ЛИТЕРАТУРА

1. Комраз Л. А. Особенности динамики спускового регулятора с электромагнитным приводом. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
2. Фуфаев Н. А. Теория электромагнитного прерывателя. Сборник памяти А. А. Андронова. М., Изд-во АН СССР, 1955.
3. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Изв. вузов, Радиофизика, 1958, т. 1, № 2.
4. Комраз Л. А. О бифуркациях неподвижных точек точечного преобразования, при которых корень характеристического полинома переходит через значение $\lambda = -1$. ППМ, 1968, т. 32, вып. 3.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ЗЕМЛИ ПО ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА

В. Д. Андреев, О. Ф. Малахова

(Москва)

На основании решения задачи Стокса [1-4] находятся точные выражения для коэффициентов разложения по полиномам Лежандра потенциала регуляризированного поля тяготения Земли, когда за поверхность уровня поля тяжести принимается эллипсоид Клеро.

1. Решение задачи Стокса, когда за поверхность уровня поля тяжести Земли принимается эллипсоид Клеро [4], приводит к следующему выражению для потенциала V гравитационного поля Земли [1-3] в связанной с ней правой ортогональной системе координат $Oxyz$ (начало O этой системы совмещено с центром Земли, ось z направлена по оси вращения Земли):

$$V(x, y, z) = -AP(x^2+y^2) - BQz^2 + CR \tag{1.1}$$

Здесь

$$P = \operatorname{arc\,tg} \varepsilon' - \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'^2}, \qquad Q = \varepsilon' - \operatorname{arc\,tg} \varepsilon', \qquad R = \operatorname{arc\,tg} \varepsilon' \tag{1.2}$$

где ε' — второй эксцентриситет эллипсоида, софокусного эллипсоиду Клеро и проходящего через точку, в которой определяется потенциал, A, B и C — постоянные.

Величина ε' определяется равенством

$$\varepsilon' = [(a^2-b^2)/(b^2+\nu)]^{1/2} \tag{1.3}$$

где a и b — большая и малая полуоси эллипсоида Клеро, а ν — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\nu} + \frac{z^2}{b^2+\nu} = 1 \tag{1.4}$$

Постоянные A, B и C, входящие в формулу (1.1), определяются из соотношений

$$A = \frac{u^2(1+\varepsilon^2)}{2[(3+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - 3\varepsilon]}, \qquad B = 2A$$
$$C = \frac{a^2}{\varepsilon}\left\{\frac{g_e+u^2a}{a} + \frac{u^2(1+\varepsilon^2)(\varepsilon - \operatorname{arc\,tg}\varepsilon)}{(3+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - 3\varepsilon}\right\} \tag{1.5}$$

Здесь $\varepsilon = (a^2 - b^2)^{1/2} / b$ — второй эксцентриситет эллипсоида Клеро, u — угловая скорость вращения Земли, g_e — величина ускорения силы тяжести на экваторе.

Соотношения (1.1) — (1.5) дают неявное выражение для потенциала $V(x, y, z)$. Оно неудобно для практических вычислений и потому обычно [2-5] потенциал гравитационного поля представляют в виде разложения по полиномам Лежандра

$$V(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\sin\varphi) \tag{1.6}$$

где расстояние r от центра Земли и широта φ — геоцентрические координаты точки, для которой вычисляется значение потенциала, $P_n(\sin\varphi)$ — полиномы Лежандра n-го порядка, а A_n — постоянные коэффициенты разложения.

Обычно при определении коэффициентов A_n разложения (1.6) не используется точное решение (1.1) — (1.5) задачи Стокса. Их определяют [1,4] непосредственно исходя из того обстоятельства, что поверхность эллипсоида Клеро является поверхностью уровня поля тяжести. При этом получаются приближенные выражения для первых коэффициентов A_n в виде разложений в ряды по малым параметрам

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \left(\text{или } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \text{ и } q = \frac{u^2 a}{g_e} \tag{1.7}$$

Первые (и, пожалуй, вторые) члены разложений получаются сравнительно просто [3,4]. На этом пути оказывается возможным также построение рекуррентных соотношений для последовательного отыскания разложений коэффициентов A_n любого номера с любой степенью точности. Однако способ получения этих соотношений и сами соотношения получаются весьма громоздкими, так как задача, в конечном счете, сводится к решению бесконечной (треугольной) системы линейных алгебраических уравнений.

Определение первых коэффициентов A_n разложения потенциала (1.6) на основе точного решения задачи Стокса проведено в работе [6]. Но в этой работе они также определены в виде разложений по степеням малых параметров (1.7).

2. Перейдя в формуле (1.1) к сферическим (геоцентрическим) координатам r, φ, λ согласно соотношений $x = r\cos\varphi\cos\lambda$, $y = r\cos\varphi\sin\lambda$, $z = r\sin\varphi$, запишем ее в следующем виде:

$$V = -A\left(\frac{r}{a}\right)^2 (P\cos^2\varphi + 2Q\sin^2\varphi) + CR \tag{2.1}$$

Из (1.3) и (1.4), вводя обозначения

$$t = \frac{a}{r}, \qquad e = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \tag{2.2}$$

(e — первый эксцентриситет эллипсоида Клеро), получаем следующее уравнение для определения ε':

$$\varepsilon'^4 \sin^2\varphi - \varepsilon'^2 (e^2t^2 - 1) - e^2t^2 = 0 \tag{2.3}$$

откуда

$$\varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\varphi} \left[e^2t^2 - 1 + \sqrt{(e^2t^2-1)^2 + 4e^2t^2\sin^2\varphi}\right]^{1/2} \tag{2.4}$$

Из последнего равенства (1.2) и равенства (2.4) находим

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{e}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{(e^2t^2-1)^2 + 4e^2t^2\sin^2\varphi} - e^2t^2 + 1}{(e^2t^2-1)^2 + 4e^2t^2\sin^2\varphi}\right]^{1/2} \tag{2.5}$$

Переходя к комплексным числам, можно выражение (2.5) для $\partial R / \partial t$ представить в таком виде:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{e}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin\varphi\,(iet) + (iet)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin\varphi\,(-iet) + (-iet)^2}}\right], \quad i = \sqrt{-1} \tag{2.6}$$

Так как функция $(1-2x\tau+\tau^2)^{-1/2}$ — производящая функция полиномов Лежандра $P_n(x)$, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\tau+\tau^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\tau^n P_n(x) \tag{2.7}$$

то из (2.6) вытекает, что

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{e}{2}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\sin\varphi)\,[(iet)^n+(-1)^n(iet)^n]=e\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(et)^{2k}P_{2k}(\sin\varphi) \tag{2.8}$$

и, следовательно, $(t=a\,/\,r)$

$$R=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(e\frac{a}{r}\right)^{2k+1}P_{2k}(\sin\varphi)+C_1(\varphi) \tag{2.9}$$

где $C_1(\varphi)$ — некоторая функция широты φ.

Далее из равенств (1.2) и равенства (2.4) с учетом (2.2) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(P\cos^2\varphi+2Q\sin^2\varphi)=2e^2t^2\frac{\partial R}{\partial t} \tag{2.10}$$

Отсюда и из (2.8), переходя снова от t к $a\,/\,r$, находим

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2(P\cos^2\varphi+2Q\sin^2\varphi)=2e^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+3}\left(e\frac{a}{r}\right)^{2k+1}P_{2k}(\sin\varphi)+\left(\frac{r}{a}\right)^2C_2(\varphi) \tag{2.11}$$

где $C_2(\varphi)$ — также некоторая функция широты φ.

3. Подставляя выражения (2.9) и (2.11) в равенство (2.1), получаем следующее выражение для потенциала V:

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{2Ae^2}{2k+3}+\frac{C}{2k+1}\right](-1)^k\left(e\frac{a}{r}\right)^{2k+1}P_{2k}(\sin\varphi)+CC_1(\varphi)-A\left(\frac{r}{a}\right)^2C_2(\varphi) \tag{3.1}$$

Так как потенциал V удовлетворяет условию

$$\lim rV=\text{const},\quad r\to\infty \tag{3.2}$$

то в (3.1) $C_1(\varphi)\equiv 0$, $C_2(\varphi)\equiv 0$ и, следовательно, получается такое выражение для гравитационного потенциала Земли:

$$V(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{2Ae^2}{2k+3}+\frac{C}{2k+1}\right](-1)^k\left(e\frac{a}{r}\right)^{2k+1}P_{2k}(\sin\varphi) \tag{3.3}$$

Из соотношений (1.5) и последнего равенства (1.7) получаем следующие значения постоянных A и C:

$$A=\frac{g_e q a(1+\varepsilon^2)}{2[(3+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon-3\varepsilon]}$$
$$C=\frac{g_e a}{\varepsilon}\left\{1+q\left[1+\frac{(1+\varepsilon^2)(\varepsilon-\operatorname{arc\,tg}\varepsilon)}{(3+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon-3\varepsilon}\right]\right\} \tag{3.4}$$

Таким образом

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+1}P_{2k}(\sin\varphi) \tag{3.5}$$

где

$$A_{2k} = (-1)^k e^{2k+1}\left(-\frac{2Ae^2}{2k+3} + \frac{C}{2k+1}\right) \tag{3.6}$$

а постоянные A и C определены равенствами (3.4).

Подставив значения A и C в формулу (3.6) и учитывая второе равенство (2.2), находим окончательно

$$A_{2k} = \frac{g_e a\varepsilon^{2k}}{(1+\varepsilon^2)^{1/2(2k+1)}} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left\{1 + 2q\frac{(2k+1)(\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \varepsilon) + \varepsilon^3}{(2k+3)[(3+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - 3\varepsilon]}\right\} \tag{3.7}$$

Наряду с (3.5) можно записать выражение для потенциала еще в такой форме:

$$V = J_0\left[\frac{a}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+1} P_{2k}(\sin\varphi)\right] \tag{3.8}$$

Тогда

$$\begin{gathered}
J_0 = \frac{g_e a}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}}\left\{1 + \frac{2q}{3}\frac{3(\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - \varepsilon) + \varepsilon^3}{(3+\varepsilon^2)\operatorname{arc\,tg}\varepsilon - 3\varepsilon}\right\} \\
J_{2k} = \frac{(-1)^k\varepsilon^{2k}}{(2k+1)(1+\varepsilon^2)^k} \times \\
\times\left\{1 - \frac{4k\varepsilon^3 q}{(2k+3)[3(3+\varepsilon^2+2q)\operatorname{arctg}\varepsilon - 9\varepsilon - 6\varepsilon q + 2\varepsilon^3 q]}\right\}
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Легко убедиться, что из формул (3.9) разложением их по степеням ε^2 и q получаются такие приближенные выражения для коэффициентов J_{2k}:

$$\begin{gathered}
J_0 = g_e(1 - {}^1/_2\varepsilon^2 + {}^3/_2 q + {}^3/_8\varepsilon^4 - {}^{15}/_{28}\varepsilon^6 + {}^{943}/_{2352}\varepsilon^4 q \ldots) \\
J_2 = -{}^1/_3\varepsilon^2 + {}^1/_3 q + {}^1/_3\varepsilon^4 - {}^1/_{21}\varepsilon^3 q - {}^1/_2 q^2 - {}^1/_3\varepsilon^6 + {}^3/_4 q^3 + {}^8/_{147}\varepsilon^4 q \ldots \\
J_4 = \varepsilon^2({}^1/_5\varepsilon^2 - {}^2/_7 q - {}^2/_5\varepsilon^4 + {}^3/_7 q^2 + {}^{16}/_{49}\varepsilon^2 q \ldots) \\
J_6 = \varepsilon^4({}^5/_{21} q - {}^1/_7\varepsilon^2 \ldots)
\end{gathered} \tag{3.10}$$

Первые члены полученных разложений J_0, J_2, J_4 совпадают с приведенными в работах [4,6].

Если принять [1,4,7,8] $u = 7{,}29212 \cdot 10^{-5}$ 1/*сек*, и $g_e = 978{,}049$ *см/сек*^{2}, то численные значения этих коэффициентов для параметров эллипсоида Красовского ($a = 6738245$ *м*, $e^2 = 0{,}006693422$) получаются такими:

$J_0/a = 979{,}846$ *м*, $J_2 = -1082{,}24 \cdot 10^{-6}$, $J_4 = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$, $J_6 = -6{,}3 \cdot 10^{-9}$;

для параметров эллипсоида Кларка ($a = 6378206$ *м*, $e^2 = 0{,}00676817$) соответственно:

$J_0/a = 979{,}809$ *м*, $J_2 = -1107{,}19 \cdot 10^{-6}$, $J_4 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$, $J_6 = -6{,}3 \cdot 10^{-9}$.

Поступила 17 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов А. А. Курс гравиметрии и теории фигуры Земли. Редбюро ГУГК при СНК СССР, М., Гостехиздат, 1939.
2. Дубошин Н. Г. Теория притяжения. М., Физматгиз, 1961.
3. Идельсон Н. И. Теория потенциала и ее приложение к вопросам геофизики. Л.—М., Гостехиздат, 1932.
4. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. М., Физматгиз, 1963.
5. Демин В. Г. Движение искусственного спутника Земли в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.
6. Андреев В. Д. К решению проблемы Стокса для уровенной поверхности, заданной в форме сфероида. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
7. Граур А. В. Математическая картография. Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1956.
8. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М., Физматгиз, 1960.