2U_{\max}}{D} = 2.3, \quad 93\, D \leqslant L \leqslant 115\, D \quad \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} = 0.1\right)$$

Из этих цифр следует, что при напряжениях порядка предела текучести или предела прочности реальных твердых тел длины равновесных трещин оказываются меньше размеров зерен поликристаллов и сравнимы скорее с размерами блоков или расстояниями между дислокациями. Максимальная ширина трещины изменяется при этом в пределах от $3D$ до $35D$. Тем самым рассмотренная теория отнюдь не является теорией микроскопических трещин. Она описывает механизм зарождения и распространения трещин в зернах поликристаллов. Из нее следует не только возможность, но и естественность образования в твердых телах щелей микроскопических и субмикроскопических размеров, даже если кристаллические решетки этих тел свободны от дефектов. Наличие дефектов (вакансий, внедренных атомов, дислокаций) оказывает двоякое влияние на распространение щелей рассматриваемого типа. С одной стороны, наличие дефектов может способствовать преодолению энергетических барьеров, препятствующих образованию трещин, но, с другой стороны, дефекты и их скопления создают энергетические барьеры на пути распространяющихся трещин. В частности, такими барьерами будут границы зерен и другие скопления заторможенных дислокаций. Вследствие этого закономерности распространения микротрещин в реальных твердых телах сложнее, чем вытекающие из рассмотренной теории, которые решают задачу в идеализированной постановке.

9. Познавательное значение изложенной теории состоит в толковании механизма хрупкого разрушения, как потери устойчивости (в большом) тривиальных форм равновесия атомных решеток. При этом трещина рассматривается не как дефект, заранее существующий в решетке (как это до сих пор было принято), а как нетривиальная форма равновесной деформации упругого тела, которая становится возможной только при наличии растягивающей тело нагрузки. Тепловые флуктуации и местные несовершенства, всегда имеющиеся в атомных решетках, создают условия, при которых энергетические барьеры, препятствующие реализации таких нетривиальных форм деформации, преодолеваются. В принципе возможны равновесные трещины разного вида, в том числе рассмотренная выше гриффитсовская трещина бесконечно большой длины, трещина, круглая в плане, и др. Однако вероятности их возникновения далеко не одинаковы. Так, например, энергетический барьер, который надо преодолеть для образования гриффитсовской трещины, прорезающей тело насквозь, весьма велик (бесконечно велик, если говорить о теле бесконечно больших размеров). Следовательно, возникновение такой трещины нереально и ее следует рассматривать как удобный для теоретического исследования классический пример, позволяющий изучать качественную сторону явлений. Предложенная концепция различать трещины с точки зрения вероятности их образования открывает перспективы статистического подхода к изучению хрупкого разрушения на основе исследования физических условий, необходимых для преодоления соответствующих энергетических барьеров. То, что проблема равновесия трещин — разрезов — нелинейна (по признаку задания краевых условий на контуре, размеры которого заранее неизвестны) высказывалось и ранее.

Однако физическая природа этой нелинейности была не ясна. В работе [6] на стр. 4 она приписывается геометрическим факторам. В действительности же главную роль здесь играет, как это было выше показано, нелинейность междуатомного взаимодействия, а геометрической нелинейностью задачи в первом приближении можно пренебречь.

Второй принципиальной точкой зрения, выдвинутой выше, является подход к хрупкому разрушению как к дискретному процессу (процессу разделения атомов, при изучении которого необходимо считать диаметр атома конечной величиной). Отсюда вытекает необходимость использования критерия хрупкой прочности в окрестности сингулярных точек поля напряжений не в форме (4.1), а в форме (4.3). Последнее равносильно отказу от постулата конечности напряжений в окрестности концов трещины. При этом каждому значению растягивающей нагрузки на тело соответствует конечный диапазон для ширины (длины) устойчивой равновесной трещины заданной конкретной формы. При включении же в число условий задачи постулата конечности напряжений получается, что устойчивых равновесных трещин вообще не существует (если нет внешних сил, приложенных к берегам трещин).

Поступила 20 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Tetelman A. S., Mc Evily A. I. Fracture of structural materials. Willey 1967.
2. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. Philos. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A., 1920, vol. 221, pp. 163—198.
3. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле. Прикл. механика, 1959, № 4.
4. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка», 1968.
5. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О механике гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
6. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
7. Sneddon I. N. The distribution of stress in the neighbonrhood of a crack in an elastic solids. Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1946, vol. 187, pp. 229—260.
8. Ellioth H. A. An analysis of the conditions rupture due to Griffith cracks. Proc. Phys. Soc. Ser. A., 1947, vol. 59, No. 232.
9. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности. ПММ, 1969, вып. 2.