О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ КОНТАКТНОГО ТИПА

Б. Е. Победря (Москва)

Для задач теории упругости контактного типа доказываются теоремы единственности и существования; исследуется вопрос о спектре Коссера — Михлина.

1. Будем называть задачами контактного типа такие задачи теории упругости, в которых на каждой части $\Sigma^{(q)}$ границы Σ рассматриваемого тела, занимающего объем V, заданы краевые условия следующего вида [1]:

$$a_{ik}^{(q)}\sigma_{kj}l_j + b_{ik}^{(q)}u_k = N_i^{(q)}, \qquad \langle q=1, 2, \ldots, N\rangle \tag{1.1}$$

Здесь σ_{kj} — компоненты тензора напряжения, u_k — компоненты вектора перемещения, N_i — контактные усилия, l_j — направляющие косинусы нормали к площадке. Элементы матриц $\mathrm{A}^{(q)}$ имеют размерность единицы, а элементы матриц $\mathrm{B}^{(q)}$— размерность упругого модуля, поделенного на длину. Предположим сначала, что матрицы $\mathrm{A}^{(q)}$ и $\mathrm{B}^{(q)}$ будут диагональными с неотрицательными элементами

$$\mathrm{A}^{(q)} = \begin{Vmatrix} a_1^{(q)} & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{(q)} & 0 \\ 0 & 0 & a_3^{(q)} \end{Vmatrix}, \qquad \mathrm{B}^{(q)} = \begin{Vmatrix} b_1^{(q)} & 0 & 0 \\ 0 & b_2^{(q)} & 0 \\ 0 & 0 & b_3^{(q)} \end{Vmatrix}$$

Если $a_k^{(q)} = 0$, то в этом случае обязательно $b_k^{(q)} \neq 0$ и в направлении k на части поверхности $\Sigma^{(q)}$ заданы перемещения

$$u_k = N_k^{(q)} / b_k^{(q)} \qquad \langle k=1,2,3\rangle$$

Если $b_k^{(q)} = 0$, то обязательно отлично от нуля $a_k^{(q)}$ и в направлении k на части поверхности $\Sigma^{(q)}$ заданы нагрузки

$$\sigma_{ki}l_i = N_k^{(q)} / a_k^{(q)} \qquad \langle k=1,2,3\rangle \quad .$$

В частности, так называемые смешанные граничные условия получаются, если q принимает значения 1 и 2; на $\Sigma^{(1)}$ заданы поверхностные нагрузки S_i^0, и на $\Sigma^{(2)}$ перемещения u_i°, причем

$$a_{ij}^{(1)} = \delta_{ij}, \qquad b_{ij}^{(1)} = 0, \qquad N_i^{(1)} = S_i^\circ$$
$$a_{ij}^{(2)} = 0, \qquad b_{ij}^{(2)} = C\delta_{ij}, \qquad N_i^{(2)} = Cu_i^\circ$$

Здесь C — некоторая величина, имеющая такую же размерность, что и каждый элемент матриц $\mathrm{B}^{(q)}$.

2. Задача теории упругости заключается в интегрировании уравнений движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho u_i^{\cdot\cdot} \tag{2.1}$$

при выполнении краевых условий (1.1) и некоторых начальных условий. При этом тензор напряжений выражается через тензор деформаций для изотропной среды по закону Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

а тензор малых деформаций ε_{ij} через вектор перемещений u_i по соотношениям Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad \theta = \varepsilon_{kk} = u_{k,k}$$

Решение поставленной задачи единственно. В самом деле, для разности двух решений $u_i = u_i^{(2)} - u_i^{(1)}$ из уравнений движения (2.1) следует

$$\int_V [\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{\cdot} + \rho u_i^{\cdot\cdot}u_i^{\cdot}]\, dV = \int_\Sigma \sigma_{ij}l_ju_i^{\cdot}d\Sigma \tag{2.2}$$

---

[1] Всюду по повторяющимся нижним индексам предполагается суммирование от 1 до 3, за исключением случая, когда значения индекса заключаются в угловые скобки.

Разобьем интеграл в правой части (2.2) на сумму интегралов по поверхности $\Sigma^{(q)}$. На каждой такой поверхности определим диагональную матрицу $\Gamma^{(q)}$ по следующему правилу. Элемент матрицы $\Gamma^{(q)}$ $\gamma_k^{(q)}$ равен нулю, если хотя бы один из соответствующих элементов матриц $A^{(q)}$ и $B_k^{(q)}$: $a_k^{(q)}$ или $b^{(q)}$ равен нулю и

$$\gamma_k^{(q)} = b_k^{(q)} / a_k^{(q)}$$

если элементы $a_k^{(q)}$ и $b_k^{(q)}$ одновременно отличны от нуля. Тогда, как видно из однородных граничных условий (1.1), которым удовлетворяет разность решений

$$\int\limits_{\Sigma} \sigma_{ij} l_j u_i^{\cdot} d\Sigma = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{N} \int\limits_{\Sigma^{(q)}} \gamma_{ij}^{(q)} \frac{\partial}{\partial t} (u_i u_j)\, d\Sigma$$

Таким образом, соотношения (2.2) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int\limits_V \left[\left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \theta^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij} \right] dV + \frac{1}{2} \rho u_i^{\cdot} u_i^{\cdot} \right\} + \sum_{q=1}^{N} \int\limits_{\Sigma^{(q)}} \gamma_{ij}^{(q)} u_i u_j d\Sigma \qquad (2.3)$$

Отсюда в силу положительности каждого слагаемого в (2.3) и однородности начальных данных следует единственность поставленной задачи в следующем интервале изменения коэффициента Пуассона ν:

$$-1 \leqslant \nu < {}^1/_2 \qquad (2.4)$$

(Очевидно, что единственность не нарушается и в том случае, если $a_k^{(q)}$ и $b_k^{(q)}$ одновременно строго отрицательны.)

Из доказанного как частный случай вытекает единственность решения квазистатических задач, для которых правая часть уравнений (2.1) полагается равной нулю. В этом случае уравнения равновесия можно записать в следующем виде:

$$u_{i,jj} + \varkappa u_{j,ij} = f_i \qquad (2.5)$$

а граничные условия (1.1) на части $\Sigma^{(q)}$ поверхности Σ в виде

$$a_{ik}^{(q)} [(\varkappa - 1) l_k u_{j,j} + l_j (u_{k,j} + u_{j,k})] + b_{ik}^{(q)} u_k = n_i^{(q)} \qquad (2.6)$$

$$\varkappa \equiv \frac{1}{1-2\nu}, \quad f_i \equiv -\frac{\rho F_i}{\mu}, \quad n_i^{(q)} \equiv \frac{N_i^{(q)}}{\mu}$$

3. Исследованию спектра Коссера, т. е. вопроса о собственных значениях параметра $\varkappa$ и соответствующих собственных функциях первых двух краевых задач статической теории упругости, посвящены работы [1,2]. Для исследования этого вопроса в задачах контактного типа (2.5), (2.6) воспользуемся теоремой С. Г. Михлина [2].

Пусть дано операторное уравнение

$$(\mathbf{R} - \tau \mathbf{T})\, \mathbf{u} = 0 \qquad (3.1)$$

и выполнены следующие условия:

$\mathbf{R}$ — положительно-определенный дифференциальный оператор;

$\mathbf{T}$ — симметричный при данных краевых условиях дифференциальный оператор;

оператор $\mathbf{R} - \tau\mathbf{T}$ предполагается эллиптическим при всех значениях τ, кроме дискретного множества M_1;

для данных краевых условий выполнено условие дополнительности [3] при всех τ, кроме дискретного множества M_2.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. Уравнение (3.1) может иметь точками сгущения спектра только точки множества M_1 или множества M_2.

2°. Система собственных функций уравнения (3.1) полна в H — энергетическом пространстве оператора $\mathbf{R}$.

3°. Собственные значения действительны.

4°. Собственные функции, соответствующие различным собственным числам, ортогональны в метрике пространства H.

Рассмотрим однородную систему уравнений

$$\Delta^* u_i \equiv u_{i,jj} + \varkappa u_{j,ij} = 0 \tag{3.2}$$

и однородные краевые условия контактного типа

$$a_{ik}^{(q)} [(\varkappa - 1) l_k u_{j,j} + l_j (u_{k,j} + u_{j,k})] + b_{ik}^{(q)} u_k = 0 \tag{3.3}$$

Под оператором $\mathbf{R}$ будем понимать оператор

$$\mathbf{R} u_i \equiv - u_{i,jj} - u_{j,ij} \tag{3.4}$$

причем граничным условиям отвечает оператор $\mathbf{r}$, действующий на Σ

$$- \mathbf{r} u_i \equiv a_{ik}^{(q)} l_j (u_{k,j} + u_{j,k}) + b_{ik}^{(q)} u_k \tag{3.5}$$

Под оператором $\mathbf{T}$ понимаем оператор

$$\mathbf{T} u_i \equiv u_{j,ij} \tag{3.6}$$

с оператором $\mathbf{t}$, отвечающим граничным условиям на каждой $\Sigma^{(q)}$

$$\mathbf{t} u_i \equiv a_{ik}^{(q)} l_k u_{j,j} \tag{3.7}$$

Так что однородной краевой задаче (3.2), (3.3) соответствует операторное уравнение (3.1) с краевыми условиями

$$(\mathbf{r} - \tau \mathbf{t}) u_i = 0 \qquad \left(\tau = \varkappa - 1 = 2 \frac{\nu}{1 - 2\nu}\right)$$

Для доказательства положительной определенности оператора $\mathbf{R}$ воспользуемся третьей формулой Бетти [4]

$$\int_V (u_i \Delta^* v_i - v_i \Delta^* u_i)\, dV = \int_\Sigma [u_i P_i (v) - v_i P_i (u)]\, d\Sigma \tag{3.8}$$

$$P_i (u) \equiv (\varkappa - 1) l_i u_{j,j} + (u_{i,j} + u_{j,i}) l_j$$

Разбивая правую часть (3.8) на сумму интегралов по $\Sigma^{(q)}$ и образуя как и ранее матрицу $\Gamma^{(q)}$, имеем

$$\int_V (u_i \Delta^* v_i - v_i \Delta^* u_i)\, dV = \sum_{q=1}^{N} \int_{\Sigma^{(q)}} \gamma_{ij}^{(q)} (v_i u_j - v_j u_i)\, d\Sigma \tag{3.9}$$

Из формулы (3.9) при $\varkappa = 1$ следует симметричность оператора $\mathbf{R}$ (3.4) при краевых условиях (3.5). Далее воспользуемся второй формулой Бетти [4]

$$\int_V u_i \Delta^* u_i dV = \int_\Sigma u_i P_i (u)\, d\Sigma - \int_V E (u, u) \cdot dV \tag{3.10}$$

Квадратичная форма

$$E (u, u) \equiv (\varkappa - 1) \theta^2 + u_{i,j} u_{i,j} + u_{i,j} u_{j,i}$$

при $\varkappa = 1$, т. е. при $\nu = 0$, положительно определена в силу доказанной теоремы единственности. Так как поверхностный интеграл в правой части (3.10)

$$\int_\Sigma u_i P_i (u)\, d\Sigma = - \sum_{q=1}^{N} \int_{\Sigma^{(q)}} \gamma_{ij}^{(q)} u_i u_j d\Sigma \tag{3.11}$$

отрицателен и равен нулю только при $u_i \equiv 0$, то оператор $\mathbf{R}$ (3.4), получающийся из Δ^* при $\varkappa = 1$, положительно определен.

Далее оператор $\mathbf{T}$ (3.6) симметричен при граничных условиях (3.7)

$$\int_V (u_{j,ij} v_i - v_{j,ij} u_i)\, dV = \int_\Sigma (u_{j,j} v_i - v_{j,j} u_i) l_i d\Sigma \equiv 0$$

Дифференциальное уравнение (3.2) — эллиптическое в смысле И. Г. Петровского при всех действительных $\varkappa$, кроме $\varkappa = -1$ и $\varkappa = \infty$. Вычисления показывают, что «условия дополнительности» [3] выполнены при всех $\varkappa$, кроме $\varkappa = -2, -1, 0, \infty$. Можно считать при этом, что элементы матриц A и B являются достаточно гладкими функциями координат на Σ. Предпосылки теоремы С. Г. Михлина выполнены и поэтому справедливы утверждения 1° — 4°, оператор задачи (3.2), (3.3) нормально разрешим и имеет конечный индекс [5] для всех $\varkappa$, кроме $\varkappa = -2$, -1, 0, ∞. Отличные от этих значений собственные числа задачи (3.2), (3.3) имеют конечную кратность.

Определители Агмона — Дуглиса — Ниренберга, фигурирующие в «условиях дополнительности» краевых условий обращаются в нуль только на тех частях $\Sigma^{(q)}$ поверхности Σ, на которых заданы либо только перемещения, либо только усилия, поэтому точки $\varkappa = -\infty$, $\varkappa = -1$ суть собственные числа бесконечной кратности [2].

Зная собственные функции задачи (3.2), (3.3) $u_i^{(n)}$ (предположим, что они ортонормированы в энергетическом пространстве H оператора $\mathbf{R}$), можно легко найти решение неоднородной задачи (2.5), (2.6). Пусть $\varkappa$ не принадлежит спектру, тогда решение существует

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varkappa_n - 1)}{\varkappa_n - \varkappa} u_i^{(n)}, \qquad f_n \equiv (f_i,\ u_i^{(n)})$$

Отсюда в частности, следует теорема существования задачи теории упругости с контактными граничными условиями, так как в диапазоне (2.4) в силу доказанной теоремы единственности нет точек спектра задачи (3.2), (3.3).

4. Пусть теперь матрицы A и B, входящие в соотношения (1.1), не обязательно будут диагональными. Предположим, что эти матрицы вырождены в том и только в том случае, если у них в k столбце или k строке стоят одни нули. Построим матрицу Г

$$\Gamma = A'B \tag{4.1}$$

Если матрица A — невырожденная, то $A' = A^{-1}$, где A^{-1} — матрица, обратная по отношению к A. Если матрица A — вырожденная, то могут встретиться следующих три случая:

1) A — вырождена (т. е. в k-й строке или k-м столбце стоят одни нули), но не вырождена матрица A_2, полученная вычеркиванием в A k-й строки и k-го столбца.

2) вырождены обе матрицы A и A_2 (в l строке или в l столбце стоят одни нули), но не вырождена матрица A_1, полученная вычеркиванием в A_2 l строки и l столбца.

3) вырождены все три матрицы A, A_2 и A_1.

В случае 1) в k-ю строку и k-й столбец матрицы A′ поместим одни нули, а остальное место заполним матрицей A_2^{-1}. В случае 2) k и l столбцы и строки матрицы A′ заполним нулями, а в свободное место поставим A_1^{-1}. Наконец, в случае 3) $A' \equiv 0$.

Нетрудно видеть теперь, что если матрица Г (4.1) положительно определенная, то справедливы все доказанные выше утверждения для диагональных матриц A и B, так как квадратичные формы $\gamma_{ij}^{(q)} u_i u_j$, входящие в соотношения (2.3) и (3.11), и в этом случае будут положительно определенными.

Поступила 8 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. О функциях Коссера. В сб.: «Проблемы математического анализа. Краевые задачи и интегральные уравнения». Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1966.
2. Михлин С. Г. Дальнейшее исследование функций Коссера. Вестн. Ленингр. ун-та, 1967, вып. 2, № 7.
3. Agmon S., Douglis A., Nierenberg Z. Estimates neav the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. Comm. Pure and Appl. Math., 1964, vol. 17, No. 1.
4. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
5. Агранович М. С., Дынин А. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области. Докл. АН СССР, 1962, т. 146, № 3.