

## ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ДЕФОРМИРУЕМОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Я. С. Подстригач, П. Р. Шевчук

(Львов)

Вариационное уравнение, соответствующее основным уравнениям термоупругости, рассматривалось Био [1,2], Л. И. Балабухом и Л. А. Шаповаловым [3] и другими авторами [4, 5]. В работах Л. И. Седова [6] и его учеников [7,8] вариационные методы использовались при построении новых моделей сплошных сред.

В данной работе приводится вариационное уравнение, эквивалентное системе определяющих уравнений модели, позволяющей описывать взаимосвязь процессов деформации, диффузии тепла и вещества и наиболее распространенные типы граничных условий.

**§ 1. Постановка вопроса. Вариационное уравнение модели.** Деформированное твердое тело, представляющее собой двухкомпонентный твердый раствор, рассматриваем как термодинамическую систему, состояние которой, кроме тензоров напряжений и деформации, определяется еще температурой и энтропией, химическим потенциалом и концентрацией частиц растворенных компонентов. За начальное состояние такой системы принимаем равновесное ее состояние, и в дальнейшем будем рассматривать приращения определяющих параметров и параметров термодинамического состояния среды по отношению к их значениям в равновесном состоянии.

Выбрав определяющими параметрами деформацию  $e_{ij}$ , энтропию  $s$  и концентрацию растворенного компонента  $c_k$ , введем в рассмотрение функционал вида

$$F = U(e_{ij}, s, c_k) + \sigma_{ij} [1/2 (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j) - e_{ij}] - t (\operatorname{div} \mathbf{S} + s) - \varphi_k (\operatorname{div} \mathbf{C}_k + c_k) + p^2 \left( \frac{\rho}{2} u_i u_i \right) + \frac{1}{2} p \left( \frac{T}{\kappa_t} \mathbf{S}^2 + \frac{1}{\kappa_c} \mathbf{C}^2 \right) - X_i u_i \left( \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, p = \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \quad (1.1)$$

Здесь  $U(e_{ij}, s, c_k)$  — внутренняя энергия единицы объема;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $u_i$  — компоненты вектора перемещения;  $t, \varphi_k$  — приращения температуры и химического потенциала;  $\mathbf{S}, \mathbf{C}_k$  — потоки энтропии и концентрации;  $\rho$  — плотность;  $\kappa_t, \kappa_c$  — коэффициенты тепло- и массопроводности;  $X_i$  — компоненты объемной силы;  $\tau$  — время.

Если считать величины  $u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}, s, \mathbf{S}, c_k, \mathbf{C}_k, t, \varphi_k$  независимыми и их вариации произвольными, то вариационное уравнение

$$\delta \left\{ \iiint_V F dV - \iint_{\Gamma_p} P_i' u_i d\Gamma - \iint_{\Gamma_u} P_i (u_i - u_i') d\Gamma + \iint_{\Gamma_t} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) t' d\Gamma + \iint_{\Gamma_{\varphi_k}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_k) \varphi_k' d\Gamma + \iint_{\Gamma_{0t}} \frac{T}{2\kappa_t} p [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S})^2] d\Gamma + \iint_{\Gamma_{0\varphi_k}} \frac{1}{2\kappa_c} p [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_k)^2] d\Gamma + \iint_{\Gamma_{0t}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) t'' d\Gamma + \iint_{\Gamma_{0\varphi_k}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_k) \varphi_k'' d\Gamma \right\} = 0 \quad (1.2)$$

эквивалентно следующей системе соотношений:

$$\nabla_j \sigma_{ij} + X_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s} U(e_{ij}, s, c_k) - t = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{T}{\kappa_t} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} + \operatorname{grad} t = 0, \quad \frac{\partial}{\partial c_k} U(e_{ij}, s, c_k) - \varphi_k = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{\kappa_c} \frac{\partial \mathbf{C}_k}{\partial \tau} + \operatorname{grad} \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial e_{ij}} U(e_{ij}, s, c_k) - \sigma_{ij} = 0 \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + s = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{C}_k + c_k = 0 \quad (1.6)$$

$$1/2 (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j) - e_{ij} = 0 \quad (1.7)$$

и граничным условиям

$$P_i = P_i' \quad \text{на } \Gamma_p, \quad u_i = u_i' \quad \text{на } \Gamma_u \quad (1.8)$$

$$t = t' \text{ на } \Gamma_t, \quad \varphi_k = \varphi_k' \text{ на } \Gamma_{\varphi_k}$$

$$\frac{T}{\mu_t} \mathbf{n} \frac{\partial S}{\partial \tau} + (t'' - t) = 0 \text{ на } \Gamma_{ot}, \quad \frac{1}{\mu_c} \mathbf{n} \frac{\partial C_k}{\partial \tau} + (\varphi_k'' - \varphi_k) = 0 \text{ на } \Gamma_{o\varphi_k} \quad (1.9)$$

Здесь  $\mu_t$  и  $\mu_c$  — коэффициенты, характеризующие тепло- и массообмен с поверхности тела, а участки ограничивающей поверхности выбраны таким образом, чтобы

$$\Gamma_p + \Gamma_u = \Gamma_{ot} + \Gamma_t = \Gamma_{o\varphi_k} + \Gamma_{\varphi_k} = \Gamma$$

причем  $\Gamma$  — полная поверхность тела, занимающего объем  $V$ .

§ 2. Анализ полученных соотношений. Приведенные в § 1 соотношения содержат производные внутренней энергии по определяющим параметрам. Следовательно, эти уравнения можно записать в явном виде только при конкретном задании внутренней энергии как явной функции своих аргументов.

При выборе  $e_{ij}$ ,  $s$ ,  $c_k$  определяющими параметрами внутренняя энергия системы есть скалярная характеристическая функция этих параметров. Следовательно, она не должна зависеть от процессов перехода системы из одного состояния в другое и выбора системы координат. Таким образом, она должна выражаться лишь через инварианты, образованные из определяющих параметров.

Исходя из этих соображений, представим внутреннюю энергию в следующем виде:

$$U(e_{ij}, s, c_k) = \frac{T}{2\omega^{e, c_k}} s^2 + \frac{1}{2} d_{c_k}^{e, s} c_k^2 + G_{s, c_k} e_{ij}^2 + \frac{1}{2} \lambda_{s, c_k} e_{ii}^2 +$$

$$+ d_s^{e, c_k} s c_k + (\alpha_s^{e, c_k} s + \alpha_{c_k}^{e, s} c_k) e_{ii} + U_0 \quad (2.1)$$

где  $U_0$  — значение внутренней энергии в начальном состоянии,  $T$  — абсолютная температура системы, а физическое содержание других постоянных в выражении (2.1) подлежит дальнейшему выяснению.

При этом вторые уравнения (1.3) — (1.5) примут вид

$$\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{e_{ij}, c_k} = t = \frac{T}{\omega^{e, c_k}} s + d_s^{e, c_k} c_k + \alpha_s^{e, c_k} e \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial c_k}\right)_{e_{ij}, s} = \varphi_k = d_{c_k}^{e, s} c_k + d_s^{e, c_k} s + \alpha_{c_k}^{e, s} e \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial e_{ij}}\right)_{s, c_k} = \sigma_{ij} = 2G_{s, c_k} e_{ij} + \lambda_{s, c_k} e \delta_{ij} + (\alpha_s^{e, c_k} s + \alpha_{c_k}^{e, s} c_k) \delta_{ij} \quad (2.4)$$

Используем теперь соотношения (2.2) — (2.4), представляющие собой уравнения состояния, для выяснения физического содержания материальных характеристик в выражении (2.1).

Постоянная  $\omega^{e, c_k}$  будет удельной теплоемкостью единицы объема материала при фиксированных  $e = e_{ii}$ ,  $c_k$ . Действительно, из уравнения (2.2) имеем

$$\omega^{e, c_k} = T \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{e, c_k} = \left(\frac{\delta Q}{dt}\right)_{e, c_k} \quad (2.5)$$

где  $\delta Q$  — количество тепла, приобретенного единицей объема при изменении температуры на  $dt$ .

Из соотношения (2.3) находим, что

$$d_{c_k}^{e, s} = \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial c_k}\right)_{e, s}, \quad d_s^{e, c_k} = \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial s}\right)_{e, c_k}$$

Следовательно, эти постоянные характеризуют для данного материала изменение химического потенциала с изменением концентрации  $c_k$  и энтропии  $s$  соответственно.

Аналогично из уравнения (2.4) получаем

$$\delta_{ij} \alpha_{c_k}^{e, s} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial c_k}\right)_{s, e}, \quad \delta_{ij} \alpha_s^{e, c_k} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s}\right)_{e, c_k}$$

Этими соотношениями  $\alpha_{c_k}^{e,s}$ ,  $\alpha_s^{e,c_k}$  определяются как постоянные материала, характеризующие изменение напряжений с изменением концентрации  $c_k$  и энтропии  $s$ .  
Соотношения

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{ij}}\right)_{s, c_k} = 2G_{s, c_k} + \lambda_{s, c_k} \delta_{ij}$$

полученные из выражения (2.4), определяют постоянные  $G_{s, c_k}$ ,  $\lambda_{s, c_k}$  как упругие характеристики материала при постоянных физических параметрах  $s$ ,  $c_k$ .

Если вместо параметров  $e_{ij}$ ,  $s$ ,  $c_k$  (всех или некоторых из них) определяющими выбрать сопряженные им  $\sigma_{ij}$ ,  $t$ ,  $\varphi_k$ , то в уравнениях типа (2.2) — (2.4) будут другие характеристики материала, связанные с определенными выше соотношениями, приведенными в [9].

Анализ первых уравнений (1.4), (1.5) с целью упрощения математических преобразований проведем для случая двухкомпонентного твердого раствора.

Разрешив уравнения (2.2), (2.3) относительно  $s$  и  $c$ , находим

$$s = \frac{\omega^{e, \varphi}}{T} t - \alpha_t^{e, \varphi} e - \frac{d_t^{e, c}}{d_c^{e, t}} \varphi, \quad c = \frac{1}{d_c^{e, t}} \varphi - \alpha_\varphi^{e, t} e - \frac{d_t^{e, c}}{d_c^{e, t}} t \quad (2.6)$$

Первые уравнения (1.4), (1.5) после воздействия на них оператором Гамильтона с учетом (1.6) и (2.6) принимают следующий вид:

$$\kappa_t \Delta t = T \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\omega^{e, \varphi}}{T} t - \alpha_t^{e, \varphi} e - \frac{d_t^{e, c}}{d_c^{e, t}} \varphi \right], \quad \kappa_c \Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{d_c^{e, t}} \varphi - \alpha_\varphi^{e, t} e - \frac{d_t^{e, c}}{d_c^{e, t}} t \right] \quad (2.7)$$

имеют смысл обобщенных уравнений теплопроводности и диффузии вещества.

Следует отметить, что первые соотношения (1.4), (1.5) можно толковать как и кинетические уравнения. Действительно, если учесть, что

$$T \frac{\partial S}{\partial \tau} = J_q, \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} = J_m$$

то эти соотношения можно привести к виду

$$J_q = -\kappa_t \text{grad } t, \quad J_m = -\kappa_c \text{grad } \varphi \quad (2.8)$$

где  $J_q$ ,  $J_m$  — потоки тепла и вещества.

Таким образом, вариационное уравнение (1.2) эквивалентно уравнению движения (1.3), обобщенным уравнениям теплопроводности, диффузии вещества (первые уравнения (1.4), (1.5), уравнениям состояния (вторые уравнения (1.3) — (1.5)), балансовым уравнениям (1.6), геометрическим соотношениям (1.7), а также граничным условиям типа (1.8) или (1.9).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. B i o t M. A. Variational Principles in irreversible Thermodynamics with application to viscoelasticity. Phys. Rev., 1955, vol. 97, No. 6, pp. 1463—1469.
2. B i o t M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. J. Appl. Phys., 1956, vol. 27, No. 3, pp. 240—253.
3. Б а л а б у х Л. И., Ш а п о в а л о в Л. А. О вариационных уравнениях термоупругости. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4, стр. 703—707.
4. Ф у Б а о - л я н ь. Об обобщенных вариационных принципах термоупругости. Scientia sinica, 1964, т. 13, № 9.
5. В е н - А м о з М. On a variational theorem in coupled thermoelasticity. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 4. (Рус. перев.; В е н - А м о з М. Вариационная теорема при взаимодействии температурного и упругого полей. Прикл. механ. Тр. Америк. об-ва инж.-механ., сер. E, 1965, т. 32, № 4.)
6. С е д о в Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Усп. матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5, стр. 121—180.
7. Б е р д и ч е в с к и й В. Л. Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3, стр. 510—530.
8. Б е р д и ч е в с к и й В. Л. Вариационные методы построения моделей сплошных сред с необратимыми процессами в специальной теории относительности. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6, стр. 1081—1086.
9. П і д с т р и г а ч Я. С., П а в л и н а В. С. Загальні співвідношення термодинаміки твердих розчинів. Укр. фіз. ж., 1961, т. 6, № 5, стр. 655—663.