Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАРАНТИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ОДНОКРАТНОМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИИ

А. П. Черенков

(Москва)

Рассматривается система, подверженная действию малых возмущений, движение которой можно представить в виде двух различных последовательных во времени этапов. Критерием качества работы системы будет величина некоторого функционала ее фазовой траектории. Первый этап движения сменяется вторым, когда достигает определенного значения некоторая величина, зависящая от времени, возмущений и управляющих параметров. Типичным примером такой системы является ракета, для которой переход от активного участка траектории к пассивному осуществляется в момент достижения программного значения некоторой измеряемой в полете величиной.

Приводится необходимое и достаточное условие существования управления, обеспечивающего инвариантность системы по отношению к возмущениям. Находится оптимальное гарантирующее управление для случаев, когда область возможных значений возмущений представляет собой n-мерные эллипсоид или параллелепипед с центрами в начале координат.

1. Пусть имеется система Λ, движение которой можно разбить на два различных последовательных во времени этапа. На систему Λ действуют малые возмущения, задаваемые n-мерным вектором ε. Определен функционал V фазовой траектории системы Λ. Символом d будем обозначать главную линейную по ε часть отклонения от невозмущенного значения. За критерий качества работы системы примем величину $|dV|$: чем меньше, тем лучше. Переключение от первого этапа движения ко второму происходит тогда, когда принимает определенное значение величина η, являющаяся линейной формой (функцией переключения) s величин, образующих известную вектор-функцию времени и возмущений; $u = u(t, \varepsilon)$. Управление состоит в выборе вектора φ коэффициентов функции переключения $\eta = (\varphi, u)$.

Важным практическим приложением такого способа управления является уменьшение рассеивания ракет путем регулирования момента выключения тяги двигателя. Различным аспектам такого управления посвящено много работ, например [1,2].

В работе [3] рассматривается вероятностный вариант данной задачи, в ней предполагаются известными вероятностные характеристики ε и находится управление, минимизирующее дисперсию величины dV. В данной работе считается известной лишь область E возможных значений ε, а под оптимальным понимается такое управление, при котором обращается в минимум максимально возможная при $\varepsilon \in$ E величина $|dV|$. Приводится необходимое и достаточное условие равенства этого минимума нулю.

Отыскивается оптимальное управление для тех случаев, когда Е — эллипсоид или параллелепипед с центрами в начале координат.

2. Пусть в окрестности $\varepsilon = 0$ и невозмущенного значения момента переключения τ

$$dV = (M, \varepsilon) + \omega d\tau, \qquad du = L\varepsilon + Hd\tau$$

Здесь M, ω, L, H — известные матрицы порядков $n \times 1$, 1×1, $s \times n$, $s \times 1$ соответственно. Так как по условию переключения с точностью до членов высшего порядка выполняется равенство $d\eta = 0$, получаем

$$dV = \frac{\varepsilon' S\varphi}{(H, \varphi)} \qquad (S = MH' - \omega L')$$

Видно, что условие $(H, \varphi) \neq 0$ необходимо и достаточно для возможности управлять описанным способом при малых возмущениях. Всегда будет предполагаться выполненным необходимое для этого неравенство $H \neq 0$. Так как умножение вектора φ на ненулевую константу не изменяет величину dV, будем рассматривать лишь векторы φ, принадлежащие гиперплоскости $\Phi = \{\varphi : (H, \varphi) = 1\}$. Благодаря такой нормировке функции переключения

$$dV = \varepsilon' S\varphi$$

Исследуемая задача заключается в отыскании

$$\mu_0 = \inf_{\varphi \in \Phi} \sup_{\varepsilon \in E} |\varepsilon' S\varphi| \tag{2.1}$$

Отметим, что задача, подобная (2.1), изучается в работе [4]. Данная работа отличается от [4] тем, что в [4] дается численный метод нахождения решения, а также шире класс рассматриваемых областей Е.

3. Приведем некоторые результаты работы [3], посвященной вероятностному варианту задачи. Пусть

$$\langle \varepsilon \rangle = 0, \qquad \langle \varepsilon\varepsilon' \rangle = D$$

где D — известная корреляционная матрица. Тогда

$$\langle (dV)^2 \rangle = \varphi' B\varphi \qquad (B = A'A, \quad A = \sqrt{D}S)$$

(символом $\sqrt{\ }$ будем обозначать положительный квадратный корень [5]). Величина $\lambda = \min \langle (dV)^2 \rangle$ при условии $\varphi \in \Phi$ и оптимальный вектор φ находятся из системы уравнений

$$B\varphi = \lambda H, \qquad (H, \varphi) = 1 \tag{3.1}$$

Из теорем 3, 5—9 работы [3] легко получить следующие утверждения.

Теорема 1. Система уравнений (3.1) совместна.

Теорема 2. Для того, чтобы система (3.1) имела единственное решение, необходимо и достаточно выполнение равенства $\operatorname{rank} \| A' \ H \| = s$.

Теорема 3. Для того, чтобы выполнялось равенство $\lambda = 0$, необходимо и достаточно выполнение неравенства $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \| A' \ H \|$.

4. *Теорема 4.* Пусть начало координат есть внутренняя точка области Е. Для того, чтобы существовал такой вектор φ_0, что $\sup |\varepsilon' S\varphi_0| = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\operatorname{rank} S < \operatorname{rank} \| S' \ H \|$$

Доказательство. Необходимость. Если вектор φ_0, о котором говорится в условии, существует, то для любого $\varepsilon \in \mathrm{E}$ будет $\varepsilon' S\varphi_0 = 0$. Так как вектор ε может иметь любое направление, то $S\varphi_0 = 0$, $S'S\varphi_0 = 0$. Применяем теорему 3, полагая в (3.1) $A = S$, $\lambda = 0$, и получаем, что $\operatorname{rank} S < \operatorname{rank} \| S' \; H \|$.

Достаточность. Пусть ранги матриц S и $\| S' \; H \|$ различны. Тогда по теоремам 1 и 3 совместны уравнения $S'S\varphi = 0$, $H'\varphi = 1$. Получаемый в результате решения этой системы (ее первое уравнение можно заменить эквивалентным $S\varphi = 0$) вектор φ обеспечивает выполнение равенства $dV = 0$ при любом ε.

5. В этом пункте рассматривается случай, когда Е — невырожденный эллипсоид n-мерного пространства с центром в начале координат. Принадлежность $\varepsilon \in \mathrm{E}$ задается формулой

$$\varepsilon' K \varepsilon \leqslant 1$$

Здесь K — симметричная положительно-определенная матрица. Пусть $\sqrt{K}\varepsilon = \xi$, тогда

$$dV = \varepsilon' S\varphi = \xi' (\sqrt{K})^{-1} S\varphi$$

где ξ принадлежит единичному шару X.

Если задан вектор φ, то вектор ξ, обращающий в максимум величину dV, есть единичный вектор того же направления, что $(\sqrt{K})^{-1}S\varphi$

$$\max_{\varepsilon \in \mathrm{E}} |\, dV \,| = \max_{\xi \in X} \xi' (\sqrt{K})^{-1} S\varphi = \sqrt{\varphi' F \varphi} \qquad (F = S' K^{-1} S) \qquad (5.1)$$

Далее необходимо найти $\mu_0 = \min \sqrt{\varphi' F \varphi}$ при $\varphi \in \Phi$. Легко видеть, что эта задача отличается от вероятностной лишь тем, что вместо D и λ здесь фигурируют K^{-1} и μ^2_0. Величина μ_0 и оптимальные значения φ находятся решением системы уравнений

$$F\varphi = \mu_0^2 H, \qquad (H, \varphi) = 1 \qquad (5.2)$$

Теорема 5. Для того, чтобы оптимальный вектор $\varphi \in \Phi$ был единственным, необходимо и достаточно выполнение равенства $\operatorname{rank} \| S' \; H \| = s$.

Доказательство следует из теоремы 2, причем надо учесть, что вследствие неособенности матрицы K ее ранг равен n.

Видно, что в случае, когда Е — эллипсоид, оптимальные управления для вероятностного и минимаксного вариантов задачи совпадают. Разумеется, надо сопоставлять случаи, когда матрицы D и K^{-1} отличаются лишь скалярным множителем.

6. В этом пункте рассматривается случай, когда Е — невырожденный параллелепипед в n-мерном пространстве с центром в начале координат. Точки такого параллелепипеда можно представить в параметрической форме

$$\varepsilon = T\xi \qquad (\xi \in \Xi = \{\xi : |\, \xi_i \,| \leqslant 1\})$$

Здесь T — неособенная матрица порядка $n \times n$. Тогда

$$dV = \varepsilon' S\varphi = \xi' C\varphi \qquad (C = T'S)$$

При фиксированном φ

$$\max_{\varepsilon \in \mathrm{E}} \varepsilon' S\varphi = \max_{\xi \in \Xi} \xi' C\varphi = (\gamma, \operatorname{sign} \gamma) \qquad (\gamma = C\varphi \in \Gamma) \qquad (6.1)$$

Здесь Γ — линейное многообразие в $R^{(n)}$, являющееся отображением области Φ из $R^{(s)}$ в $R^{(n)}$ посредством оператора C, $\operatorname{sign}\gamma$ — вектор с компонентами $\operatorname{sign}\gamma_i$. Таким образом, задача свелась к отысканию

$$\min_{\varphi\in\Phi}(C\varphi, \operatorname{sign} C\varphi) = \min_{\gamma\in\Gamma}(\gamma, \operatorname{sign}\gamma)$$

Из n координатных осей, имеющихся в $R^{(n)}$, можно образовать 2^n сочетаний. Поставим в соответствие каждому такому сочетанию подпространство, являющееся декартовым произведением входящих в данное сочетание координатных осей. Таким образом получится 2^n подпространств R^α, где α — n-мерный вектор, причем $\alpha_i = 1$, если ось с номером i входит в данное сочетание, и $\alpha_i = 0$ в обратном случае. Например, для $R^{(2)}$ нулевое подпространство есть $R^{\{0,0\}}$, оси координат — $R^{\{1,0\}}$ и $R^{\{0,1\}}$, вся плоскость — $R^{\{1,1\}}$.

В R^α имеется $2^{\alpha'\alpha}$ ортанта. Будем говорить, что β— направляющий вектор ортанта, если $|\beta_i| = \alpha_i$ и β принадлежит данному ортанту. Замкнутый ортант с направляющим вектором β обозначим O^β. Например, $O^{\{1,1\}}$ — первый ортант в $R^{(2)}$, а $O^{\{-1,1,0\}}$ — второй ортант в $R^{\{1,1,0\}} \subset R^{(3)}$.

Пусть P^α — матрица ортогонального проектирования в $R^{( )}$ на R^α, а $G^\alpha = I - P^\alpha$, где I — единичная матрица. Расстояние от точки γ до R^α равно $\sqrt{(G^\alpha\gamma, G^\alpha\gamma)}$, а принадлежность $\gamma \in R^\alpha$ выражается равенством $G^\alpha\gamma = 0$.

Пусть $\Gamma^\alpha = \Gamma \cap R^\alpha$, а Φ^α есть множество тех φ, для которых $\gamma = C\varphi \in \Gamma^\alpha$. Очевидно, что соотношение $\varphi \in \Phi^\alpha$ выполняется для тех и только для тех φ, которые удовлетворяют системе уравнений

$$G^\alpha C\varphi = 0, \qquad (H, \varphi) = 1 \tag{6.2}$$

Исследуем эти уравнения.

Теорема 6. Для того, чтобы система уравнений (6.2) была совместна, необходимо и достаточно выполнение условия $\operatorname{rank}(G^\alpha C) < \operatorname{rank}\|C'G^\alpha\ H\|$.

Доказательство следует из теоремы 3, лишь надо заменить A на $G^\alpha C$ и учесть, что

$$G^\alpha G^\alpha = G^\alpha$$

Теорема 7. Для того, чтобы система уравнений (6.2) имела единственное решение, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\operatorname{rank}(G^\alpha C) < \operatorname{rank}\|C'G^\alpha\ H\| = s$$

Доказательство следует из теорем 6 и 2.

Теорема 8. Для того, чтобы существовал единственный вектор γ, определяемый системой (6.2) и равенством $\gamma = C\varphi$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\operatorname{rank}(G^\alpha C) < \operatorname{rank}\|C'G^\alpha\ H\| = \operatorname{rank}\|C'H\|$$

Доказательство. Необходимость. Пусть существует единственный вектор γ, удовлетворяющий условию теоремы. Тогда выполняется неравенство из условия теоремы. Обозначим $\Delta\varphi = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}$, где $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ — любые решения (6.2). Тогда

$$G^\alpha C\Delta\varphi = 0, \quad (H, \Delta\varphi) = 0 \tag{6.3}$$

Ввиду единственности γ будет $C\Delta\varphi = 0$. Следовательно, справедлива система уравнений

$$C\Delta\varphi = 0, \ (H, \ \Delta\varphi) = 0 \tag{6.4}$$

Так как системы (6.3), (6.4) эквивалентны, ранги их матриц равны.

Достаточность. Совместность уравнений (6.2) и существование γ очевидны. Так как системы (6.3), (6.4) по условию имеют равные ранги и первая из них есть следствие второй, то они эквивалентны. Это означает, что для всех φ, являющихся решением уравнений (6.2), вектор γ один и тот же.

Задача заключается в нахождении min $(\gamma, \operatorname{sign} \gamma)$, где $\gamma \in \Gamma$. Рассмотрим задачи θ^{α}: найти min $(\gamma, \operatorname{sign} \gamma)$, где $\gamma \in \Gamma^{\alpha}$, и соответствующие значения γ и φ.

Используя теоремы 6—8, можно определить, будут ли множества Γ^{α} и Φ^{α} пустыми, содержат ли они один или более одного элемента. Возможны такие случаи.

(1) Множества Γ^{α} и Φ^{α} пусты. Тогда задача θ^{α} не имеет смысла.

(2) Множества Φ^{α} и Γ^{α} содержат по одному элементу. Эти элементы дают решение задачи θ^{α}.

(3) Множество Φ^{α} содержит более одного элемента, а Γ^{α} — лишь один элемент γ.

Решение задачи θ^{α} дается этим значением γ, или любым $\varphi \in \Phi^{\alpha}$.

(4) Множества Φ^{α} и Γ^{α} содержат более одного элемента каждое.

Для рассматриваемого α и $\beta \in B^{\alpha} = \{\beta : |\beta_i| = \alpha_i\}$ определим множества $\Gamma^{\alpha\beta} = \Gamma^{\alpha} \cap O^{\beta}$. Очевидно, что $\Gamma^{\alpha} = \bigcup_{\beta} \Gamma^{\alpha\beta}$, где β принимает все значения из B^{α}. Поэтому достаточно решить задачи $\theta^{\alpha\beta}$: найти min $(\gamma, \operatorname{sign}\gamma)$, где $\gamma \in \Gamma^{\alpha\beta}$, для всех $\beta \in B^{\alpha}$ и из всех минимумов выбрать наименьший.

Для $\gamma \in O^{\beta}$ выполняется равенство $\operatorname{sign}\gamma = \beta$. Так как непустые $\Gamma^{\alpha\beta}$ — замкнутые выпуклые множества и (β, γ) для $\gamma \in \Gamma^{\alpha\beta}$ — линейная неотрицательная функция аргумента γ, многообразия равного значения которой ограничены, эта функция либо достигает минимума только на границе $\Gamma^{\alpha\beta}$, либо постоянна на $\Gamma^{\alpha\beta}$.

Пусть A^{α} — множество, состоящее из тех α^*, для которых выполняются соотношения

$$R^{\alpha^*} \subset R^{\alpha}, \qquad \dim R^{\alpha^*} = \dim R^{\alpha} - 1$$

Далее для каждого α будем рассматривать лишь те α^*, которые принадлежат множеству A^{α}.

Так как граница непустых $\Gamma^{\alpha\beta}$ состоит из точек, принадлежащих какому-либо из множеств Γ^{α^*}, то вместо задач $\theta^{\alpha\beta}$ достаточно рассмотреть задачи θ^{α^*} и из всех минимумов взять наименьший.

В случае постоянства (γ, β) на $\Gamma^{\alpha\beta}$ (при фиксированном α это может быть лишь для одного $\beta \in B^{\alpha}$) функция $(\gamma, \operatorname{sign} \gamma)$ на Γ^{α^*} будет иметь то же значение, что на $\Gamma^{\alpha\beta}$.

В этом случае решение задачи θ^{α} дается любой выпуклой линейной комбинацией любых векторов φ, взятых по одному из каждого Φ^{α^*}. Теперь нетрудно составить алгорифм для решения главной задачи $\theta^{\{1,\ldots,1\}}$.

Опишем процедуру Ψ в применении к задаче θ^α. Для задачи θ^α определяем, какой из случаев (1) — (4) имеет место.

Если осуществляются случаи (2), (3), то соответствующий вектор α включим во множество A.

Если реализуется случай (4), то соответствующий вектор α включим во множество Q.

Если осуществляется случай (1), то при $\alpha \neq 0$ входящие в данное R^α оси координат включим во множество Q_r, где $r = \dim R^\alpha$, а при $\alpha = 0$ в Q_0 включим все оси координат.

Вначале применим процедуру Ψ ко всем θ^α, где $\dim R^\alpha = \max\{0, n - s + 1\}$. Если окажется, что $\alpha \in Q$, то процедуру Ψ следует применить ко всем $\theta^{\alpha*}$, где $\alpha^* \in A^\alpha$. После того как получены все элементы какого-либо из множеств Q_r, где $r \geqslant n - s + 1$, из всех осей, входящих в Q_r, составляем всевозможные суммы из $r + 1$ слагаемого и к соответствующим θ^α применяем процедуру Ψ. К каждой задаче θ^α процедуру Ψ мы применяем не более одного раза. Очевидно, что описанный процесс конечен.

Для всех $\alpha \in A$ определим $\mu_\alpha = (\gamma^\alpha, \operatorname{sign} \gamma^\alpha)$, где γ^α — единственный элемент из Γ^α. Пусть

$$A_0 = \{\alpha : \mu_\alpha = \min \ \mu_{\alpha^0}, \qquad \alpha^0 \in A\}$$

Множество всех оптимальных векторов φ совпадает с множеством всех выпуклых линейных комбинаций любых φ, взятых по одному из каждого Φ^α, где $\alpha \in A_0$.

Окончательный результат выглядит следующим образом:

$$\mu_0 = \min_{\alpha \in A} \mu_\alpha, \quad \varphi_0 = \sum_{\alpha \in A_0} \lambda_\alpha \varphi^\alpha \qquad (\varphi^\alpha \in \Phi^\alpha, \lambda_\alpha \geqslant 0, \sum_{\alpha \in A_0} \lambda_\alpha = 1)$$

Отметим, что описанный алгорифм, вообще говоря, быстро приводит к цели. Именно, если все миноры порядка $s - 1$ матрицы C и порядка s матрицы $\|C'H\|$ не равны нулю, то множества Q и Q_r окажутся пустыми, так что придется рассмотреть лишь задачи θ^α, где $\dim R^\alpha = n - s + 1$, и для всех этих θ^α будет иметь место случай (2). При этом окажется необходимым решить C_n^{s-1} систем s линейных алгебраических уравнений с s неизвестными.

Интересно было бы сравнить, что дает применение вектора φ, оптимального для вероятностного и минимаксного (эллипсоид) вариантов задачи, к минимаксному (параллелепипед) варианту, и наоборот. Разумеется, надо сравнивать случаи, когда матрицы D, K^{-1}, C' различаются лишь скалярным множителем. Можно показать, что в этих случаях получится результат ($\max_\varepsilon |dV|$ или $\sqrt{\langle (dV)^2 \rangle}$), превышающий оптимальный не более чем в $\sqrt{n}$ раз.

7. Рассмотрим примеры. Пусть

$$M = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}, \qquad \omega = 1, \qquad L = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{Vmatrix}, \qquad H = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$$

Тогда

$$S = MH' - \omega L' = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

Разберем два случая.

1) Пусть $E = E^e$ — шар единичного радиуса с центром в начале координат; тогда

$$K = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad F = S'S = \begin{Vmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{Vmatrix}$$

Уравнения (5.2) будут такими:

$$14\varphi_1 + 6\varphi_2 = \mu_0^2, \quad 6\varphi_1 + 3\varphi_2 = 2\mu_0^2, \quad \varphi_1 + 2\varphi_2 = 1$$

Их решение

$$\varphi_0^e = \{-{}^9/_{35},\ {}^{22}/_{35}\}, \quad \mu_0^e = \sqrt{{}^6/_{35}}$$

2) Пусть $E = E^p$ — куб, все вершины которого имеют координаты, по абсолютной величине равные единице. В этом случае

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad C = S, \qquad \operatorname{rank} \| C' \ H \| = s = 2$$

Применяем процедуру Ψ ко всем θ^α, где $\dim R^\alpha = n - s + 1 = 2$. Для всех трех таких α

$$\operatorname{rank}(G^\alpha C) = 1, \qquad \operatorname{rank} \begin{Vmatrix} G^\alpha C \\ H' \end{Vmatrix} = \operatorname{rank} \begin{Vmatrix} C \\ H' \end{Vmatrix} = s = 2$$

и по теоремам 6—8 система уравнений (5.2) совместна, а соответствующие векторы φ и γ единственны, т. е. имеет место случай (2). Для каждого из этих α составляем систему уравнений (6.2). Из этих уравнений находим φ, затем $\gamma = C\varphi$ и $\mu = (\gamma, \operatorname{sign} \gamma)$. Для $\alpha = \{1,1,0\}$ имеем $\varphi = \{-{}^1/_5, {}^3/_5\}$, $\gamma = \{{}^2/_5, {}^1/_5, 0\}$, $\mu = {}^3/_5$. Для $\alpha = \{1, 0, 1\}$ имеем $\varphi = \{-{}^1/_3, {}^2/_3\}$, $\gamma = \{{}^1/_3, 0, -{}^1/_3\}$, $\mu = {}^2/_3$. Для $\alpha = \{0, 1, 1\}$ имеем $\varphi = \{-1,1\}$, $\gamma = \{0, -1, -2\}$, $\mu = 3$. Из сравнения величин μ видно, что

$$\varphi_0^p = \{-{}^1/_5, {}^3/_5\}, \quad \mu_0^p = {}^3/_5$$

Если для шара взять вектор φ, оптимальный для куба, то, пользуясь (5.1), находим,

$$\max |\varepsilon' S \varphi_0^p| = 1 / \sqrt{5} \qquad (\varepsilon \in E^e)$$

Если же для куба взять вектор φ, оптимальный для шара, найдем, используя (6.1)

$$\max |\varepsilon' S \varphi_0^e| = {}^{22}/_{35} \qquad (\varepsilon = \in E^p)$$

Отметим также, что при отсутствии рассматриваемого управления

$$\max |dV| = \sqrt{14} \quad (\varepsilon \in E^e), \qquad \max |dV| = 6 \quad (\varepsilon \in E^p)$$

Автор благодарит Ю. Б. Гермейера, который ознакомился с рукописью статьи и сделал ряд полезных замечаний.

Поступила 11 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами. М. «Наука», 1968.
2. Drenick R. The perturbation calculus in missile ballistics. J. Franklin Inst., 1951, vol. 251, № 4, pp. 423—436. (Рус. перев.: Вопр. ракетн. техн. Сб. сокр. перев. иностр. периодики. Дреник Р. Метод возмущений в баллистике управляемых снарядов).
3. Черенков А. П. Об управлении при малых случайных возмущениях путем однократного переключения. Теория вероятностей и ее применения, 1964, т. 9, вып. 2.
4. Пшеничный Б. Н. Двойственный метод в экстремальных задачах, I. Кибернетика, 1965, № 3.
5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Изд. 2. М., «Наука», 1965.