О РАСЧЕТЕ ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЯМИ

Ю. С. Найштут (Куйбышев)

Рассматривается возможность использования схемы Неймана для исследования оболочек с отверстиями.

Перенесение метода Неймана на оболочки сопряжено с двумя трудностями. Во-первых, применение кирхгофовых усилий не сводит задачу непосредственно к хорошо изученным интегральным уравнениям. Поэтому в предлагаемой работе рассмотрение вначале связывается с главным вектором и моментом. Последнее обстоятельство приводит, однако, к сингулярным интегральным уравнениям, обладающим еще и неподвижной особенностью. Но специфика получающихся уравнений позволяет установить для них альтернативу Фредгольма в требуемых пределах. После доказательства альтернативы Фредгольма доказывается сходимость схемы Неймана, а результаты Фредгольма дают возможность установить сходимость кирхгофовых усилий при достаточно гладких контурах отверстий и нагрузке.

Рассмотрены оболочки с отверстиями, для которых метод Неймана может быть реализован на современных ЭЦВМ. Показано, что в общем случае нагружения этот класс оболочек должен обладать отверстиями с диаметром порядка $d \sim 4.5\ (Rh^2)^{1/3}$. Последнее условие сравнивается с известным критерием А. И. Лурье [1], полученным для цилиндрической оболочки с малым круговым отверстием.

Пусть поверхность оболочки ограничена контуром S_0 и имеет n свободных от усилий отверстий с контурами S_i и внутренними областями D_i. Внутренность оболочки обозначим D_0, а область, заключенную внутри S_0, назовем D. Область, представляющую собой объединение всех областей D_i, назовем D_1.

Вектор перемещений оболочки $\mathbf{w}$, помимо удовлетворения уравнения равновесия в D_0 и условиям закрепления на S_0 (которые не выписываются), должен удовлетворять на S_i четырем соотношениям вида

$$\mathbf{F} = 0, \qquad M = 0 \tag{1}$$

Условия (1) представим в следующей форме:

$$\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^- = -\mathbf{F}^-, \qquad M^+ - M^- = -M^- \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{F}$ — главный вектор, а M — момент, действующий на внутренних контурах отверстий [2] (стр. 113). Условия (1) гарантируют единственность рассматриваемой задачи. Знаки плюс и минус означают предельные значения величин соответственно изнутри и извне контуров S_i.

Введем тензор Грина сплошной оболочки $G(x, y)$ и решим задачу (2) по схеме

$$\mathbf{u}_0 = \iint\limits_D G(x, y)\, \mathbf{f}(y)\, dy_1 dy_2, \ldots, \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{S_1} \mathbf{G}_i(x, s)\, T_{i\,(n-1)}^-(s)\, ds \tag{3}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n + \ldots$$

Здесь $\mathbf{f}(x)$ — поверхностная нагрузка и S_1 — контур, являющийся объединением всех S_i. Векторы Грина $\mathbf{G}_i(x, y)$ на контуре имеют компоненты

$$G_1 = \omega_{tt}(G(x, y)), \quad G_3 = \theta_t(G(x, y)), \quad G_2 = -\varepsilon_{tt}(G(x, y)), \quad G_4 = \theta_\nu(G(x, y))$$

Величины ω_{tt}, ε_{tt}, θ_t, θ_ν — суть деформации [2], связанные с контуром S_1, причем ω_{tt}, ε_{tt}, θ_t, θ_ν выполняется для получения $\mathbf{G}_i(x, y)$ трижды над каждым столбцом $G(x, y)$, как вектором. Кроме того, в (3) введены обозначения

$$T_1 = F_\nu, \quad T_2 = F_t, \quad T_3 = F_n, \quad T_4 = M$$

Имеет место формула

$$\mathbf{F} = \int\limits_{s_0}^{s} \mathbf{Q}\, ds \tag{4}$$

Здесь s_0 — некоторая фиксированная для каждого контура S_i точка.

Из определения тензора Грина следует [3], что если $\mathbf{f}(x) \in H(0, A, \lambda)$, $S_1 \in \in Л_4(B, \lambda)$, то решение по схеме (3), если оно сходится, удовлетворяет всем необходимым условиям для оболочки с отверстиями.

Здесь приняты определения Н. М. Гюнтера [3]: вектор $\mathbf{f}(x)$ принадлежит классу $H(n, A, \lambda)$, если для каждых двух точек x, x_0, расстояние между которыми $r(x, x_0)$, любая его компонента $f_i(x)$ обладает ограниченными производными порядка n, удовлетворяющими условию Гельдера с постоянными A и λ

$$f_{in} = \frac{\partial^n f_i}{\partial x_1^p \partial x_2^q}, \quad p+q=n, \quad |f_{in}(x)| \leqslant A$$

$$|f_{in}(x) - f_{in}(x_0)| \leqslant A r^{\lambda}(x, x_0)$$

Контур S принадлежит классу $Л_n(B, \lambda)$, если функция, представляющая уравнение контура в естественных координатах, принадлежит классу $H(n, B, \lambda)$. В этих определениях числа A, B, λ не зависят от точек x и x_0. Будем доказывать сходимость (3) в гельдеровской норме. Прежде всего условимся рассматривать только тот вариант теории оболочек, в котором изгибные деформации считаются не зависящими от кривизны [4] (стр. 95). Это обстоятельство позволяет считать, что главная часть тензора Грина имеет такую же особенность как у пластин

$$\Gamma_0(x, y) = (2\pi)^{-1} \| g_{kl} \| \qquad (k, l = 1, 2, 3) \tag{5}$$

$$g_{11} = n \ln r - m\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2, \quad g_{12} = -m \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2} \quad \left(n = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\right)$$

$$g_{21} = -m \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial x_2}, \quad g_{22} = n \ln r - m\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 \quad \left(m = \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\right)$$

$$g_{13} = g_{23} = g_{31} = g_{32} = 0, \qquad g_{33} = {}^1/_4\, r^2 \ln r$$

Здесь λ, μ — постоянные Ляме. Далее, из формул (3), (4) при любом n следует:

$$\mathbf{F}_n(s_0) = 0 \tag{6}$$

Учтем, что главные особенности T_i создаются только старшими производными $\mathbf{w}$, имеющими вид [5,6]

$$T'(\mathbf{w}) = \int_{s_0}^{s} \left(2\mu \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{w}_0 + \mu(\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{w}_0)\right) ds$$

$$T_3 = \int_{s_0}^{s} \left(\frac{\partial \Delta w_3}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial^3 w_3}{\partial n \partial s^2}\right) ds, \qquad T_4 = \sigma \Delta w_3 + (1-\sigma)\frac{\partial^2 w_3}{\partial n^2} \tag{7}$$

Здесь введены векторы $T'(\mathbf{w})$ и $\mathbf{w}_0$, имеющие соответственно по две компоненты T_1, T_2 и w_1, w_2. Вычислим теперь на основе представления (3) и формул (7) вектор $T^{-}\mathbf{w}_n$.

Эти обычные в теории потенциала вычисления (например [5], стр. 268) приведут к формулам вида

$$T^{-}\mathbf{w}_n = {}^1/_2\, T^{-}\mathbf{w}_{n-1} - \int_{S_1} TG(x, s)\, T^{-}\mathbf{w}_{n-1}(s)\, ds \tag{8}$$

Интеграл нужно понимать в смысле главного значения по Коши. Особенностью уравнений (8) будет то, что в результате интегрирования по незамкнутому контуру от s_0 до s в (7) сингулярность ядра $TG(s, s_1)$ имеет вид

$$K(s, s_1) = K_1(s, s_1) - K_1(s, s_0)$$

Здесь $K_1(s, s_1)$ представляет собой сингулярное ядро Коши, а $K_1(s, s_0)$ — сингулярное ядро Коши с неподвижной особенностью s_0. Из уравнения (8) усматриваем, что применимость схемы (3) эквивалентна доказательству того, что для уравнения

$$\varphi(s) = \chi\left({}^1/_2\, \varphi(s) - \int_{S_1} TG(s, s_1)\, \varphi(s_1)\, ds_1\right) \tag{9}$$

справедлива теория Фредгольма и что его собственные значения превосходят единицу. Перепишем систему (9) в виде

$$\varphi(s) + \eta \int_{S_1} TG(s, s_1)\varphi(s_1)\,ds_1 = 0, \qquad \eta = \frac{2\chi}{2-\chi} \tag{10}$$

По формулам (7) составим символическую матрицу системы (10)

$$I_0 = \| p_{kl} \| \quad (k, l = 1, 2, 3, 4) \tag{11}$$

$$p_{31} = p_{41} = p_{32} = p_{42} = 0$$

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{44} = 1, \quad p_{13} = p_{14} = p_{23} = p_{24} = 0$$

$$p_{12} = -p_{21} = {}^1/_4\eta i\ (1-\sigma), \ -p_{34} = p_{43} = {}^1/_4\ \eta i\ (1+\sigma)$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона.

При составлении символической матрицы неподвижная особенность во внимание не принималась. Значения χ, соответствующие $\det I_0 = 0$, при всех физически мыслимых значениях σ не попадают в интервал $-1 \leqslant \chi \leqslant 1$. Кроме того, оператор

$$\mathbf{R} = I\varphi(t) - \eta K \left[\int_{S_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{t-z} - \int_{S_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{s_0 - z} \right]$$

в котором I — единичная, K — постоянная матрица, известным образом связанная с I_0, регуляризирует (10) при значениях χ, когда $\det I_0 \neq 0$, т. е. приводит к фредгольмову уравнению.

Теперь докажем, что уравнение $\mathbf{R} = 0$ имеет только тривиальные нули при значениях χ, удовлетворяющих условию регуляризации. Непосредственная подстановка показывает, что постоянный вектор не может быть нулем уравнения $\mathbf{R} = 0$ и что все нули уравнения

$$\mathbf{R}_1 = I\varphi(t) - \eta K \int_{S_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{t-z} \tag{12}$$

отличаются на постоянный вектор от нулей уравнения $\mathbf{R} = 0$ и наоборот. Но уравнение (12) при χ, удовлетворяющих условию регуляризации, имеет лишь тривиальные нули ([7], § 63), а значит то же можно сказать о нулях уравнения $\mathbf{R} = 0$. Итак, для уравнения (9) справедлива теория Фредгольма. Доказательство того, что собственные значения действительны и не заключены в интервале $-1 < \chi < 1$ проходит классическим путем [8]. Для этого замечаем, что, составив потенциал

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + i\mathbf{V}_2 = \sum_{i=1}^{4} \int_{S_1} \mathbf{G}_i(x, s)\,\varphi_i(s)\,ds, \qquad \eta = \eta_1 + i\eta_2$$

из уравнения (10) получим $\varphi(s_0) = 0$ и по формулам скачков

$$\varphi(s) = T^+\mathbf{V} - T^-\mathbf{V}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \int_{S_1} T\mathbf{G}_i(s, s_1)\,\varphi_i(s_1)\,ds_1 = \frac{T^+\mathbf{V} + T^-\mathbf{V}}{2} \tag{13}$$

Подставляя это в (10), разделяя действительную и мнимую части, умножая скалярно действительную часть на вектор $(\omega_{tt}, -\varepsilon_{ii}, \theta_t, \theta_\nu)\,\mathbf{V}_1$, а мнимую часть на вектор $(\omega_{tt}, -\varepsilon_{tt}, \theta_t, \theta_\nu)\mathbf{V}_2$, вычитая одно из другого, получим после интегрирования по S_1 с учетом условий на S_0

$$(2-\eta_1)\ (W_0 + W_1) + (2 + \eta_1)\ (W'_0 + W_1') = 0 \tag{14}$$

Умножив действительную часть (10) на $(\omega_{tt}, -\varepsilon_{tt}, \theta_t, \theta_\nu)\,\mathbf{V}_2$, а мнимую на $(\omega_{tt}, -\varepsilon_{tt}, \theta_t, \theta_\nu)\ \mathbf{V}_1$, сложив, проинтегрируем по S_1 полученную сумму с учетом условий на S_0. В результате найдем

$$\eta_2\,(W_0 + W_1) - \eta_2\,(W_0' + W_1') = 0 \tag{15}$$

В двух последних формулах W_0 и W_1 — соответственно потенциальная энергия деформации, отвечающая перемещению $\mathbf{V}_1$ сплошных областей D_0 и D_1. W_0' и W_1' — потенциальная энергия деформации тех же областей, соответствующая вектору $\mathbf{V}_2$.

Вследствие положительности энергии из (14), (15) следует, что $\eta_2 = 0$, $|\eta_1| \geqslant 2$. Доказательство того, что $\eta_1 = 2$ не будет собственным значением (10), основано на единственности внутренней задачи Дирихле и проводится как в [5] (стр. 345). Все вышеизложенное приводит к оправданию схемы (3) в гельдеровской норме. После того, как доказана сходимость, нет нужды вычислять в (3) каждый раз главный вектор и момент. В силу теорем единственности можно подсчитывать обычные кирхгофовы усилия по контуру Q (w) и момент M.

Это связано также с тем, что в случае $\mathbf{f} \in H(0, A, \lambda)$, $S_1 \in Л_4(B, \lambda)$ ряды (8) допускают дифференцирование, а из представления резольвенты Фредгольма в виде частного целых функций следует, что производные сходятся при тех же условиях, что F. Поэтому вместо (8) можно подсчитывать на каждом этапе

$$Q^-(\mathbf{w}_n) = {}^1\!/_2\, Q^-(\mathbf{w}_{n-1}) - \sum_{i=1}^{4} \int_S Q\,[\mathbf{G}_i'(x, s)\, Q_i^-(\mathbf{w}_{n-1})]\, ds \tag{16}$$

Здесь векторы $\mathbf{G}_i'(x, s)$ — смещения оболочки от «единичных» сил, приложенных к S_1; величины Q_i $(i = 1, 2, 3)$ — компоненты Q (w), а $Q_4 = M$.

Следует подчеркнуть, что схема (3) представляет собой перенесение на оболочки схемы решения Нейманом краевой задачи с заданной нормальной производной для уравнения Лапласа [9]. Необходимо заметить также, что численное построение решения по схеме (3) сопряжено в настоящее время со значительными трудностями [10].

Рассмотрим условия применения в современной вычислительной технике схемы (3). Основная трудность счета [10] связана с наличием в выражениях для удлинений ε_{ij} членов вида w / R, а также отмеченным ранее фактом, что главная часть тензора Грина теории оболочек такая же, как у пластин. При реализации схемы (3) поэтому образуются члены вида

$$\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta}{Rh^3} \tag{17}$$

Вследствие малой толщины h в общем случае нагружения произвольной оболочки величина β должна вычисляться с точностью порядка h^2, что, очевидно, в имеющихся ЭЦВМ не осуществимо. Поэтому выделим класс оболочек, для которых оба слагаемых в выражении (17) одного порядка. Из представлений (3), (5) и формул для граничных усилий [4] оценим норму в L_2 нормальных усилий на контуре S_1 в любом приближении. Тогда будем иметь в (17) вместо первого члена $\alpha_1 / hd^{1/2}$, а вместо второго $\alpha_2 d^{5/2} / 2\pi Rh^3$. Величины α_1 и α_2 примерно одинаковы, R — минимальный радиус кривизны, а d — характерный диаметр отверстия или расстояние между отверстиями. Если потребовать, чтобы последнее выражение превышало первое (для возможности численного просчета) не более чем в 15—20 раз, то получится выражение для максимального d

$$d \approx 4.5\ (Rh^2)^{1/3} \tag{18}$$

Заметим, что условие (18) для обычно применяемых оболочек почти совпадает численно с условием $d^2 \ll 4\, Rh$, полученным в [1] для цилиндрической оболочки. Следует сказать, что выполнение (18) гарантирует возможность счета для оболочки с произвольными отверстиями и при произвольной нагрузке, в то время как решение А. И. Лурье применимо лишь для первоначально безмоментной цилиндрической оболочки с одним малым круговым отверстием.

Дальнейшее усиление условия (18) связано с выяснением вида напряженного состояния оболочки. Так $\beta = 0$ в случаях чисто моментного или безмоментного напряженных состояний. Поэтому, несмотря на то, что схема Неймана (3) математически строго всегда сходится, ее численная реализация при современных вычислительных возможностях в общем случае нагружения ограничена условием (18). Поэтому при $R = (100 \div 1000)h$, будем иметь $d \leqslant (20 \div 40)h$. Этот класс оболочек представляет практический интерес.

Приношу благодарность В. В. Новожилову за постановку задачи.

Поступила 24 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
2. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек, ч. 2. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1964.
3. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
5. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
6. Кирхгоф Г. Р. Механика. М., Изд-во АН СССР, 1962.
7. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.—Л., Гостехтеориздат, 1950.
8. Poincare H. Et metode Neumann et le probleme de Dirichlet. Acta math., 1897, vol. 20, pp. 59—142.
9. Neumann C. Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Ebend, 1877.
10. Михлин С. Г. Упругие оболочки, близкие к плоским пластинам. В сб.: «Вопросы прочности лопасти водяной турбины». Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1954.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СРЕДЫ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

В. А. Пальмов

(Ленинград)

1. В настоящее время внимание большого числа исследователей привлечено к изучению сред сложной структуры. Простейшей из них является среда Коссера [1,2]. Более сложна среда Миндлина с микроструктурой [3]. Чрезвычайная сложность присуща мультиполярной механике, разработанной Грином и Ривлином [4].

Существенной особенностью всех перечисленных теорий является пересмотр понятия точки. Если в классической механике сплошной среды каждая точка обладает только степенями свободы поступательного перемещения, то в теории Коссера ей приписаны степени свободы твердого тела. В теории сред с микроструктурой каждая точка обладает степенями свободы тела с однородной деформацией, т. е. двенадцатью степенями свободы. В мультиполярной механике механическое состояние каждой точки определяется n кинематическими параметрами, где n может быть конечным, но сколь угодно большим. Ниже строится новая модель среды подобного рода.

Постулируем наличие некоторой несущей среды и будем предполагать, что ее поведение описывается уравнениями Ламе классической теории упругости

$$(\lambda + \mu) \nabla\nabla \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} - \rho \mathbf{u}^{\cdot\cdot} + \mathbf{K} = 0 \tag{1.1}$$

где ρ — плотность несущей среды, λ и μ — характеристики ее упругости, $\mathbf{u}$ — вектор перемещения точек несущей среды, $\mathbf{K}$ — интенсивность внешних объемных сил. Будем предполагать, что с каждой точкой несущей среды связан бесконечный набор невзаимодействующих изотропных осцилляторов с непрерывно распределенными собственными частотами. Уравнение движения типичного осциллятора с собственной частотой α имеет вид

$$m(\alpha)\, \mathbf{v}_\alpha^{\cdot\cdot} + c(\alpha) \left[1 + R_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right] (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}) = \mathbf{Q}_\alpha \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v}_\alpha$ — вектор абсолютного перемещения массы осциллятора, $\mathbf{Q}_\alpha$ — внешняя сила, приложенная к ней. Величина $m(\alpha)\, d\alpha$ равна заключенной в единице объе-