О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА ДЛЯ РАСШИРЯЮЩИХСЯ ИЛИ СЖИМАЮЩИХСЯ ОБЛАСТЕЙ, ФОРМА КОТОРЫХ МЕНЯЕТСЯ СО ВРЕМЕНЕМ БЕЗ СОБЛЮДЕНИЯ ПОДОБИЯ

Г. А. Гринберг, В. А. Косс

(Ленинград)

Метод, изложенный в работе Г. А. Гринберга «О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей», приводит к точным решениям для некоторого класса областей, изменяющихся без соблюдения подобия, а именно: полностью решается краевая задача для диффузионного уравнения для параллелепипеда или цилиндра (цилиндрического слоя), граничные поверхности которого движутся по осям координат по законам $R_i(t) = \sqrt{M_i t^2 + N_i t + P_i}$, где i — номер координатной оси, M_i, N_i, P_i — постоянные, зависящие от индекса i.

Приводится пример решения задачи для цилиндра, равномерно расширяющегося или сжимающегося с различной скоростью по радиусу и высоте.

1. Ниже будет показано, что метод работы [1] применим и для областей, расширяющихся или сжимающихся без сохранения подобия.

Рассмотрим уравнение:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x_1, x_2, x_3, t), \quad u|_{t=0} = F(x_1, x_2, x_3) \tag{1.1}$$

где x_1, x_2, x_3 — декартовые координаты, f — заданная функция координат и времени t, причем задано начальное состояние $u|_{t=0} = F\ (x_1, x_2, x_3)$, граница области меняется во времени. Относительно каждой функции, описывающей закон изменения границы потребуем, чтобы как она, так и ее первая и вторая производные были непрерывны. Введем новые переменные

$$\xi_1 = x_1 / R_1, \quad \xi = x_2 / R_2, \quad \xi_2 = x_3 / R_3$$

Здесь R_1, R_2, R_3 — законы движения границ по осям x_1, x_2 и x_3 соответственно. В общем случае, предполагая $R_1 \neq R_2 \neq R_3$, получим для u следующее уравнение:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{R_i^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + \xi_i R_i R_i' \frac{\partial u}{\partial \xi_i}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} = f(\xi_1 R_1, \xi_2 R_2, \xi_3 R_3, t)$$

$$R_i' = \frac{dR_i}{dt} \tag{1.2}$$

Здесь производная $\partial u / \partial t$ берется при фиксированных ξ_1, ξ_2, ξ_3. Введем вместо u новую функцию V соотношением

$$u = qV, \qquad q = (R_1 R_2 R_3)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{3} R_i R_i' \xi_i^2\right) \tag{1.3}$$

Тогда для V получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{R_i^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_i^2} + {}^1/_4\, \xi_i^2 R_i'' R_i^3 V\right) - \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{f}{q} \quad \left(R_i'' = \frac{d^2 R_i}{dt^2}\right) \tag{1.4}$$

с начальным условием

$$V|_{t=0} = \frac{F(\xi_1 R_1, \xi_2 R_2, \xi_3 R_3)}{q}\bigg|_{t=0} \tag{1.5}$$

Если

$$R_i'' R_i^3 = -\alpha_i, \quad \text{или} \quad R_i = \sqrt{(A_i t + B_i)^2 - \alpha_i / A_i^2} \tag{1.6}$$

где α_i, A_i и B_i — постоянные, зависящие от индекса i, то уравнение (1.4) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{R_i^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_i^2} - \frac{\alpha_i}{4}\xi_i^2 V\right) - \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{f}{q} \tag{1.7}$$

Это уравнение может быть решено известным методом [2] всегда, если граничные условия для V — линейные с постоянными коэффициентами, что и предполагается в дальнейшем [1].

Таким образом, краевая задача для исходного уравнения (1.1) полностью решается для параллелепипеда, расширяющегося или сжимающегося без сохранения подобия, но так, что каждой точке ξ_1°, ξ_2°, ξ_3° неподвижной граничной поверхности в задаче для V соответствуют точки $x_i^\circ = \xi_i^\circ R_i$ ($i = 1, 2, 3$) граничной поверхности в исходной задаче для u, где $R_i(t)$ удовлетворяет (1.6).

2. Рассмотрим ту же задачу в цилиндрических координатах (r, φ, z)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(r, \varphi, z, t) \tag{2.1}$$

Пусть $R_1(t)$ и $R_2(t)$ — законы движения границы области по радиусу и оси z соответственно. Введем переменные

$$\xi_1 = \frac{r}{R_1}, \qquad \xi_2 = \frac{z}{R_2}, \qquad u = qV \tag{2.2}$$

$$q = \frac{1}{R_1 \sqrt{R_2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 R_i R_i'\right]$$

Уравнение (2.1) для V примет вид

$$\frac{1}{R_1^2}\left(\frac{1}{\xi_1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\xi_1\frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \frac{\xi_1^2}{4}R_1^3 R_1'' V + \frac{1}{\xi_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{1}{R_2^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_2^2} + \frac{\xi_2^2}{4}R_2^3 R_2'' V\right) -$$
$$- \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{f(\xi_1 R_1, \varphi, \xi_2 R_2, t)}{q} \tag{2.3}$$

Если, как и выше, $R_i^3 R_i'' = -\alpha_i$, то (2.3) может быть решено таким же способом и при тех же требованиях к граничным условиям, что и уравнение (1.7).

Следовательно, полностью решается задача для цилиндра или цилиндрического слоя, расширяющегося или сжимающегося с разными скоростями по радиусу и оси Z, но так, что каждой точке ξ_1°, φ°, ξ_2° неподвижной граничной поверхности в задаче для V соответствуют точки $r^\circ = \xi_1^\circ R_1, \varphi^\circ$, $z^\circ = \xi_2 R_2$ граничной поверхности в исходной задаче для u, где $R_i(t)$ удовлетворяет (1.6).

3. *Пример.* Пусть требуется решить уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(r, \varphi, z, t) \tag{3.1}$$

($r \in [0, R_1(t)]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, R_2(t)]$, $R_i = A_i t + B_i$ ($\alpha_i = 0$, $i = 1, 2$))

при граничных и начальном условиях

$$u|_{r=0} < M, \; u|_{r=R_1(t)} = \Psi(\varphi, z, t) \qquad (M = \mathrm{const})$$
$$\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma_2 u|_{z=0} = g(r, \varphi, t) \qquad (\gamma_1, \gamma_2 = \mathrm{const}) \tag{3.2}$$
$$u|_{z=R_2(t)} = P(r, \varphi, t), \; u(r, \varphi, z, t) = u(r, \varphi + 2\pi, z, t), \; u|_{(t=0)} = F(r, \varphi, z)$$

---

[1] Кстати, заметим, что особо отмеченный в работе [1] случай, позволяющий решить основную краевую задачу для уравнения (1.1) при условиях первого, второго или третьего рода на подвижной границе, сохраняет свою силу и для рассматриваемой задачи, когда $R_i = \sqrt{A_i t + B_i}$, причем, в общем случае, $A_1 \neq A_2 \neq A_3$, $B_1 \neq B_2 \neq B_3$.

Введя новые координаты ξ_1 и ξ_2 и функцию V по формулам (2.2), преобразуем задачу (3.1) и (3.2) к виду

$$\frac{1}{R_1^2}\left(\frac{1}{\xi_1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\xi_1\frac{\partial V}{\partial \xi_1}+\frac{1}{\xi_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)+\frac{1}{R_2^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_2^2}-\frac{\partial V}{\partial t}=f^*(\xi_1, \varphi, \xi_2, t) \tag{3.3}$$

Граничные и начальное условия будут

$$\begin{gathered}
f^*(\xi_1, \varphi, \xi_2, t)=\frac{f(\xi_1 R_1, \varphi, \xi_2 R_2, t)}{q}\\
V|_{\xi_1=0}<M \qquad (M=\mathrm{const})\\
V|_{\xi_1=1}=\frac{\psi(\varphi, \xi_2 R_2, t)}{q|_{\xi_1=1}}\equiv\psi^*(\varphi, \xi_2, t)\\
\gamma_1\frac{\partial V}{\partial \xi_2}+\gamma_2 V\Big|_{\xi_2=0}=\frac{g(\xi_1 R_1, \varphi, t)}{q|_{\xi_2=0}}\equiv g^*(\xi_1, \varphi, t)\\
V|_{\xi_2=1}=\frac{p(\xi_1 R_1, \varphi, t)}{q|_{\xi_2=1}}\equiv p^*(\xi_1, \varphi, t)\\
V(\xi_1, \varphi, \xi_2, t)=V(\xi_1, \varphi+2\pi, \xi_2, t)\\
V|_{t=0}=\frac{F(\xi_1 R_1, \varphi, \xi_2 R_2)}{q|_{t=0}}\equiv F^*(\xi_1, \varphi, \xi_2)
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Решение уравнения (3.3) с условиями (3.4) ищем в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи

$$V=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{J_k(\nu_n{}^k\xi_1)}{N_{kn}^2 N_l^2}\sin\lambda_l(1-\xi_2)\left[V_{nkl}^c(t)\cos k\varphi+V_{nkl}^s(t)\sin k\varphi\right] \tag{3.5}$$

$$N_{kn}^2={}^1/_2\left[J_k'^2(\nu_n{}^k)+\left(1-\frac{k^2}{(\nu_n{}^k)^2}\right)J_k^2(\nu_n{}^k)\right], \qquad N_l^2={}^1/_2-\frac{1}{4\lambda_l}\sin 2\lambda_l$$

$$V_{nkl}^c=\int_0^{2\pi}\cos k\varphi\int_0^1\xi_1 J_k(\nu_n{}^k\xi_1)\int_0^1 V\sin\lambda_l(1-\xi_2)\,d\xi_2 d\xi_1 d\varphi$$

$$V_{nkl}^s=\int_0^{2\pi}\sin k\varphi\int_0^1\xi_1 J_k(\nu_n{}^k\xi_1)\int_0^1 V\sin\lambda_l(1-\xi_2)\,d\xi_2 d\xi_1 d\varphi$$

Здесь $J_k(x)$ — функции Бесселя первого рода порядка k, а λ_l и $\nu_n{}^k$ корни соответственно уравнений

$$\operatorname{tg}\lambda_l=-(\gamma_1/\gamma_2)\lambda_l, \qquad J_k(\nu_n{}^k)=0$$

Уравнения, определяющие $V_{nkl}{}^c$ и $V_{nkl}{}^s$, получим, умножив (3.3) и начальное условие в (3.4) на собственные функции с их весами и интегрируя по всему объему цилиндра с учетом граничных условий в (3.4)

$$\frac{d}{dt}V_{nkl}^c+\left(\frac{\lambda_l^2}{R_1^2}+\frac{\nu_n{}^{k2}}{R_2^2}\right)V_{nkl}^c=-f_{nkl}^c-\frac{1}{R_1^2}J_k'(\nu_n{}^k)\psi_{kl}^{*c}+\frac{1}{R_2^2}\left(\frac{\sin\lambda_l}{\gamma_1}g_{kn}^{*c}-\lambda_l p_{kn}^{*c}\right)$$

$$V_{nkl}^c(0)=F_{nkl}^c \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}
\Phi_{nkl}^c=\int_0^{2\pi}\cos k\varphi\int_0^1\xi_1 J_k(\nu_n{}^k\xi_1)\int_0^1\Phi\sin\lambda_l(1-\xi_2)\,d\xi_2 d\xi_1 d\varphi\\
\psi_{kl}^{*c}=\int_0^{2\pi}\cos k\varphi\int_0^1\psi^*\sin\lambda_l(1-\xi_2)\,d\xi_2 d\varphi\\
\Omega_{kn}^c=\int_0^{2\pi}\cos k\varphi\int_0^1\Omega\xi_1 J_k(\nu_n{}^k\xi_1)\,d\xi_1 d\varphi
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Уравнение для $V_{nkl}{}^s$ получается заменой индекса C в (3.6) и (3.7) на s и функции $\cos k\varphi$ на $\sin k\varphi$ в правых частях (3.7).

Интегрирование уравнений (3.6) и аналогичных уравнений для $V_{nkl}{}^s$ легко выполняется в квадратурах, поскольку это линейные уравнения первого порядка. Подставляя находимые таким путем значения $V_{nkl}{}^c$ и $V_{nkl}{}^s$ в формулу (3.5), получаем полное решение задачи.

Поступила 22 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКО-УПРУГИХ ТЕЛ

А. Н. Гузь, В. Т. Головчан

(Киев)

Рассматриваются первая и вторая граничные задачи установившихся колебаний вязко-упругого тела, занимающего область в виде плоскости с бесконечным числом одинаковых круговых отверстий, которые образуют косоугольную решетку. Задачи сведены к бесконечным системам алгебраических уравнений с определителем нормального типа. При доказательстве единственности решения данных систем используются соображения физического характера.

Периодическим и двоякопериодическим задачам статической плоской теории упругости посвящена обширная литература. Весьма подробное изложение полученных результатов содержится в обзоре [1].

Поместим в центре каждого из отверстий начало 0_{qs} полярной системы координат r_{qs}, θ_{qs}, где r_{qs} — безразмерная координата, выраженная в долях радиуса отверстия R.

Введем следующие обозначения: Γ_{qs}— контур qs-го отверстия; $R_{qs}{}^{00}$, $\theta_{qs}{}^{00}$ — полярные координаты полюса 0_{00} в qs-й системе координат; $U(\theta_{qs})e^{-i\omega t}$, $V(\theta_{qs})e^{-i\omega t}$— заданные на Γ_{qs} компоненты смещения (вторая граничная задача); $P(\theta_{qs})e^{-i\omega t}$, $T(\theta_{qs})e^{-i\omega t}$ — нормальный и касательный компоненты внешних усилий, приложенных к контуру Γ_{qs} (первая граничная задача).

Как известно, двумерные задачи установившихся колебаний линейного вязкоупругого тела приводятся к решению двух уравнений

$$\Delta\Phi+\alpha^2\Phi=0, \qquad \Delta\Psi+\beta^2\Psi=0 \tag{1}$$

где α^2 и β^2 — некоторые комплексные числа с положительными мнимыми частями. Их выражения через механические параметры тела определяются принятым законом вязко-упругости.

Граничные условия на каждом из контуров Γ_{qs} могут быть представлены в форме

$$\begin{gathered}
a\alpha^2\Phi+\frac{1}{r_{qs}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r_{qs}}+\frac{1}{r_{qs}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_{qs}{}^2}+\frac{1}{r_{qs}}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_{qs}}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta_{qs}\partial r_{qs}}\right)\Bigg|_{r_{qs}=1}=F_1(\theta_{qs})\\
b\beta^2\Psi+\frac{1}{r_{qs}}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r_{qs}}+\frac{1}{r_{qs}}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta_{qs}{}^2}-\frac{1}{r_{qs}}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_{qs}}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_{qs}\partial r_{qs}}\right)\Bigg|_{r_{qs}=1}=F_2(\theta_{qs})
\end{gathered} \tag{2}$$