Уравнение для V_{nkl}^s получается заменой индекса C в (3.6) и (3.7) на s и функции $\cos k\varphi$ на $\sin k\varphi$ в правых частях (3.7).

Интегрирование уравнений (3.6) и аналогичных уравнений для V_{nkl}^s легко выполняется в квадратурах, поскольку это линейные уравнения первого порядка. Подставляя находимые таким путем значения V_{nkl}^c и V_{nkl}^s в формулу (3.5), получаем полное решение задачи.

Поступила 22 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКО-УПРУГИХ ТЕЛ

А. Н. Гузь, В. Т. Головчан

(Киев)

Рассматриваются первая и вторая граничные задачи установившихся колебаний вязко-упругого тела, занимающего область в виде плоскости с бесконечным числом одинаковых круговых отверстий, которые образуют косоугольную решетку. Задачи сведены к бесконечным системам алгебраических уравнений с определителем нормального типа. При доказательстве единственности решения данных систем используются соображения физического характера.

Периодическим и двоякопериодическим задачам статической плоской теории упругости посвящена обширная литература. Весьма подробное изложение полученных результатов содержится в обзоре [1].

Поместим в центре каждого из отверстий начало 0_{qs} полярной системы координат r_{qs}, θ_{qs}, где r_{qs} — безразмерная координата, выраженная в долях радиуса отверстия R.

Введем следующие обозначения: Γ_{qs}— контур qs-го отверстия; R_{qs}^{00}, θ_{qs}^{00} — полярные координаты полюса 0_{00} в qs-й системе координат; $U(\theta_{qs})e^{-i\omega t}$, $V(\theta_{qs})e^{-i\omega t}$— заданные на Γ_{qs} компоненты смещения (вторая граничная задача); $P(\theta_{qs})e^{-i\omega t}$, $T(\theta_{qs})e^{-i\omega t}$ — нормальный и касательный компоненты внешних усилий, приложенных к контуру Γ_{qs} (первая граничная задача).

Как известно, двумерные задачи установившихся колебаний линейного вязко-упругого тела приводятся к решению двух уравнений

$$\Delta\Phi + \alpha^2\Phi = 0, \qquad \Delta\Psi + \beta^2\Psi = 0 \tag{1}$$

где α^2 и β^2 — некоторые комплексные числа с положительными мнимыми частями. Их выражения через механические параметры тела определяются принятым законом вязко-упругости.

Граничные условия на каждом из контуров Γ_{qs} могут быть представлены в форме

$$\begin{gathered}
a\alpha^2\Phi + \frac{1}{r_{qs}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r_{qs}} + \frac{1}{r_{qs}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_{qs}^2} + \frac{1}{r_{qs}}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_{qs}} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta_{qs}\partial r_{qs}}\right)\Bigg|_{r_{qs}=1} = F_1(\theta_{qs}) \\
b\beta^2\Psi + \frac{1}{r_{qs}}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r_{qs}} + \frac{1}{r_{qs}}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta_{qs}^2} - \frac{1}{r_{qs}}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_{qs}} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_{qs}\partial r_{qs}}\right)\Bigg|_{r_{qs}=1} = F_2(\theta_{qs})
\end{gathered} \tag{2}$$

для первой краевой задачи $a = \mathrm{const} \neq 0$, $b = \mathrm{const} \neq 0$

$$F_1(\theta_{qs}) = -\frac{R^2}{2\mu^*} P(\theta_{qs}) \text{ и } \qquad F_2(\theta_{qs}) = \frac{R^2}{2\mu^*} T(\theta_{qs})$$

Для второй задачи $a = b = 0$

$$F_1(\theta_{qs}) = R\left[U(\theta_{qs}) + \frac{\partial V(\theta_{qs})}{\partial \theta_{qs}}\right], \qquad F_2(\theta_{qs}) = R\left[\frac{\partial U(\theta_{qs})}{\partial \theta_{qs}} - V(\theta_{qs})\right]$$

Используя метод, ранее применявшийся авторами при решении задач упругих колебаний в случае многосвязных областей конечной связности [2], запишем решение уравнений (1) в виде

$$\Phi = \sum_n \sum_q \sum_s A_n H_n(\alpha r_{qs}) e^{in\theta_{qs}}, \qquad \Psi = \sum_n \sum_q \sum_s B_n H_n(\beta r_{qs}) e^{in\theta_{qs}} \tag{3}$$

где H_n — функция Ганкеля первого рода [1].

Постоянные A_n и B_n могут быть определены из граничных условий на любом из контуров Γ_{qs}, например на Γ_{00}. Для этого необходимо представить потенциалы Φ и Ψ в координатах r_{00} и θ_{00}, что можно осуществить с помощью следующей формулы:

$$H_n(cr_{qs}) e^{in\theta_{qs}} = \sum_p H_{n-p}(cR_{qs}^{00}) e^{i(n-p)\theta_{qs}^{00}} J_p(cr_{00}) e^{ip\theta_{00}} \qquad (r_{00} < R_{qs}^{00}) \tag{4}$$

Здесь J_p — функция Бесселя первого рода. После некоторых преобразований имеем

$$\begin{aligned} \Phi(r_{00}, \theta_{00}) &= \sum_n [A_n H_n(\alpha r_{00}) + S_n J_n(\alpha r_{00})] e^{in\theta_{00}} \\ \Psi(r_{00}, \theta_{00}) &= \sum_n [B_n H_n(\beta r_{00}) + Q_n J_n(\beta r_{00})] e^{in\theta_{00}} \end{aligned} \tag{5}$$

причем

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_p {\sum_q}' {\sum_s}' A_p H_{p-n}(\alpha R_{qs}^{00}) \exp i(p-n)\theta_{qs}^{00} \\ Q_n &= \sum_p {\sum_q}' {\sum_s}' B_p H_{p-n}(\beta R_{qs}^{00}) \exp i(p-n)\theta_{qs}^{00} \end{aligned} \tag{6}$$

Штрихи над суммами в (6) означают, что в них опущены слагаемые, для которых $q = s = 0$.

Разложим правые части граничных условий (2) в ряды Фурье

$$F_l(\theta_{00}) = \sum_n f_{l,n} e^{in\theta_{00}} \qquad (l = 1, 2) \tag{7}$$

Подстановка выражений (5) и (7) в (2) приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений с неизвестными A_n и B_n

$$\begin{aligned} A_n \bar{u}_{n,1}(\alpha) + B_n \bar{u}_{n,2}(\beta) &= f_{1,n} - S_n u_{n,1}(\alpha) - Q_n u_{n,2}(\beta) \\ -A_n \bar{u}_{n,2}(\alpha) + B_n \bar{u}_{n,1}(\beta) &= f_{2,n} + S_n u_{n,2}(\alpha) - Q_n u_{n,1}(\beta) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \end{aligned} \tag{8}$$

---

[1] Здесь и в суммах, встречающихся ниже, индексы суммирования изменяются в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

В системе (8) приняты обозначения

$$u_{n,1}(x) = (cx^2 - n^2) J_n(x) + xJ_n'(x), \quad u_{n,2}(x) = in\,[(J_n(x) - xJ_n'(x)]$$

$$c = a \text{ при } x = \alpha, \quad c = b \text{ при } x = \beta$$

Формулы для $\bar{u}_{n,1}$ и $\bar{u}_{n,2}$ получаются из $u_{n,1}$ и $u_{n,2}$ заменой $J_n(x)$ и $J'_n(x)$ на $H_n(x)$ и $H_n'(x)$.

Теперь сделаем замену неизвестных A_n и B_n, полагая

$$A_n\bar{u}_{n,1}(\alpha) + B_n\bar{u}_{n,2}(\beta) = C_n$$

$$-A_n\bar{u}_{n,2}(\alpha) + B_n\bar{u}_{n,1}(\beta) = D_n$$

в результате чего система (8) принимает канонический вид

$$C_n = \sum_p [\zeta_{n,p}(\alpha,\beta)\, C_p + \eta_{n,p}(\alpha,\beta)\, D_p] + f_{1,n}$$

$$D_n = \sum_p [-\eta_{n,p}(\beta,\alpha)\, C_p + \zeta_{n,p}(\beta,\alpha)\, D_p] + f_{2,n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{9}$$

Для коэффициентов системы (9) введены обозначения

$$\begin{matrix}\zeta_{n,p}(\alpha,\beta)\\ \eta_{n,p}(\alpha,\beta)\end{matrix} = \frac{1}{\Delta_p}\left[\begin{matrix}-\bar{u}_{p,1}(\beta)\\ \bar{u}_{p,2}(\beta)\end{matrix}\; u_{n,1}(\alpha) \sum_q{}' \sum_s{}' H_{p-n}(\alpha R_{qs}^{00})\, e^{i(p-n)\,\theta_{qs}^{00}} - \right.$$

$$\left. - \begin{matrix}\bar{u}_{p,2}(\alpha)\\ \bar{u}_{p,1}(\alpha)\end{matrix}\; u_{n,2}(\beta) \sum_q{}' \sum_s{}' H_{p-n}(\beta R_{qs}^{00})\, e^{i(p-n)\,\theta_{qs}^{00}}\right] \tag{10}$$

$$\Delta_p = \bar{u}_{p,1}(\alpha)\,\bar{u}_{p,1}(\beta) + \bar{u}_{p,2}(\alpha)\,\bar{u}_{p,2}(\beta)$$

Покажем, что определитель бесконечной системы (9) есть определитель нормального типа [3]. Для этого, очевидно, достаточно доказать сходимость двойного ряда

$$\sum_n \sum_p |\zeta_{n,p}(\alpha,\beta)| \tag{11}$$

При установлении сходимости ряда (11) нам понадобится оценка сверху модуля суммы

$$\left|\sum_q{}' \sum_s{}' H_{p-n}\left(\frac{x}{\delta} R_{qs}^{00}\right) \exp i\,(p-n)\,\theta_{qs}^{00}\right| \qquad (x = \alpha\delta,\ \beta\delta) \tag{12}$$

которую можно получить, используя следующие формулы из теории цилиндрических функций:

$$H_{\nu+m}(z) = H_\nu(z)\, R_{m,\nu}(z) - H_{\nu-1}(z)\, R_{m-1,\nu+1}(z)$$

$$R_{m,\nu}(z) = \sum_{l=0}^{\leqslant \frac{1}{2}m} \frac{(-1)^l\,(m-l)!\,\Gamma(\nu+m-l)}{l!\,(m-2l)!\,\Gamma(\nu+l)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-m+2l} \tag{13}$$

Здесь $R_{m,\nu}(z)$ — полиномы Ломмеля [4], а δ — наименьшее расстояние между двумя соседними отверстиями. Отсюда, полагая

$$\nu = 0, \quad m = |p - n|, \quad z = \frac{x}{\delta} R_{qs}^{00}$$

после некоторых преобразований имеем

$$\left|\sum_q{}' \sum_s{}' H_{p-n}\left(\frac{x}{\delta} R_{qs}^{00}\right) \exp i\,(p-n)\,\theta_{qs}^{00}\right| < M\,[|R_{|p-n|,0}(i\,|x|)| + |R_{|p-n|-1,1}(i\,|x|)|] \tag{14}$$

где M равно бо́льшему из чисел

$$\left|\sum_q{}'\sum_s{}' H_0\left(\frac{x}{\delta} R_{qs}^{00}\right) \exp i(p-n)\,\theta_{qs}^{00}\left(\frac{R_{qs}^{00}}{\delta}\right)^{-|p-n|+2l}\right| \quad (2l \leqslant |p-n|)$$

$$\left|\sum_q{}'\sum_s{}' H_1\left(\frac{x}{\delta} R_{qs}^{00}\right) \exp i(p-n)\,\theta_{qs}^{00}\left(\frac{R_{qs}^{00}}{\delta}\right)^{-|p-n|+2l+1}\right| \quad (2l \leqslant |p-n|-1)$$

Исходя из предельного соотношения Гурвица [4]

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu+m} R_{m,\,\nu+1}(z)}{\Gamma(\nu+m+1)} = J_\nu(z)$$

запишем неравенство (14) при больших значениях $|p-n|$

$$\left|\sum_q{}'\sum_s{}' H_{p-n}\left(\frac{x}{\delta} R_{qs}^{00}\right) \exp i(p-n)\,\theta_{qs}^{00}\right| < M\left(\frac{2}{|x|}\right)^{|p-n|-1} (|p-n|-1)!\,[|J_1(i|x|)| + J_0(i|x|)] \tag{15}$$

Учитывая асимптотические формулы для цилиндрических функций с большим индексом, а также неравенство (15), из выражений (10) можно получить оценки для членов ряда (11) при больших ($|p| + |n|$). Из этих оценок следует, что ряд (11) мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_n\sum_p \frac{(|n|+1)^2(|p|+1)^2(|p|+|n|)!}{|n|!\,|p|!}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{|n|+|p|}$$

отсюда делаем заключение о сходимости первого.

Таким образом, двойной ряд, составленный из модулей коэффициентов бесконечной системы (9), также сходится, а значит данная система имеет определитель нормального типа. Так как свободные члены системы (9) ограничены, то для нее справедливы теоремы, аналогичные теоремам Крамера для конечных систем [3]. Система (9) имеет единственное ограниченное решение, если ее определитель отличен от нуля. Если же этот определитель равен нулю, то соответствующая однородная система допускает нетривиальное решение. Последнее, однако, не может иметь места, так как в рассматриваемой среде не могут существовать незатухающие свободные колебания.

В процессе вывода системы (9) допускалась перестановка сумм в рядах (3), а также их почленное дифференцирование. Эти операции законны в том случае, если коэффициенты Фурье правых частей граничных условий (2) имеют порядок не ниже чем $O(n^{-4})$.

Периодические задачи установившихся колебаний вязко-упругого тела получаются из рассмотренных выше как частный случай.

Поступила 28 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Итоги науки. Упругость и пластичность. 1965, М., 1967.
2. Гузь А. Н., Головчан В. Т. О решении основных граничных задач теории установившихся колебаний для бесконечной плоскости с круговыми отверстиями. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., Изд-во иностр. лит., 1949.