

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. М. Вайсман, И. А. Куни

(Новосибирск)

За последние годы большое число работ было посвящено развитию различных моделей упругих сред с микроструктурой. Анализ показывает, что во всех этих моделях имеется некоторый масштабный параметр l , который может характеризовать дискретность, дальное действие, масштаб корреляции и т. п. Соответствующие теории могут рассматриваться как слабо или сильно нелокальные. К первым относятся теории континуума Коссера, моментная, мультиполярная и т. п. теории упругости (см., например, [1-4]), которые могут интерпретироваться как следующее приближение по сравнению с обычной (локальной) теорией упругости. Параметр l должен при этом считаться малым.

Сильно нелокальные теории, не предполагающие малости l , рассматривались в [5-7] (см. также обзор [8]) для неограниченных сред.

Ниже рассматриваются граничные задачи нелокальной теории; исследуется переход от точных к приближенным моделям; устанавливается связь с граничными задачами слабо нелокальных теорий [9,10], при формулировке которых физический смысл граничных условий оставался неясным.

Основная часть работы посвящена одномерным задачам. В п. 1 рассматриваются условия сопряжения двух сред с микроструктурой, строится аналог формулы Грина, записываются основные граничные задачи и эквивалентные им интегральные уравнения. В п. 2 исследуется структура общего решения уравнений движения для однородной среды. Показывается, что задача сводится к определению корней оператора энергии в комплексной плоскости волновых чисел. Строится функция Грина. Рассматриваются характерные отличия нелокальной теории от классической.

Различным приближенным моделям и области их применимости посвящен п. 3. Сравняются длинноволновое приближение и приближение по первым корням оператора энергии, развитое в данной работе. Преимуществом последнего будет качественно правильное описание явлений, для которых существенны волны с длиной порядка l , сохранение главных членов асимптотики и возможность корректной приближенной постановки граничных задач. В п. 4 в качестве иллюстрации рассматриваются точные и приближенные решения основных задач для полуограниченной области.

В п. 5 приведены некоторые обобщения на случай трехмерной среды с центральным взаимодействием.

1. Уравнения движения неоднородной линейно-упругой одномерной среды с нелокальным взаимодействием имеют вид [11]

$$-\omega^2 \rho(x) u(x, \omega) + \int \Phi(x, x') u(x', \omega) dx' = q(x, \omega) \quad (1.1)$$

Здесь u — смещение, q — внешние силы, ρ — плотность массы, ω — параметр преобразования Фурье по времени (или, что то же, — частота установившихся гармонических колебаний), $\Phi(x, x')$ — ядро оператора упругой энергии, характеризующее нелокальное упругое взаимодействие.

В дальнейшем явная зависимость полевых величин от ω не будет указываться, а для выражений типа (1.1), как правило, будет исполь-

зоваться операторная форма записи

$$\Phi_{\omega} u \equiv (-\omega^2 \rho + \Phi) u = q$$

Ядро оператора Φ должно удовлетворять условиям

$$\Phi(x, x') = \Phi(x', x), \quad \int \Phi(x, x') dx' = 0 \quad (1.2)$$

Отсюда следует представимость $\Phi(x, x')$ в виде

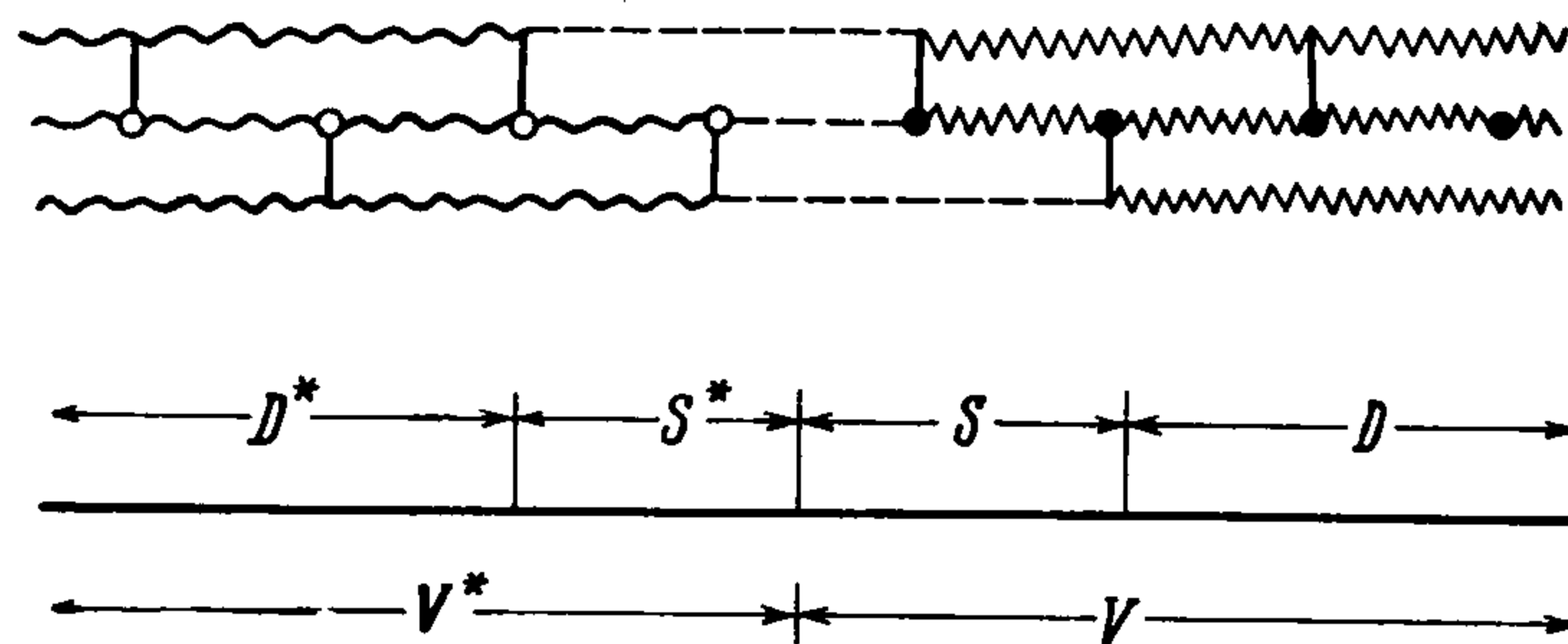
$$\Phi(x, x') = \psi(x) \delta(x - x') - \Psi(x, x'), \quad \psi(x) = \int \Psi(x, x') dx' \quad (1.3)$$

Здесь $\Psi(x, x')$ — жесткость упругой связи¹, соединяющей точки x и x' .

В дальнейшем предполагается, что дальноедействие произвольно, но ограничено, т. е. существует характерный радиус сил дальногодействия l , такой, что $\Psi(x, x') = 0$ при $|x - x'| > l$.

Уравнение (1.1) может описывать как движение сплошной среды с дальноедействием, так и движение дискретной цепочки с взаимодействием любого числа соседей. В последнем случае, как показано в [5], преобразования Фурье полевых переменных (которые будут обозначаться той же буквой, но с аргументом k) должны быть сосредоточены в k -пространстве на отрезке $|k| \leq \pi/a$, где a — расстояние между узлами решетки. В предельном случае взаимодействия большого числа соседей ($l \gg a$) уравнения цепочки для не слишком коротких волн переходят в уравнения континуума с одним масштабным параметром l .

Рассмотрим задачу о сопряжении двух сред с различными характеристиками (характеристики второй среды будем обозначать звездочкой). На фигуре показано сопряжение цепочек с взаимодействием двух соседей и схема сопряжения в общем случае.



В каждой среде можно выделить граничные области S и S^* шириною порядка l и l^* , в которых параметры возмущены

взаимодействием с соседней средой. Области невозмущенных параметров обозначим через D и D^* и положим $V = D + S$, $V^* = D^* + S^*$.

Уравнения движения для переходной области $S + S^*$ запишем в виде

$$-\omega^2 \rho_S u_S + S \Phi u = q_S, \quad -\omega^2 \rho_{S^*} u_{S^*} + S^* \Phi u = q_{S^*} \quad (1.4)$$

Здесь S, S^* — операторы умножения на характеристические функции граничных областей, $u_S = S u$ и т. д. Члены $S \Phi u$ и $S^* \Phi u$ из-за наличия дальногодействия обуславливают связь этих уравнений между собой и с уравнениями для невозмущенных областей. Уравнения (1.4) есть аналог условий сшивки в локальной теории сплошной среды. В частности, при обрыве возмущенных связей из этих уравнений должны вытекать силовые граничные условия для каждой среды.

¹ Именно эта характеристика наиболее удобна при формулировке граничных задач.

Переходя к формулировке основных граничных задач разобьем оператор упругих связей Ψ на сумму операторов

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_V + \Psi_{V^*} + \Psi_{VV^*} \\ \Psi_V &= V\Psi V, \quad \Psi_{V^*} = V^*\Psi V^*, \quad \Psi_{VV^*} = V\Psi V^* + V^*\Psi V \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь Ψ_V , Ψ_{V^*} характеризуют взаимодействие точек соответствующих сред, а Ψ_{VV^*} — взаимодействие между средами (на фигуре каждому из операторов соответствует свой тип связей). Подставляя (1.5) в (1.3), находим соответствующее разбиение оператора Φ

$$\Phi = \Phi_V + \Phi_{V^*} + \Phi_{VV^*} \quad (1.6)$$

Здесь, например, (I — тождественный оператор)

$$\Phi_V = \psi_V I - \Psi_V, \quad \psi_V(x) = \int \Psi_V(x, x') dx' \quad (1.7)$$

Если среды между собой не взаимодействуют, что $\Psi_{VV^*} = 0$, и, следовательно, $\Phi_{VV^*} = 0$. В этом случае уравнения (1.1) расщепляются на независимые уравнения обеих сред. Для среды в области V имеем

$$-\omega^2 \rho u_V + \Phi_V u_V = q_V \quad (1.8)$$

Нетрудно видеть, что Φ_V допускает представление

$$\Phi_V = D\Phi + \Gamma, \quad \Gamma = S\Phi_V \quad (1.9)$$

Это позволяет записать (1.8) в виде эквивалентной системы¹

$$D\Phi_\omega u \equiv -\omega^2 \rho u_D + D\Phi u = q_D, \quad \Gamma_\omega u \equiv -\omega^2 \rho u_S + \Gamma u = q_S \quad (1.10)$$

Первое уравнение связывает смещения с силами в области D . При $l \rightarrow 0$ оно переходит в уравнения движения обычной (локальной) теории упругости. Второе уравнение связывает смещения с силами в граничной области S и может быть получено из условий сшивки (1.4). При $l \rightarrow 0$ оно переходит в обычные силовые граничные условия. Эта аналогия позволяет назвать сформулированную граничную задачу (1.10) первой основной задачей нелокальной теории упругости. Ей эквивалентно интегральное уравнение (1.8).

Выше рассматривалась полуограниченная область. Обобщение для ограниченной области V очевидно.

Отметим, что статическую задачу для ограниченной области можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным положительно определенным ядром, если сделать естественное для механической системы предположение, что все упругие связи устойчивы, т. е. $\Psi(x, x') \geq 0$. Это уравнение получается из (1.8) стандартной заменой переменных и имеет вид

$$v(x) - \int_V K(x, x') v(x') dx' = q^\circ(x) \quad (x \in V) \quad (1.11)$$

$$v_V(x) = \psi_V^{1/2}(x) u(x), \quad q^\circ(x) = \psi_V^{-1/2}(x) q(x), \quad K(x, x') = [\psi_V(x) \psi_V(x')]^{-1/2} \Psi(x, x') \quad (1.12)$$

¹ Индекс V в обозначении смещения в области V удобно опускать там, где соответствующая обрезка содержится в операторах.

Отличительным свойством уравнения (1.11) является то, что ядро $K(x, x') = 0$ при $|x - x'| > l$, причем параметр l , как правило, мал по сравнению с размерами области.

Перейдем теперь ко второй основной задаче, когда в граничной области заданы не силы, а смещения, т. е.

$$D\Phi_{\omega} u = q_D, \quad u_S = h \quad (1.13)$$

Функция $h(x)$ задана на S . Этой задаче можно сопоставить эквивалентное интегральное уравнение

$$-\omega^2 \rho u_D + D\Phi u_D = f_D \quad (f_D = q_D - D\Phi h) \quad (1.14)$$

В статическом случае это уравнение, как и в первой задаче, можно свести к уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром.

Особо отметим важный случай однородной среды. При этом $\Psi(x, x') = \Psi(x - x')$ и $\psi(x) = \psi_0$, $\rho(x) = \rho_0$ — константы. Уравнение (1.14) переходит в уравнение Фредгольма с разностным ядром

$$(-\omega^2 \rho_0 + \psi_0) u(x) - \int_D \Psi(x - x') u(x') dx' = f(x) \quad (x \in D) \quad (1.15)$$

Следует подчеркнуть различие между первой и второй основными задачами. Первая задача для однородной среды не сводится к интегральному уравнению с разностным ядром в силу существенной неоднородности упругих связей в граничной области. Это обстоятельство, как будет видно из дальнейшего, приводит к тому, что решение первой задачи для однородной среды в нелокальной теории упругости значительно сложнее, чем второй.

Развивая дальше аналогию с обычной теорией упругости, построим формулу Грина в нелокальной теории.

Из (1.7) следует, что $\Phi_V = \Phi_V^+$, где Φ_V^+ — сопряженный оператор. Учитывая (1.9), получаем операторное тождество

$$D\Phi + \Gamma = \Phi D + \Gamma^+$$

Применим обе части равенства к u и добавим инерционный член в виде

$$\omega^2 \rho u_V = \omega^2 \rho u_D + \omega^2 \rho u_S$$

При учете (1.10), находим

$$\Phi_{\omega} u_D = q_D + \Gamma_{\omega} u - \Gamma_{\omega}^+ u_S \quad (1.16)$$

Здесь $\Gamma_{\omega} u = q_S$ — аналог плотности простого слоя, $\Gamma_{\omega}^+ u_S$ — аналог двойного слоя с плотностью u_S . При $l \rightarrow 0$ они переходят в обычные слои.

Обозначим $G_{\omega}(x, x')$ фундаментальное решение уравнения (1.1). Применяя к (1.16) оператор G_{ω} , получим формулу Грина

$$u_D = G_{\omega} q_D + G_{\omega} q_S - G_{\omega} \Gamma_{\omega}^+ u_S \quad (1.17)$$

Из этой формулы можно найти представление решения первой основной задачи через функцию Грина

$$u_V(x) = \int_D G_{\omega}(x, x') q_D(x') dx' + \int_S G_{\omega}(x, x') q_S(x') dx' \quad (x \in V)$$

если подчинить $G_{\omega}(x, x')$ условию

$$\int \Gamma_{\omega}(x, x'') G_{\omega}(x'', x') dx'' = \delta(x - x') \quad (x, x' \in S)$$

Решение второй основной задачи имеет вид

$$u_D(x) = \int_D G_\omega(x, x') q_D(x') dx' - \int_S dx' \int_D dx'' G_\omega(x, x'') \Gamma_\omega^+(x'', x') u_S(x') \quad (x \in D)$$

при условии $G_\omega(x, x') = 0$, если x или x' принадлежат S .

Очевидно, функции Грина есть резольвенты соответствующих интегральных уравнений (1.8) и (1.14).

При помощи (1.17) можно также сформулировать аналог смешанной задачи теории упругости.

В заключение подчеркнем, что полученные результаты справедливы и для дискретной среды, причем интегральные уравнения для ограниченной области эквивалентны системе алгебраических уравнений.

2. Перейдем к рассмотрению однородной среды. Начнем с исследования общего решения уравнения движения (1.1) для этого случая, что позволит с единой точки зрения рассмотреть структуру решений различных граничных задач. Уравнение (1.1) для однородной среды после преобразования Фурье по x (k — представление) принимает вид

$$\Phi_\omega(k) u(k) \equiv [-\omega^2 \rho_0 + \Phi(k)] u(k) = q(k) \quad (2.1)$$

где $\Phi(k)$ — фурье-образ $\Phi(x)$. Учитывая (1.2), (1.3), имеем

$$\Phi(k) = 2 \int_0^l \Psi(x) (1 - \cos kx) dx \quad (2.2)$$

Можно показать [12], что функции такого вида аналитически продолжаются в комплексную плоскость k как целые функции первого порядка роста и типа l . Для абсолютно интегрируемой $\Psi(x)$ функция $\Phi(k)$ на вещественной оси ограничена. Из вещественности и четности $\Phi(k)$ следует, что если $\Phi(k_1) = 0$, то нулями $\Phi(k)$ будут также $-k_1$, \bar{k}_1 , $-\bar{k}_1$ (черта обозначает комплексное сопряжение).

Предположим, что все связи устойчивы, т. е. $\Psi(x) \geq 0$. Тогда, как легко видеть, $\Phi(k)$ не имеет нулей на вещественной и мнимой осях, кроме двукратного корня $k = 0$. При выполнении указанных условий справедливо разложение по корням [13] вида

$$\Phi(k) = c_0 k^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2}{k_n^2}\right) \quad \left(c_0 = \int_0^l x^2 \Psi(x) dx\right) \quad (2.3)$$

Здесь k_n — корни $\Phi(k)$, расположенные в верхней полуплоскости и перенумерованные в порядке возрастания по модулю. Константа c_0 , как будет ясно из дальнейшего, будет модулем упругости среды в нулевом длинноволновом приближении.

Отметим, что для дискретной модели $\Phi(k)$ — периодическая функция, и k подчиняют дополнительному условию $|\operatorname{Re} k| \leq \pi/a$ [5, 14]. Следовательно, областью допустимых значений k будет комплексный цилиндр. Число корней k_n равно $2N$, где N — число взаимодействующих соседей.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (2.1), можно получить суперпозицией волн $\exp [ik(\omega)x]$, где $k(\omega)$ находится из дисперсионного уравнения

$$\omega^2 \rho_0 = \Phi(k) \quad (2.4)$$

Характерным признаком нелокальной теории является существование для каждого ω счетного числа, вообще говоря, комплексных корней $k_n(\omega)$ дисперсионного уравнения (для дискретной модели с ограниченным дальностью действия их число, как отмечалось конечно). Для неограниченной среды основной интерес представляют вещественные $k_n(\omega)$, соответствующие незатухающим волнам. Последние полностью характеризуются дисперсионной кривой $\omega = \omega(k)$, $\text{Im } k = 0$, причем их групповая скорость $\omega'(k)$ зависит от k (пространственная дисперсия). Важно подчеркнуть, что ограниченность $\Phi(k)$ приводит к появлению предельной частоты $\omega = \omega_{\max}$ незатухающих волн. Таким образом, вопреки общепринятым представлениям [14], этот эффект существует не только в дискретных средах.

При рассмотрении рассеяния волн на неоднородностях и границах раздела однородных сред, а также для граничных задач наряду с вещественными существенное значение имеют комплексные $k_n(\omega)$, которым соответствуют затухающие волны.

При фиксированной $\omega \neq 0$ аналогично (2.3) имеем

$$\Phi_\omega(k) = -\omega^2 \rho_0 \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2}{k_n^2(\omega)}\right) \quad \left(k_0^2(\omega) \rightarrow \frac{\rho_0 \omega^2}{c_0} \text{ при } \omega \rightarrow 0\right) \quad (2.5)$$

Остальные $k_n(\omega)$ перенумерованы так, чтобы $\text{Im } k_n(\omega) \geq 0$.

Общее решение неоднородного уравнения (2.1) в x -представлении имеет вид

$$u(x) = \int G_\omega(x-x') q(x') dx' + \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n e^{ik_n(\omega)x} + \beta_n e^{-ik_n(\omega)x}] \quad (2.6)$$

Здесь первый член — частное решение, построенное при помощи функции Грина $G_\omega(x)$ неограниченной среды, α_n, β_n — произвольные константы.

Из (2.5) следует, что $G_\omega(k) = \Phi_\omega^{-1}(k)$ — мероморфная функция. При некоторых не очень сильных ограничениях на $\Phi_\omega(k)$ можно записать разложение $G_\omega(k)$ на простые дроби в виде

$$G_\omega(k) = -\frac{1}{\omega^2 \rho_0} + 2k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_n(\omega) \Phi' [k_n(\omega)] [k^2 - k_n^2(\omega)]} \quad (\omega \neq 0) \quad (2.7)$$

При этом имеет место оценка (в предположении $\Phi' [k_n(\omega)] \neq 0$)

$$\left| \frac{1}{k_n(\omega) \Phi' (k_n(\omega))} \right| \leq A(\omega) e^{-l \text{Im } k_n(\omega)}$$

В x -представлении

$$G_\omega(x) = -\frac{1}{\omega^2 \rho_0} \delta(x) - D_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i e^{ik_n(\omega)|x|}}{k_n^2(\omega) \Phi' [k_n(\omega)]} \quad \left(D_x = \frac{d}{dx}\right) \quad (2.8)$$

В предельном случае $\omega \ll \omega_{\max}$ выражение (2.7) принимает вид

$$G_\omega(k) = \frac{1}{c_0^2 k^2 - \omega^2 \rho_0} + g_0 + 2k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n \Phi' (k_n) (k^2 - k_n^2)} + O(\omega^2)$$

$$g_0 = \frac{1}{12 c_0^2} \int_0^l x^4 \Psi(x) dx \quad (2.9)$$

В статическом случае (x -представление)

$$G(x) = \frac{|x|}{2c_0} + g_0 \delta(x) - D_x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i e^{ik_n |x|}}{k_n^2 \Phi'(k_n)} \quad (2.10)$$

где первый член — обычная статическая функция Грина.

Если для некоторого ω имеются кратные корни (соответствующие, например, экстремумам дисперсионной кривой), то в числе решений однородного уравнения будут собственные функции вида $x^\mu \exp[ik_n(\omega)x]$ ($\mu = 0, 1, \dots, m-1$, где m — кратность корня $k_n(\omega)$). Приведенные выше формулы изменяются очевидным образом.

Выше указывались специфические отличия нелокальной теории от классической, которые проявляются уже на одномерной модели. Перечислим основные: а) существует масштабный параметр; б) граница заменяется граничной областью; в) появляются новые незатухающие и затухающие волны¹ (в статике — затухающие собственные функции); г) существует предельная частота незатухающих волн; е) скорость волн зависит от их длины.

Естественно попытаться построить простейшие приближенные модели, которые правильно количественно или качественно учитывают некоторые из этих эффектов. Рассмотрим с этой точки зрения различные приближенные модели и область их применимости.

3. Наиболее простые модели можно получить, если аппроксимировать $\Phi(k)$ полиномом $c_0 k^2 P_m(k^2)$, где $P_m(\lambda)$ — вещественный полином от λ степени m . Это соответствует замене интегрального оператора дифференциальным. Уравнения движения принимают вид, характерный для феноменологических теорий со старшими производными (моментной, мультиполярной и т. п.)

$$\omega^2 \rho_0 u(x) + c_0 D_x^2 P_m(-D_x^2) u(x) = -q(x) \quad (3.1)$$

Возможны два принципиально различных подхода, от которых, в конечном счете, зависят физический смысл и область применимости подобных моделей. Обычно принято считать, что полином $c_0 k^2 P_m(k^2)$ представляет собой отрезок ряда $\Phi(k)$ в окрестности $k=0$. Если задана $\Phi(k)$ или известно поведение дисперсионной кривой в области малых k (длинные волны), то первое приближение можно получить, полагая $P_1(k^2) = 1 + l^2 A_1 k^2$, где A_1 — надлежащая безразмерная константа. Это позволяет правильно учесть дисперсию длинных волн, которая должна считаться слабой. Приближение называют длинноволновым, а соответствующие модели — средами со слабой пространственной дисперсией. Масштабный параметр l должен считаться малым, и теория, строго говоря, неприменима на расстояниях порядка и, тем более, меньших l . Если экстраполировать $P_1(k^2)$ в область больших k (короткие волны), то можно формально получить дополнительные собственные функции, соответствующие корням $P_1(k^2)$, однако эти функции, вообще говоря, не будут иметь ничего общего с точными. Следовательно, это приближение непригодно для граничных задач. Отметим, что при любом аппроксимирующем полиноме, удовлетворяющем условию устойчивости, не существует предельной частоты незатухающих волн.

¹ В трехмерном случае возможны также новые типы поверхностных волн.

Возможен также другой способ приближения $\Phi(k)$, заключающийся в построении интерполирующего полинома по первым корням. Учитывая особенности распределения корней $\Phi(k)$, находим, что при $\Psi(x) \geq 0$ полином первого приближения должен иметь вид

$$\Phi_1(k) = c_0 k^2 \left(1 - \frac{k^2}{k_1^2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{k_1^2}\right) \quad (3.2)$$

Соответствующий дифференциальный оператор — шестого порядка. Очевидно, $\Phi_1(k)$ не может претендовать на ту же точность приближения в области малых k , что и $c_0 k^2 P_1(k^2)$. Однако преимуществом данной модели будет качественно правильное описание явлений, для которых существенны волны с длиной порядка l , сохранение главных членов асимптотики решений и возможность корректной приближенной постановки граничных задач.

Для принятой модели в предположении $\omega < \omega_{\max}$

$$\Phi_\omega(k) \approx -\omega^2 \rho_0 \prod_{n=0}^2 \left(1 - \frac{k^2}{k_n^2(\omega)}\right) \approx -\omega^2 \rho_0 + \Phi_1(k) \quad (3.3)$$

причем второе представление справедливо для не слишком высоких частот. При выполнении этого условия функция Грина $G_\omega(k)$ в приближении по первым корням имеет вид

$$G_\omega(x) \approx \sum_{n=0}^2 \frac{i e^{i k_n(\omega)|x|}}{\Phi_1'[k_n(\omega)]} \quad (3.4)$$

Для приближенной статической функции Грина $G_1(x)$ получаем

$$G_1(x) = \frac{|x|}{2c_0} + 2 \operatorname{Re} \frac{i e^{i k_1 |x|}}{\Phi_1'(k_1)} \quad (3.5)$$

Если не требовать, чтобы $\Psi(x) \geq 0$, то корни $\Phi(k)$, вообще говоря, могут лежать на мнимой оси. В этом случае приближенный дифференциальный оператор будет четвертого порядка, причем его собственные функции не осциллируют. Соответствующие уравнения движения можно рассматривать как одномерный аналог уравнений моментной теории упругости.

Упомянем также другие возможные приближенные модели, не связанные с аппроксимацией полиномами. В ряде случаев может представлять интерес приближенное задание дисперсионной кривой в широком диапазоне волн при помощи подходящей функции k (например, при интерполяции экспериментальных данных). Эта модель хороша для описания незатухающих волн, но ее нельзя продолжить в комплексную плоскость и использовать в граничных задачах.

Более широкую область применимости могут иметь модели, основанные на аппроксимациях типа

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= 3 c_0 l^{-3} \quad (|x| \leq l) \\ \Psi(x) &= 0 \quad (|x| > l) \\ \Psi(x) &= (2/\pi)^{1/2} c_0 l^{-3} \exp(-x^2/l^2) \end{aligned}$$

Им соответствуют

$$\Phi(k) = 6 c_0 l^{-2} \left(1 - \frac{\sin kl}{kl}\right), \quad \Phi(k) = 2 c_0 l^{-2} (1 - e^{-1/2 (kl)^2})$$

Подобные модели качественно правильно описывают все указанные выше эффекты дальнего действия.

4. В качестве иллюстрации рассмотрим решения основных статических задач в однородной среде для полуограниченной области D ($0 \leq x < \infty$) и граничной области S ($-l \leq x < 0$).

Начнем с более простой второй основной задачи

$$\int \Phi(x - x')u(x')dx' = q(x) \quad (x \in D), \quad u_S(x) = h(x) \quad (x \in S) \quad (4.1)$$

Полагая в (1.15) $\omega = 0$ и выбирая единицы измерения так, что $\psi_0 = 1$, получаем эквивалентное интегральное уравнение в виде

$$u(x) - \int_0^{\infty} \Psi(x - x')u(x')dx' = f(x) \quad (0 \leq x < \infty)$$

Уравнение такого вида рассматривалось в [15] при дополнительном условии $\Phi(k) = 1 - \Psi(k) \neq 0$ ($-\infty < k < \infty$), которое в данном случае не выполняется. По-видимому, метод работы [15] допускает надлежащее обобщение (ср. также [16]), однако для большей наглядности, а также для получения эффективного приближения ниже будет построено решение по собственным функциям оператора Φ .

Будем искать решение, ограниченное при $x \rightarrow \infty$, в виде суммы $u = u^* + v$, где $u^*(x)$ — исчезающее при $x \rightarrow \infty$ частное решение уравнения (4.1), а $v(x)$ — решение соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющее граничному условию $v_S = h - u_S^*$. Для получения $u^*(x)$ введем фундаментальное решение $G^*(x)$ уравнения (4.1), связанное с функцией Грина (2.10) соотношением $G^*(x) = G(x) - x/2 c_0$. Тогда

$$u^*(x) = \int_D G^*(x - x')q_D(x')dx' \quad (4.2)$$

Очевидно, $v(x)$ можно представить суперпозицией собственных функций оператора Φ , не возрастающих при $x \rightarrow \infty$

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n e_n(x), \quad e_n(x) = e^{ik_n x} \quad (k_0 = 0, \text{Im } k_n > 0) \quad (4.3)$$

Коэффициенты разложения найдутся, если построить систему функций $e^m(x)$, сосредоточенных на S и образующих взаимный базис

$$(e^m, e_n) \equiv \int e^m(x) e^{ik_n x} dx = e^m(k_n) = \delta_n^m \quad (m, n = 0, 1, \dots) \quad (4.4)$$

(δ_n^m — символ Кронекера)

Для этого воспользуемся представлением [15]

$$\Phi(k) = \Phi_+(k) \Phi_-(k) \quad (\Phi_-(k) = \Phi_+(-k)) \quad (4.5)$$

Здесь Φ_{\pm} — целые функции первого порядка роста и типа l , не имеющие корней внутри верхней (нижней) полуплоскости. Фурье-образы этих функций сосредоточены на интервалах $[0, l]$ и $[-l, 0]$ соответственно. Нетрудно показать, что в нижней полуплоскости $\Phi_-(k)$ и $\Phi(k)$ связаны соотношением]

$$\ln \Phi_-(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \Phi(k')}{k' - k} dk' \quad (\text{Im } k > 0)$$

Контуром интегрирования служит вещественная ось с обходом начала координат снизу. При заданной $\Phi_-(k)$ функции взаимного базиса, как легко проверить, находятся

по формулам

$$e^m(k) = \frac{\Phi_-(k)}{\Phi_-'(k_m)(k - k_m)} \quad (4.6)$$

Можно показать, что $e^m(x)$ сосредоточены на S и имеют вид

$$e^m(x) = \frac{i}{\Phi_-'(k_m)} \int_{-\infty}^0 \Phi_-(x - x') e^{-ik_m x'} dx' \quad (4.7)$$

Из (4.3), (4.4) получаем

$$v^n = (e^n, v_S) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (4.8)$$

Складывая (4.2) и (4.3) находим

$$u(x) = \int_D G^*(x - x') q_D(x') dx' + \sum_{n=0}^{\infty} v^n e_n(x) \quad (x \in D) \quad (4.9)$$

Решение можно также представить в форме

$$u(x) = \int_D G(x, x') f(x') dx' \quad (x \in D) \quad (4.10)$$

где $G(x, x')$ — функция Грина данной задачи. Как нетрудно проверить, $G(x, x')$ допускает представление

$$G(x, x') = G^*(x - x') + \int_S E(x, x'') G(x'', x') dx'', \quad E(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(x) e^n(x') \quad (4.11)$$

В приближении по первым корням решение определяется собственными функциями оператора (3.2). Его можно строить по такой же схеме, что и точное, если получить соответствующие приближенные выражения для G^* и первых функций взаимного базиса. Из (3.5) находим

$$G^*(x) \approx -c_0^{-1} x \eta(-x) + 2 \operatorname{Re} \frac{ie^{ik_1|x|}}{\Phi_1'(k_1)} \quad (4.12)$$

где $\eta(x)$ — функция единичного скачка.

Корни $\Phi_-(k)$ лежат в верхней полуплоскости, поэтому из (3.2) и (4.5) непосредственно вытекает, что

$$\Phi_-(k) \approx \sqrt{c_0} k (1 - k/k_1) (1 + k/\bar{k}_1)$$

и, следовательно, согласно (4.6)

$$e^0(k) \approx \left(1 - \frac{k}{k_1}\right) \left(1 + \frac{k}{\bar{k}_1}\right), \quad e^1(k) \approx \frac{k(k + \bar{k}_1)}{k_1(k_1 + \bar{k}_1)} \quad (4.13)$$

Учитывая эти соотношения и используя формулы (4.8) для коэффициентов v^n , нетрудно убедиться, что граничные условия выражаются через производные $u(x)$ в точке $x = 0$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{iD_x}{k_1}\right) \left(1 + \frac{iD_x}{\bar{k}_1}\right) u(0) &= u^0 \equiv (e^0, h) \\ \frac{iD_x(iD_x + \bar{k}_1)}{k_1(k_1 + \bar{k}_1)} u(0) &= u^1 \equiv (e^1, h) \end{aligned} \quad (4.14)$$

причем второе условие эквивалентно двум вещественным.

Перейдем теперь к силовой задаче (1.10), которая в данном случае принимает форму

$$\int \Phi(x - x') u(x') dx' = q_D(x) \quad (x \in D), \quad \int \Gamma(x, x') u(x') dx' = q_S(x) \quad (x' \in S) \quad (4.15)$$

Решение по-прежнему будем искать в виде (4.9). Однако теперь следует положить $e_0(x) = x$, так как $u(x)$ определено с точностью до константы. Подставляя u в граничные условия, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} v^n \Gamma e_n(x) = Q(x), \quad Q(x) = q_S(x) - \Gamma u^*(x)$$

Построение базиса, взаимного Γe_n , для отыскания [коэффициентов v^n представляет существенно более трудную задачу, чем построение e^n . Это следствие неоднородности связей на S . В общем случае задача сводится к решению бесконечной системы уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{mn} v^n = Q_m, \quad \Gamma_{mn} = (e_m, \Gamma e_n), \quad Q_m = (e_m, Q) \quad (4.16)$$

Однако в приближении по первым корням задача значительно упрощается. В этом случае для базиса e^n (ср. с (4.13)) имеем

$$e^0(k) \approx ik \left(1 - \frac{k}{k_1}\right) \left(1 + \frac{k}{k_1}\right), \quad e^1(k) \approx \frac{k^2}{k_1^2} \frac{k + \bar{k}_1}{k_1 + \bar{k}_1}, \quad e^2(k) = \bar{e}^1(-k) \quad (4.17)$$

Граничные условия принимают вид ($m = 0, 1$)

$$\Gamma_m(D_x)u(0) = q_m, \quad \Gamma_m = \sum_{n=0}^2 \Gamma_{mn} e^n(iD_x), \quad q_m = (e_m, q_S) \quad (4.18)$$

Здесь $e^n(iD_x)$ — дифференциальные операторы, соответствующие (4.17).

Отметим, что в отличие от моментных теорий упругости здесь ясна связь приближенных граничных условий с точными и, в частности, указан способ вычисления моментов q_m через заданные на границе силы q_S .

5. Рассмотрим простейшие обобщения на случай трехмерной среды с центральным взаимодействием, в которой силы, возникающие при изменении расстояния между точками $r(x^\alpha)$ и $r'(x'^\alpha)$ пропорциональны этому изменению и направлены вдоль линии, соединяющей точки. Можно показать, что такая среда описывается оператором упругих связей $\Psi^{\alpha\beta}$ с ядром

$$\Psi^{\alpha\beta}(r, r') = \frac{(x^\alpha - x'^\alpha)(x^\beta - x'^\beta)}{|r - r'|^2} \Psi(r, r'), \quad \Psi(r, r') = \Psi(r', r) \quad (5.1)$$

При этом предполагается, что $\Psi(r, r') = 0$, если $|r - r'| > l$.

Почти дословно повторяя рассуждения, проведенные для одномерного случая, можно ввести трехмерные операторы $\Phi_{(\omega)}^{\alpha\beta}$, $\Gamma_{(\omega)}^{\alpha\beta}$ и т. д., сформулировать осмысленные граничные задачи и записать формулу Грина. В частности, в очевидных обозначениях формула Грина для трехмерного случая имеет вид

$$u_\alpha = G_{\alpha\beta}^{(\omega)} q_D^\beta + G_{\alpha\beta}^{(\omega)} q_S^\beta - G_{\alpha\beta}^{(\omega)} \Gamma_{(\omega)\lambda}^{+\beta} u_S^\lambda \quad (5.2)$$

В связи с тем, что радиус сил дальнего действия обычно мал по сравнению с другими характерными размерами, основной интерес в нелокальной теории упругости представляют граничные задачи для полупространства (полуплоскости). Решение этих задач может быть получено методом, аналогичным рассмотренному выше для полупрямой, если известна функция Грина неограниченной среды. Последнюю нетрудно построить для однородной изотропной среды. В этом случае

$$\Psi(r, r') = \Psi(r - r'), \quad \Psi(r) = \Psi(r) \quad (r = |r|) \quad (5.3)$$

$$\Phi^{\alpha\beta}(r) = \psi_0^{\alpha\beta} \delta(r) - \Psi^{\alpha\beta}(r), \quad \psi_0^{\alpha\beta} = \int \Psi^{\alpha\beta}(r) dr$$

Разобьем оператор энергии $\Phi^{\alpha\beta}$ на продольную $\Phi_{(l)}^{\alpha\beta}$ и поперечную $\Phi_{(t)}^{\alpha\beta}$ составляющие. Можно показать, что для фурье-образов соответствующих ядер справедливо представление ($k = |\mathbf{k}|$)

$$\Phi_{(l)}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \Phi_{(l)}(k), \quad \Phi_{(t)}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \right) \Phi_{(t)}(k) \quad (5.4)$$

$$\Phi_{(l,t)}(k) = 4\pi \int_0^l r^2 \Psi_{(l,t)}(r) \left(1 - \frac{\sin kr}{kr} \right) dr$$

Здесь $\Psi_{(l)}$, $\Psi_{(t)}$ и Ψ связаны соотношениями

$$\Psi(r) = \Psi_{(l)}(r) + 2\Psi_{(t)}(r), \quad \Psi_{(t)}(r) = \int_r^l r^{-1} \Psi(r) dr \quad (5.5)$$

В соответствии с (5.4) можем записать разбиение статической функции Грина на продольную и поперечную составляющие

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} G_{(l)}(k) + \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) G_{(t)}(k), \quad G_{(l,t)}(k) = \Phi_{(l,t)}^{-1}(k) \quad (5.6)$$

При условии $\Psi(r) \geq 0$ свойства целых функций $\Phi_{(l,t)}(k)$ и, в частности, распределение корней аналогичны свойствам $\Phi(k)$ для одномерной среды. Это позволяет разложить $G_{(l,t)}(k)$ на простейшие дроби. Например

$$G_{(l)}(k) = \frac{1}{c_{(l)}k^2} + g_{(l)} + 2k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n \Phi_{(l)}'(k_n) (k^2 - k_n^2)} \quad (\text{Im } k_n > 0)$$

$$c_{(l)} = \frac{2\pi}{3} \int_0^l r^4 \Psi_{(l)}(r) dr, \quad g_{(l)} = \frac{\pi}{30c_{(l)}^2} \int_0^l r^6 \Psi_{(l)}(r) dr \quad (5.7)$$

В r -представлении получаем (Δ — оператор Лапласа)

$$G_{(l)}(r) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{c_{(l)}r} + g_{(l)} \frac{\delta(r)}{r^2} - 2\Delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n \Phi_{(l)}'(k_n)} \frac{e^{ik_n r}}{r} \right] \quad (5.8)$$

Для приближения по первым корням аналогично (3.5) находим

$$G_{(l)}(r) \approx \frac{1}{4\pi c_{(l)}r} \left[1 + 4c_{(l)} \text{Re} \left(\frac{k_1 e^{ik_1 r}}{\Phi_{(l)}'(k_1)} \right) \right] \quad (5.9)$$

При $\text{Re} k_1 = 0$, откуда вытекает выражение, полученное ранее в работе [5].

В заключение отметим характерный граничный эффект для трехмерной среды. Существование новых типов продольных и поперечных волн должно приводить к появлению новых поверхностных волн. В отличие от релеевских они затухают при больших длинах в слое порядка параметра дальнего действия.

Поступила 24 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Truesdell C., Toupin R. A. The classical field theories. Handbuch der Physik, Berlin, Springer Verlag, 1960, Bd 3/1.
2. Mindlin R. D. Microstructure in linear elasticity, Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 16, No. 1, pp. 51—78.
3. Green A. E., Rivlin R. S. Multipolar continuum mechanics. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, vol. 17, No. 2, pp. 113—147.
4. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.

5. К у н и н И. А. Модель упругой среды простой структуры с пространственной дисперсией. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
 6. В д о в и н В. Е. К у н и н И. А. Теория упругости с пространственной дисперсией. Трехмерная сложная структура. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
 7. К р ö n e r E., D a t t a B. K. Nichtlokale elastostatik: Ableitung aus der Gittertheorie. Z. Phys., 1966, Bd 196, H. 3, S. 203.
 8. K u n i n I. A. Theories of elastic media with microstructure. Proc. Vibr. Probl. 1968, vol. 9, No. 3, pp. 323—336.
 9. M i n d l i n R. D., T i e r s t e n H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, vol. 11, No. 5, p. 415.
 10. Л о м а к и н В. А. О теории деформирования микронеоднородных тел и ее связи с моментной теорией упругости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
 11. К у н и н И. А. Неоднородная упругая среда с нелокальным взаимодействием. ПМТФ, 1967, № 3, стр. 60—66.
 12. Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959, вып. 1.
 13. Л е в и н Б. Я. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.
 14. Б р и л л ю э н Л., П а р о д и М. Распространение волн в периодических структурах. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
 15. К р е й н М. Г., Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Усп. матем. н., 1958, т. 13, вып. 5, стр. 3—103.
 16. Ф о к В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Матем. сб., 1944, т. 14, № 1, 2, стр. 3—50.
-