ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
2. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек, ч. 2. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1964.
3. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
5. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
6. Кирхгоф Г. Р. Механика. М., Изд-во АН СССР, 1962.
7. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.—Л., Гостехтеориздат, 1950.
8. Poincare H. Et metode Neumann et le probleme de Dirichlet. Acta math., 1897, vol. 20, pp. 59—142.
9. Neumann C. Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Ebend, 1877.
10. Михлин С. Г. Упругие оболочки, близкие к плоским пластинам. В сб.: «Вопросы прочности лопастк водяной турбины». Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1954.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СРЕДЫ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

В. А. Пальмов

(Ленинград)

1. В настоящее время внимание большого числа исследователей привлечено к изучению сред сложной структуры. Простейшей из них является среда Коссера [1,2]. Более сложна среда Миндлина с микроструктурой [3]. Чрезвычайная сложность присуща мультиполярной механике, разработанной Грином и Ривлином [4].

Существенной особенностью всех перечисленных теорий является пересмотр понятия точки. Если в классической механике сплошной среды каждая точка обладает только степенями свободы поступательного перемещения, то в теории Коссера ей приписаны степени свободы твердого тела. В теории сред с микроструктурой каждая точка обладает степенями свободы тела с однородной деформацией, т. е. двенадцатью степенями свободы. В мультиполярной механике механическое состояние каждой точки определяется n кинематическими параметрами, где n может быть конечным, но сколь угодно большим. Ниже строится новая модель среды подобного рода.

Постулируем наличие некоторой несущей среды и будем предполагать, что ее поведение описывается уравнениями Ламе классической теории упругости

$$(\lambda+\mu)\nabla\nabla\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}-\rho\mathbf{u}^{\cdot\cdot}+\mathbf{K}=0 \tag{1.1}$$

где ρ — плотность несущей среды, λ и μ — характеристики ее упругости, $\mathbf{u}$ — вектор перемещения точек несущей среды, $\mathbf{K}$ — интенсивность внешних объемных сил. Будем предполагать, что с каждой точкой несущей среды связан бесконечный набор невзаимодействующих изотропных осцилляторов с непрерывно распределенными собственными частотами. Уравнение движения типичного осциллятора с собственной частотой α имеет вид

$$m(\alpha)\mathbf{v}_\alpha^{\cdot\cdot}+c(\alpha)\left[1+R_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right](\mathbf{v}_\alpha-\mathbf{u})=\mathbf{Q}_\alpha \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v}_\alpha$ — вектор абсолютного перемещения массы осциллятора, $\mathbf{Q}_\alpha$ — внешняя сила, приложенная к ней. Величина $m(\alpha)\,d\alpha$ равна заключенной в единице объема суммарной массе всех осцилляторов с собственными частотами, лежащими в диапазоне $(\alpha, \alpha + d\alpha)$. Отсюда следует, что полная масса всех осцилляторов, присоединенных к точкам единицы объема, равна

$$m = \int_0^\infty m(\alpha)\, d\alpha \tag{1.3}$$

Далее, в уравнении (1.2) величина $C(\alpha)$ характеризует статическую жесткость подвески осциллятора, причем по определению собственной частоты имеем

$$c(\alpha) = \alpha^2 m(\alpha) \tag{1.4}$$

Член с $R_\alpha(\partial / \partial t)$ введем в уравнение (1.2) для учета рассеяния энергии в подвеске осциллятора. Предполагается, что $R_\alpha(\partial / \partial t)$ — нечетная функция оператора дифференцирования по времени. Ниже будет видно, что учет демпфирования осцилляторов совершенно обязателен для получения физически осмысленных результатов.

Для того чтобы замкнуть систему уравнений (1.1), (1.2), необходимо учесть действие подвески осцилляторов на несущую среду. Сила этого воздействия на единицу объема равна

$$\mathbf{F} = \int_0^\infty c(\alpha)\,[1 + R_\alpha(\partial/\partial t)]\, \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u})\, d\alpha \tag{1.5}$$

Она должна быть внесена в уравнение (1.1) на правах объемной силы. Учитывая также уравнение движения осцилляторов (1.2), получим окончательно

$$\begin{gathered}(\lambda + \mu)\nabla\nabla\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} - \rho\mathbf{u}^{\cdot\cdot} - \int_0^\infty m(\alpha)\,\mathbf{v}_\alpha^{\cdot\cdot}\, d\alpha + \mathbf{K} + \mathbf{Q} = 0\\ m(\alpha)\,\mathbf{v}_\alpha^{\cdot\cdot} + c(\alpha)\left[1 + R_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right](\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}) = \mathbf{Q}_\alpha\end{gathered} \tag{1.6}$$

Входящий сюда вектор $\mathbf{Q}$ равен внешней силе, приложенной ко всем осцилляторам единицы объема

$$\mathbf{Q} = \int_0^\infty \mathbf{Q}_\alpha\, d\alpha \tag{1.7}$$

Граничные условия для введенной среды ставятся так же, как и в классической теории упругости.

2. Рассмотрим тонкий стержень со свободной боковой поверхностью. Полагая, что в нем реализуется обобщенное одноосное напряженное состояние, обычными методами теории упругости получим уравнения движения для этого частного случая

$$\begin{gathered}Eu'' - \rho u^{\cdot\cdot} - \int_0^\infty m(\alpha)\, v_\alpha^{\cdot\cdot}\, d\alpha + K + Q = 0\\ m(\alpha)\, v_\alpha^{\cdot\cdot} + c(\alpha)\left[1 + R_\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right](v_\alpha - u) = Q_\alpha\end{gathered} \tag{2.1}$$

где E — модуль Юнга несущей среды, u — смещение точек несущей среды вдоль оси стержня и т. д.; штрихом отмечена производная по координате x, отсчитываемой вдоль оси стержня.

Уравнения (2.1) без учета объемных сил K, Q_α и сил сопротивления были впервые получены в работе Слепяна [5]. Там же рассмотрен вопрос о распространении волны деформации.

В предлагаемой работе исследована задача о стержне конечной длины, находящемся под действием либо гармонической, либо импульсивной силы, приложенной к одному из его концов.

3. Пусть один конец стержня длины l свободен, а другой нагружен гармонической силой частоты ω и единичной амплитуды. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$x = 0, \quad u' = 0; \qquad x = l, \quad Eu' = e^{i\omega t} \tag{3.1}$$

Нетрудно найти стационарное решение уравнений (2.1) при $K = Q_\alpha = 0$, подчиненное граничным условиям (3.1). В частности, значения ускорений точек несущей среды и осцилляторов оказываются такими:

$$u^{\cdot\cdot} = \Phi(\omega, x)\, e^{i\omega t}, \qquad v_\alpha^{\cdot\cdot} = \Psi_\alpha(w, x)\, e^{i\omega t} \tag{3.2}$$

где передаточные функции Φ и Ψ_α имеют выражения

$$\Phi(\omega, x) = \frac{\omega^2 \cos\lambda x}{E\lambda \sin\lambda l}, \quad \Psi_\alpha(\omega, x) = \Phi(\omega, x)\left[1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2(1 + i\varphi)}\right]^{-1} \tag{3.3}$$

Входящие сюда величины таковы:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{E}\left[\rho + \int_0^\infty \frac{c(\alpha)\, d\alpha}{\alpha^2 - \omega^2/(1 + i\varphi_\alpha)}\right], \quad \varphi_\alpha = -iR_\alpha(i\omega) \tag{3.4}$$

причем φ_α вещественно.

Первостепенный интерес представляет закон изменения амплитуды вибрации по длине стержня. Квадраты амплитуд вибрации несущей среды a^2 и осцилляторов b_α имеют выражения

$$a^2 = |\Phi(\omega, x)|^2, \qquad b_\alpha^2 = a^2 \left|1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2(1 + i\varphi_\alpha)}\right|^{-2} \tag{3.5}$$

Выделив в λ вещественную и мнимую части

$$\lambda = \mu - i\eta \tag{3.6}$$

представим a^2 следующей формулой:

$$a^2 = \frac{\omega^4}{E^2|\lambda|^2} \frac{\operatorname{ch} 2\eta x + \cos 2\mu x}{\operatorname{ch} 2\eta l - \cos 2\mu l} \tag{3.7}$$

Рассмотрение числителя этого выражения приводит к заключению, что параметр η определяет степень затухания вибрации при удалении от ее источника, а параметр μ — количество волн вибрации, укладывающихся на длине стержня. Исследование знаменателя показывает, что высота резонансных пиков тем выше, чем меньше η. Густота пиков на амплитудно-частотной характеристике определяется параметром μ.

Покажем, что степень затухания вибрации η не в первую очередь зависит от демпфирования осцилляторов и остается конечной даже при исчезающе малом демпфировании.

Для этого достаточно показать, что выражение λ^2 по (3.4) остается комплексным даже при нулевом значении демпфирования $\varphi_\alpha \to 0$.

Чтобы упростить дело, предположим, что демпфирующие свойства подвески всех осцилляторов одинаковы, т. е. что $\varphi_\alpha = \varphi$ не зависит от параметра α, но может зависеть от частоты возмущения. Но тогда, чтобы свободные колебания каждого осциллятора при неподвижной несущей среде были затухающими, необходимо, чтобы при $\omega > 0$ было $\varphi > 0$. В силу предположения о нечетности функциий R и φ отсюда следует, что при отрицательном ω отрицательным будет и φ.

Введем в рассмотрение комплексную величину z формулой

$$z = \omega\,(1 + i\varphi)^{-1/2} \tag{3.8}$$

Условимся, что в выражении z по (3.8) берется та ветвь радикала, на которой радикал равен $+1$ при $\varphi = 0$. Тогда окажется, что при $\varphi \neq 0$ мнимая часть z отрицательна при любых значениях частоты ω, кроме нулевого. Следовательно, при $\varphi \to 0$ комплекная переменная z стремится к вещественному значению из нижней полуплоскости плоскости комплексной переменной z.

Используя введенную величину (3.8), представим (3.4) в следующем виде:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{E}\left[\rho + \frac{1}{2z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(|\alpha|)\,d\alpha}{\alpha - z}\right] \tag{3.9}$$

Во входящем сюда интеграле Коши z всегда располагается в нижней полуплоскости. При $\varphi \to 0$ комплексная величина z стремится к точкам вещественной оси, по которой ведется интегрирование в (3.9). В соответствии с формулами Сохоцкого — Племеля [6] получаем следующий предел в выражении (3.9) при $\varphi \to 0$:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{E}\left[\rho + \frac{1}{2\omega}\left(-\pi i c(|\omega|) + \text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(|\alpha|)\,d\alpha}{\alpha - \omega}\right)\right] \tag{3.10}$$

Интеграл в этой формуле понимается в смысле главного значения.

Мнимая часть в (3.10) отлична от нуля, поэтому коэффициент пространственного затухания вибрации η имеет конечное значение даже при сколь угодно малом демпфировании осцилляторов и определяется законом распределения жесткости подвески осцилляторов по их собственным частотам. Этот эффект присущ только модели, учитывающей сложную структуру среды, т. е. наличие подвешенных осцилляторов, и совершенно неестествен для модели среды, в которой не учитывается конечное значение жесткости подвески. С физической точки зрения он может быть объяснен тем, что подвешенные осцилляторы выступают в роли динамических гасителей колебаний.

Заметим, что учет демпфирования осцилляторов обязателен при определении их амплитуды вибрации. На это указывает вторая формула (3.5), которая в общем случае теряет смысл при $\varphi = 0$.

4. Проиллюстрируем выводы предыдущего пункта конкретным примером. Пусть

$$m(\alpha) = A\,(\beta^2 + \alpha^2)^{-1} \tag{4.1}$$

где A и β — положительные параметры.

Подстановка выражения (4.1) в (1.3) и вычисление интеграла дает

$$m = A\pi\,(2\beta)^{-1} \tag{4.2}$$

Это равенство позволяет исключить параметр A из последующих формул, выразив его через m и β. Подставим теперь (4.1) в (1.4) и затем в (3.4). В результате получим

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{E}\left\{\rho + \int_0^{\infty}\frac{A\alpha^2\,d\alpha}{(\beta^2+\alpha^2)\,[\alpha^2 - \omega^2/(1+i\varphi)]}\right\} \tag{4.3}$$

Вычисляя входящий сюда интеграл методом контурного интегрирования, придем к следующему окончательному результату:

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{E}\left[\rho + m\left(1 + \frac{i\omega}{\beta\sqrt{1+i\varphi}}\right)^{-1}\right] \tag{4.4}$$

Вид этой формулы полностью подтверждает рассуждения предыдущего параграфа. Кроме того, она указывает на слабую зависимость λ от φ при реальных, и следовательно, не слишком высоких значениях φ.

Приведенный пример замечателен еще по следующей причине. Если в равенстве (4.4) положить $\rho = 0$, $\varphi = 0$, то получим

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{E}\,\frac{m}{1 + i\omega/\beta} \tag{4.5}$$

В точности такое же по структуре выражение квадрата волнового числа имеет место в задаче о продольных колебаниях стержня из материала Кельвина — Фойгта [7], т. е. в задаче о стержне с конечной величиной демпфирования. Таким образом, рассмотренная среда обладает следующей интересной особенностью. Несмотря на то, что она была «сконструирована» из очень добротных элементов — идеально упругой несущей среды и слабодемпфированных осцилляторов,— ведет она себя внешне так же, как среда со значительным демпфированием, но с простой структурой.

На первый взгляд такой вывод кажется парадоксальным, однако внимательное исследование показывает, что рассеяние энергии действительно имеет конечное значение даже при малом демпфировании осцилляторов и происходит это благодаря большой амплитуде колебаний резонирующих осцилляторов.

5. Исследуем теперь другой режим нагружения. Пусть в сечении $x = l$ приложен единичный импульс. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$x = 0, \quad u' = 0, \qquad x = l, \; Eu' = \delta(t) \tag{5.1}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Для упрощения решения задачи положим, что отсутствуют объемные силы $K = Q_\alpha = 0$. Кроме того, не будем учитывать демпфирование осцилляторов. Учитывая упрощения и проводя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим из уравнений (2.1) и (5.1)

$$Eu'' - \rho p^2 u - \int_0^\infty m(\alpha)\, p^2 v_\alpha \, d\alpha = 0 \tag{5.2}$$

$$m(\alpha) p^2 v_\alpha + c(\alpha)\,(v_\alpha - u) = 0$$

$$x = 0, \quad u' = 0, \qquad x = l, \quad Eu' = 1 \tag{5.3}$$

где p — переменная преобразования Лапласа, а за изображениями оставлены те же обозначения, что за оригиналами.

Решение граничной задачи (5.2), (5.3) легко находится. В частности, изображения ускорений точек несущей среды и осцилляторов таковы:

$$U = p^2 u = \frac{p^2 \operatorname{ch} \gamma x}{E\gamma \operatorname{sh} \gamma l}, \quad V_\alpha = p^2 v_\alpha = U\left(1 + \frac{p^2}{\alpha^2}\right)^{-1} \tag{5.4}$$

$$\gamma^2 = \frac{p^2}{E}\left[\rho + \int_0^\infty \frac{c(\alpha)\, d\alpha}{\alpha^2 + p^2}\right] \tag{5.5}$$

Оригиналы ускорений U и V_α находятся в общем случае по формулам обращения Римана — Меллина

$$U = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{pt} p^2 \operatorname{ch} \gamma x}{E\gamma \operatorname{sh} \gamma l}\, dp, \quad V_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{pt} p^2 \operatorname{ch} \gamma x \, dp}{E\gamma \operatorname{sh} \gamma l\,(1 + p^2/\alpha^2)} \tag{5.6}$$

Процесс вычисления интегралов (5.6) существенно зависит от конкретного вида функции $\gamma(p)$. В следующем пункте это вычисление выполнено для простейшего случая.

6. Пусть функция $m(\alpha)$ дается формулой (4.1). Подставив (4.1) в (1.4) и затем в (5.5), получим следующее выражение $\gamma(p)$:

$$\gamma^2 = \frac{p^2}{E}\left[\rho + m\left(1 + \frac{p}{\beta}\right)^{-1}\right] \tag{6.1}$$

Поскольку функции (5.4) являются мераморфными функциями γ и, следовательно, в силу соотношения (6.1) однозначными функциями p, при вычислении интегралов обращения (5.6) в данном частном случае можно воспользоваться второй теоремой о разложении, которая предполагает суммирование вычетов подынтегральных функций в выражениях (5.6).

Полюса подынтегральной функции в U определяются уравнением

$$\operatorname{sh}\gamma l = 0 \tag{6.2}$$

Отсюда находим

$$\gamma l = ik\pi \tag{6.3}$$

где k — натуральное число, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Подставив (6.3) в (6.1), получим ряд уравнений для определения p

$$-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = \frac{p^2}{E}\left[\rho + m\left(1 + \frac{p}{\beta}\right)^{-1}\right] \tag{6.4}$$

При $k = 0$ здесь получается один отрицательный корень и двойной нулевой. Последний должен быть исключен из рассмотрения, поскольку выражение (5.4) вовсе не имеет полюса при $p = 0$.

С помощью критерия Гурвица легко убедиться, что при любых других $k \neq 0$ все корни уравнений (6.4) расположены в левой полуплоскости.

Функция V_α по (5.4) имеет те же полюса, что U, и еще два полюса $p = \pm i\alpha$. Суммируя вычеты в указанных полюсах, получим

$$U = \sum_{k,\, s} \frac{2e^{pt}\, p^2 \cos(\pi kx / l)}{El\,(-1)^k\,(\partial\gamma^2 / \partial p)}\Bigg|_{p=p_{ks}} \tag{6.5}$$

$$V_\alpha = \sum_{k,\, s} \frac{2e^{pt} p^2 \cos(\pi kx / l)}{El\,(-1)^k\,(\partial\gamma^2 / \partial p)\,(1 + p^2 / \alpha^2)}\Bigg|_{p=p_{ks}} + \alpha\Phi(\alpha, x)\sin\alpha t \tag{6.6}$$

Здесь $\Phi(\alpha, x)$ дается формулой (3.3), а производная γ^2 равна

$$\frac{\partial\gamma^2}{\partial p} = \frac{p}{E}\left[2\rho + m\left(1 + \frac{p}{\beta}\right)^{-1} + m\left(1 + \frac{p}{\beta}\right)^{-2}\right] \tag{6.7}$$

В формулах (6.5), (6.6) суммирование ведется по k, а при каждом конкретном k — по корням p_{ks} характеристического уравнения (6.4).

Выражения (6.5) и (6.6) позволяют сделать некоторые выводы общего характера.

Поскольку все корни p характеристических уравнений (6.4) расположены в левой полуплоскости (за исключением нулевых, не представляющих интереса), суммы в выражениях U и V_α являются затухающими колебательными процессами.

Через некоторое время после приложения импульса эти составляющие затухнут и будут наблюдаться только собственные колебания осцилляторов, определяемые последним слагаемым в выражении (6.5). Сопоставление этого слагаемого с выражением (3.2) показывает, что распределение амплитуд колебаний осцилляторов по длине стержня совпадает с точностью до масштаба с распределением амплитуд колебаний точек несущей среды при стационарном возмущении с частотой α.

Поступила 12 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Кувшинский Е. В., Аэро Э. Л. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения. Физ. твердого тела. 1963, т. 5, вып. 9.
2. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity. Archv Rat. Mech. Analys., 1964, No. 1, pp. 51—78. (Рус. перев.: Миндлин Р. Д. Микроструктура в линейной упругости. Механика, Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1964, № 4).
4. Green A. E., Rivlin R. S. Multipolar continuum mechanics. Arch. Rati. Mech., Anal., 1964, vol. 17, No. 2.
5. Слепян Л. И. Волна деформаций в стержне с амортизированными массами. Инж. ж. МТТ, 1967, № 5.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Физматгиз, 1966.
7. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М., «Мир», 1965.