

## ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО СПУСКОВОГО РЕГУЛЯТОРА С ДВУМЯ ИМПУЛЬСАМИ ЗА ПЕРИОД

Л. А. Комраз

(Горький)

Рассматривается динамика электромеханического спускового регулятора с электромагнитным приводом и двумя импульсами за период. Нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка исследуется методом точечных преобразований. Находится разбиение пространства параметров на области, точкам которых соответствуют различные качественные структуры фазового пространства. В пространстве параметров выделены области существования нескольких устойчивых периодических движений.

**1. Уравнения движения.** Для описания движения электромеханического спускового регулятора с электромагнитным приводом и двумя импульсами за период воспользуемся измененной моделью, описанной в [1]. В измененной модели контактное устройство будет замыкать электрическую цепь при движении осциллятора как слева направо, так и при обратном движении (имеются две зоны импульса, симметрично расположенные относительно положения статического равновесия).

Уравнения движения рассматриваемой динамической системы в безразмерных переменных будут

$$\begin{aligned} x'' + x &= (y^2 - r) \frac{x'}{|x'|} && \text{при } x' \geq 0, |x + b + d| < b \\ y' + ay &= a && \text{или } x' \leq 0, |x - b - d| < b \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} x'' + x &= -r \frac{x'}{|x'|} && \text{при } x' \geq 0, |x + b + d| > b \\ y &= 0 && \text{или } x' \leq 0, |x - b - d| > b \end{aligned} \quad (1.2)$$

Переход от (1.2) к (1.1) происходит при  $x = -2b - d$ ,  $x' > 0$  или  $x = 2b + d$ ,  $x' < 0$ , а от (1.1) к (1.2) при  $x = -d$ ,  $x' > 0$  или  $x = d$ ,  $x' < 0$ .

**2. Точечные преобразования.** Фазовое пространство  $x, y, z = x'$ , состоящее из части плоскости и подшитых к ней двух трехмерных областей, симметрично относительно оси  $y$ .

Назовем преобразованием  $S_1$  переход точки полупрямой  $\Gamma_1$  ( $x = -2b - d$ ,  $y = 0$ ,  $z > 0$ ) с координатой  $z = u$  по траекториям верхнего полупространства на плоскость  $x = -d$  в точку с координатой  $z = v$ . Преобразованием  $S_2$  назовем (согласно принятой идеализации срабатывания контактного устройства [2]) мгновенный скачок вдоль плоскости  $x = -d$  на полупрямую  $\Gamma_2$  ( $x = -d$ ,  $y = 0$ ,  $z > 0$ ) изображающей точки, попавшей на плоскость  $x = -d$ .

Назовем преобразованием  $S_3$  переход точки полупрямой  $\Gamma_2$  с координатой  $z = v_1$ , в точку полупрямой  $\bar{\Gamma}_1$  (симметричной  $\Gamma_1$  относительно оси  $y$ ). В силу указанной симметрии фазового пространства рассматриваемой задачи отождествим полупрямые  $\Gamma_1$  и  $\bar{\Gamma}_1$ .

Исследование разбиения фазового пространства на траектории сводится к исследованию точечного преобразования  $T = \overline{S_1 S_2 S_3}$  полупрямой  $\Gamma_1$  самой в себя (черта сверху означает переход после выполнения преобразования  $S_1 S_2 S_3$  в симметричную точку).

Для преобразования  $S_1$  имеем следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sin \tau} [2b \cos \tau + (r - d - 1)(1 - \cos \tau) + 2F(a, \tau) - F(2a, \tau)] \\ v &= \frac{1}{\sin \tau} [2b - (r - d - 1)(1 - \cos \tau) - 2\Phi(a, \tau) + \Phi(2a, \tau)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$F(a, \tau) = \frac{1}{1+a^2} (e^{-a\tau} - \cos \tau + a \sin \tau)$$

$$\Phi(a, \tau) = \frac{1 - e^{-a\tau} (\cos \tau + a \sin \tau)}{1+a^2}$$

а  $\tau$  — время перехода.

Поверхность  $\{\alpha_1\}$ , состоящая из плоскости

$$r = 2b + d \quad \text{при } b \leq b_0 \equiv 1 - \Phi(a, \pi) + \frac{1}{2} \Phi(2a, \pi)$$

поверхности

$$r = 1 + b + d - \Phi(a, \pi) + \frac{1}{2} \Phi(2a, \pi) \quad \text{при } b \geq b_0$$

выделяют в пространстве параметров  $a, b, d, r$  рассматриваемую область, для точек которой вся полупрямая  $\Gamma_1$  преобразуется на плоскость  $x = -d$  по траекториям верхнего полупространства (в выражениях (2.1) параметр  $\tau$  изменяется в пределах  $0 < \tau \leq \tau_0 \leq \pi$ ).

Для преобразования  $S_3$  имеем следующее аналитическое выражение

$$[v_1^2 + (r-d)^2]^{1/2} - [u^2 + (r-2b-d)^2]^{1/2} = 2r \quad (2.2)$$

Преобразование  $S_3$  осуществляется в рассматриваемой области при

$$v_1 \geq v_0 \equiv 2[(r+b)(d+b)]^{1/2}$$

Здесь  $v_0$  — координата точки на полупрямой  $\Gamma_2$ , через которую проходит траектория уравнения (1.2), касающаяся полупрямую  $\bar{\Gamma}_1$ .

**3. Особенности фазового пространства. Пространство параметров.** Поверхности  $\{\alpha_1\}$ ,  $\{\alpha_2\}$ ,  $\{\alpha_3\}$  и  $\{\alpha_4\}$  разбивают пространство параметров  $a, b, r$

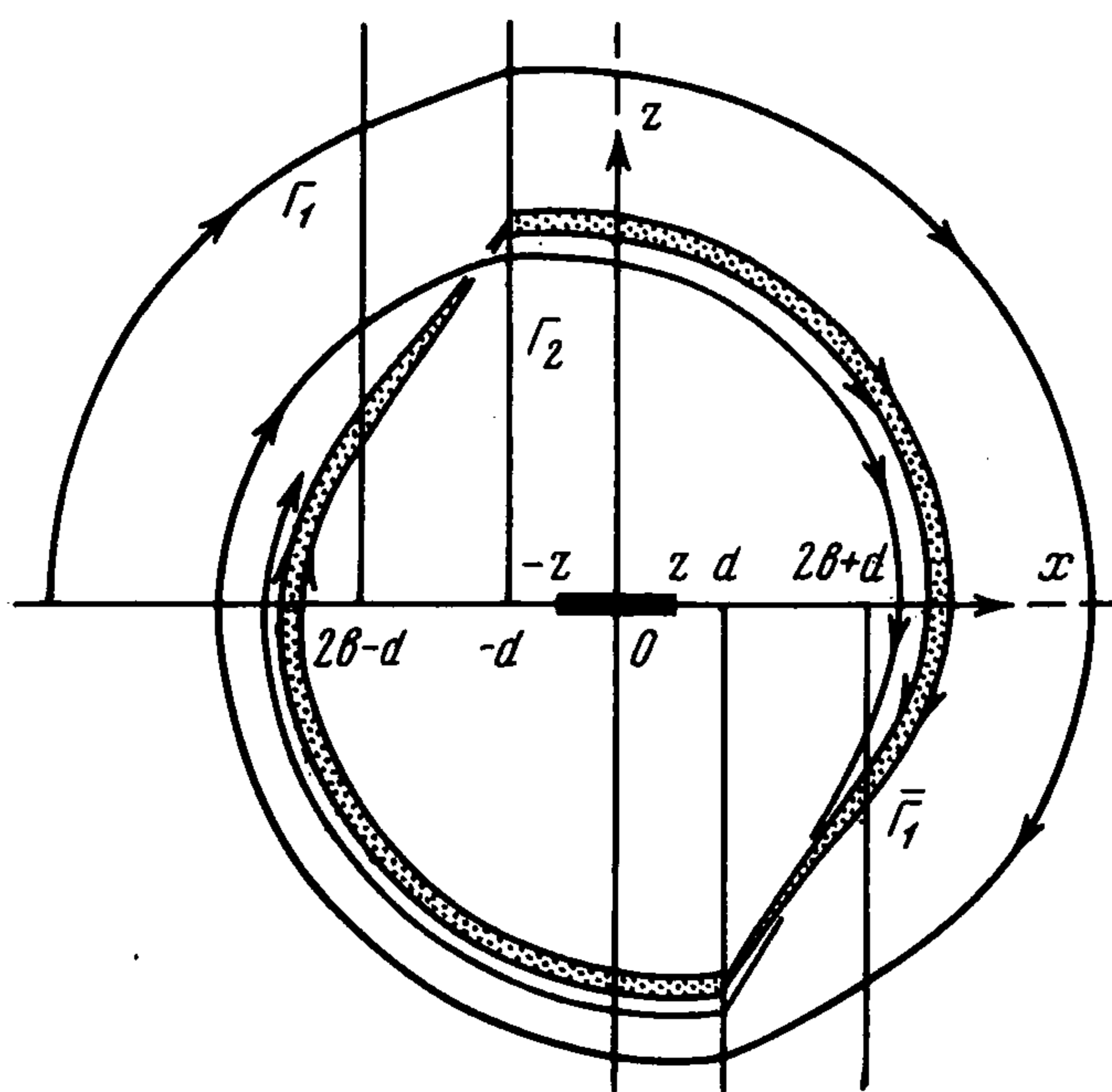
( $d = \text{const} > 0$ ) на области, точкам которых соответствуют различные качественные структуры разбиения фазового пространства на траектории.

При малых значениях параметра  $r$  точечное преобразование  $T$  имеет устойчивую неподвижную точку (в фазовом пространстве системы существует симметричный устойчивый предельный цикл). При увеличении параметра  $r$  и фиксированных значениях других параметров можно достигнуть таких значений  $r$ , при которых указанный предельный цикл и часть траекторий фазового пространства расположены на дважды перекрученной полосе (фиг. 1).

При дальнейшем увеличении параметра  $r$  можно достигнуть бифуркационной поверхности  $\{\alpha_2\}$ , определяемой условиями

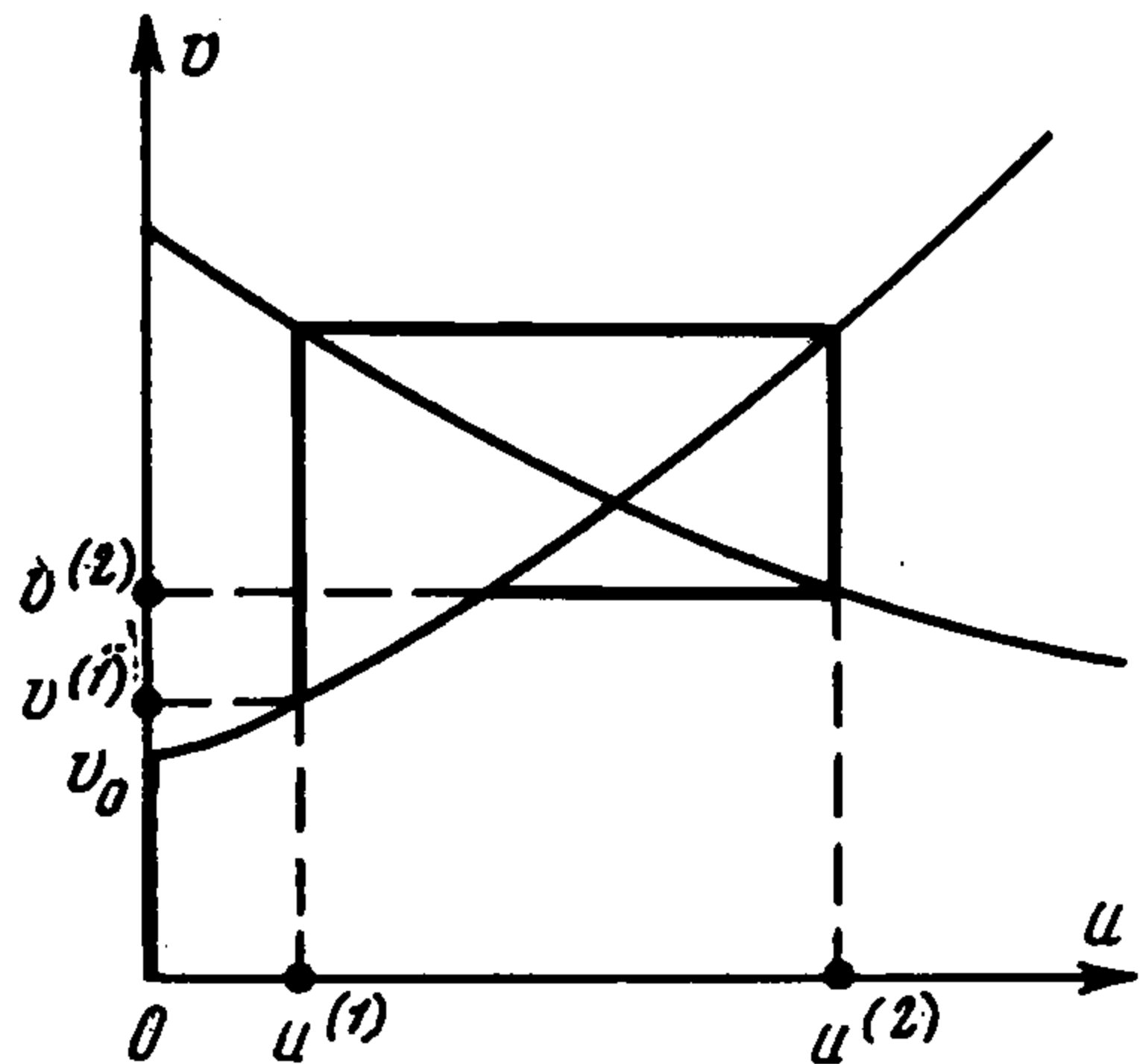
$$dv/dv_1 = -1, \quad v = v_1$$

При переходе в пространстве параметров через поверхность  $\{\alpha_2\}$  неподвижная точка преобразования  $T$  меняет устойчивость, при этом в зависимости от знака некоторой величины  $g_0 \neq 0$  из нее рождаются две устойчивые неподвижные точки преобразования  $T^2$  (при  $g_0 < 0$ ) или с ней сливаются [3] две неустойчивые неподвижные точки преобразования  $T^2$  (при  $g_0 > 0$ ). Двум неподвижным точкам преобразования  $T^2$  в фазовом пространстве рассматриваемой системы соответствуют два несимметричных, но симметрично расположенных предельных цикла.

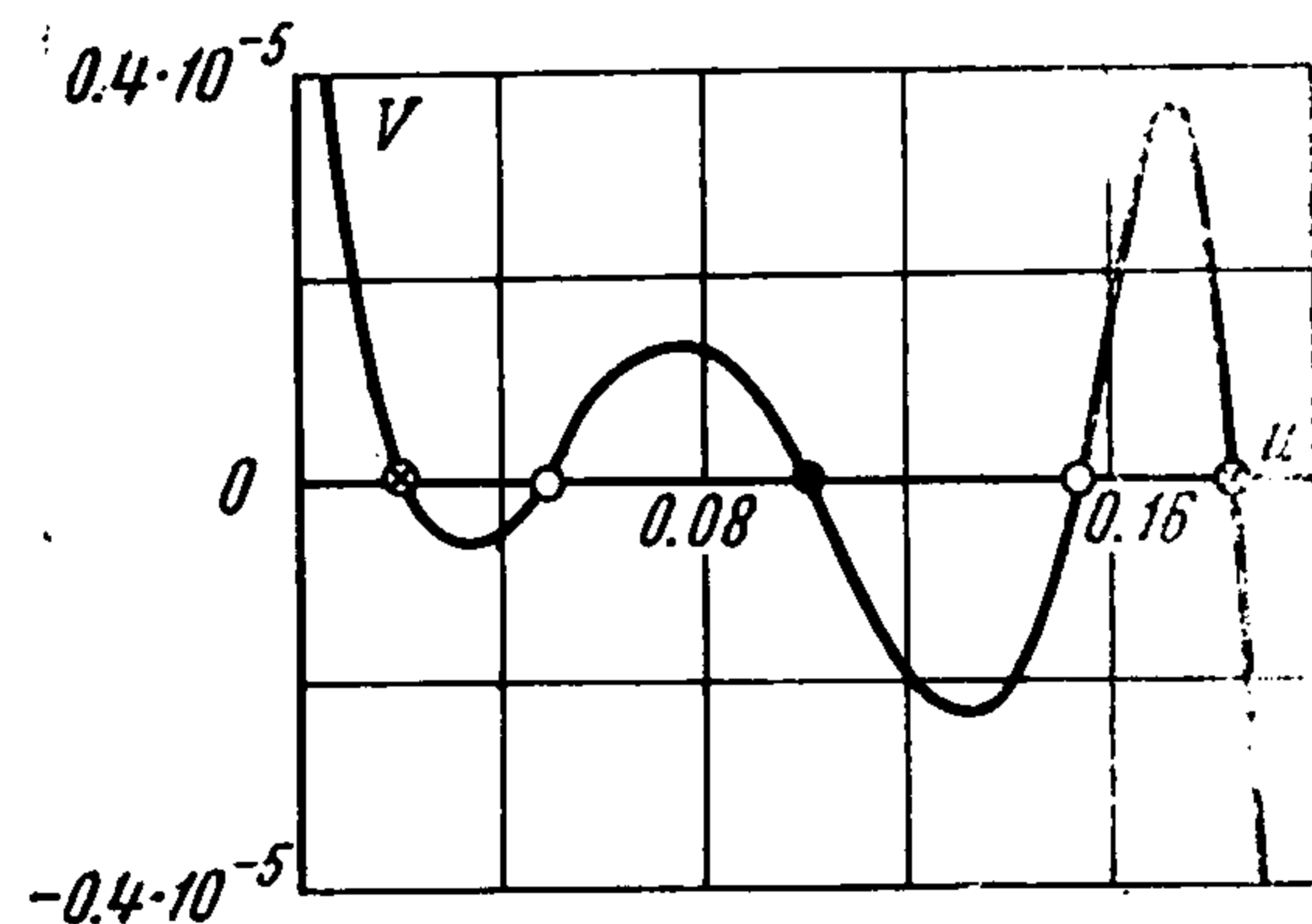


Фиг. 1

Поверхность  $\{\alpha_3\}$  определяется условием прохождения несимметричного предельного цикла через точку  $z = v_0$  полупрямой  $\Gamma_2$ . При переходе в пространстве параметров через поверхность  $\{\alpha_3\}$  в фазовом пространстве или появляются (рождаются из границы области притяжения отрезка покоя  $-r < x < r, y = 0, z = 0$ ) или исчезают (влипают в указанную границу) два несимметричных предельных цикла.



Фиг. 2

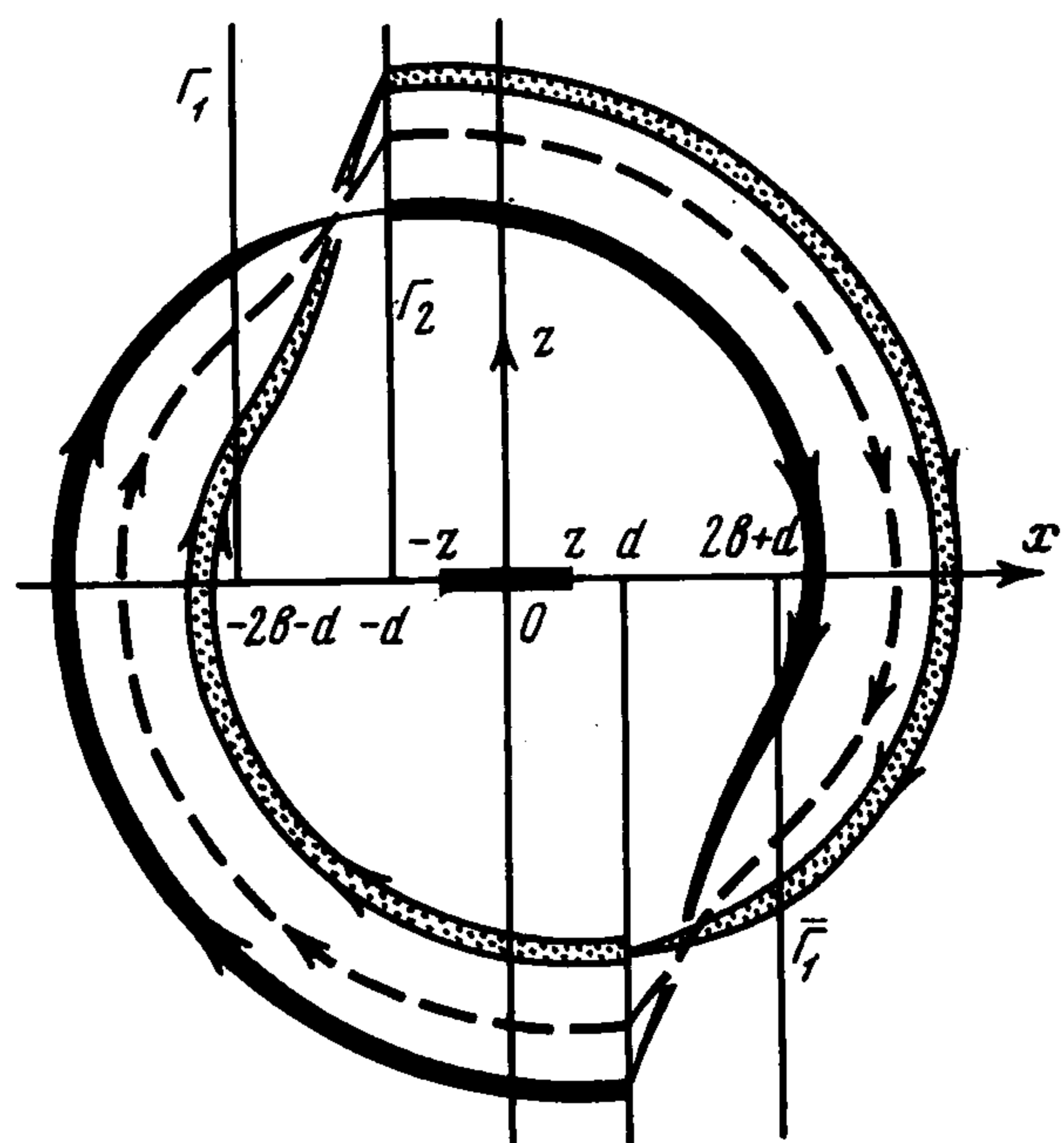


Фиг. 3

Поверхности  $\{\alpha_2\}$  и  $\{\alpha_3\}$  пересекаются. При этом, как показывают вычисления, вблизи их линии пересечения на поверхности  $\{\alpha_2\}$  существует кривая, в точках которой величина  $g_0$  обращается в нуль. В зависимости от знака величин [4] ( $g_0$  и  $h_0$  в окрестности неподвижной точки преобразования T могут существовать одна или две пары неподвижных точек преобразования  $T^2$  (два или четыре несимметричных предельных цикла в фазовом пространстве). Из кривой, расположенной на поверхности  $\{\alpha_2\}$  (определяемой условием  $g_0 = 0$ ), выходит бифуркационная поверхность  $\{\alpha_4\}$ , на которой две пары неподвижных точек преобразования сливаются и исчезают [4] (точкам поверхности  $\{\alpha_4\}$  соответствует фазовое пространство с двумя полустойчивыми несимметричными предельными циклами).

Диаграмма Ламерея, построенная в окрестности точки пересечения кривых  $v = v(u)$  (2.1) и  $v_1 = v_1(u)$  (2.2) (неподвижной точки преобразования T) для значений параметров, взятых из окрестности поверхности  $\{\alpha_2\}$  представлена на фиг. 2. Для исследования неподвижных точек преобразования  $T^2$  применяется идея «второй» диаграммы Ламерея [2]. Как известно, неподвижная точка преобразования  $T^2$  соответствует существованию прямоугольника на диаграмме Ламерея. Укажем способ вычисления функции, нули которой соответствуют существованию прямоугольников на диаграмме и, следовательно, — неподвижных точек преобразования  $T^2$ . Обозначим абсциссу начальной точки через  $u^{(1)}$  (ее ордината  $v^{(1)} = S^{-1}\bar{u}^{(1)}$ , а абсциссу конечной точки — через  $u^{(2)}$  (ее ордината  $v^{(2)} = \bar{S}_1\bar{S}_2\bar{S}_3 S_1S_2u^{(1)}$ ). Тогда функция  $V(u) = v^{(2)} - v^{(1)}$  будет искомой.

Поверхность  $\{\alpha_4\}$  определяется такими значениями параметров, при которых функция  $V(u)$  дважды касается оси абсцисс. Для значений параметров  $a = 2, d = 0.2$  эта поверхность приближенно просчитана на машине БЭСМ-3М. Приводим значения  $b$  и  $r$  координат точки A поверхности  $\{\alpha_2\}$ , определяемой условием  $g_0 = 0$ , точки B —

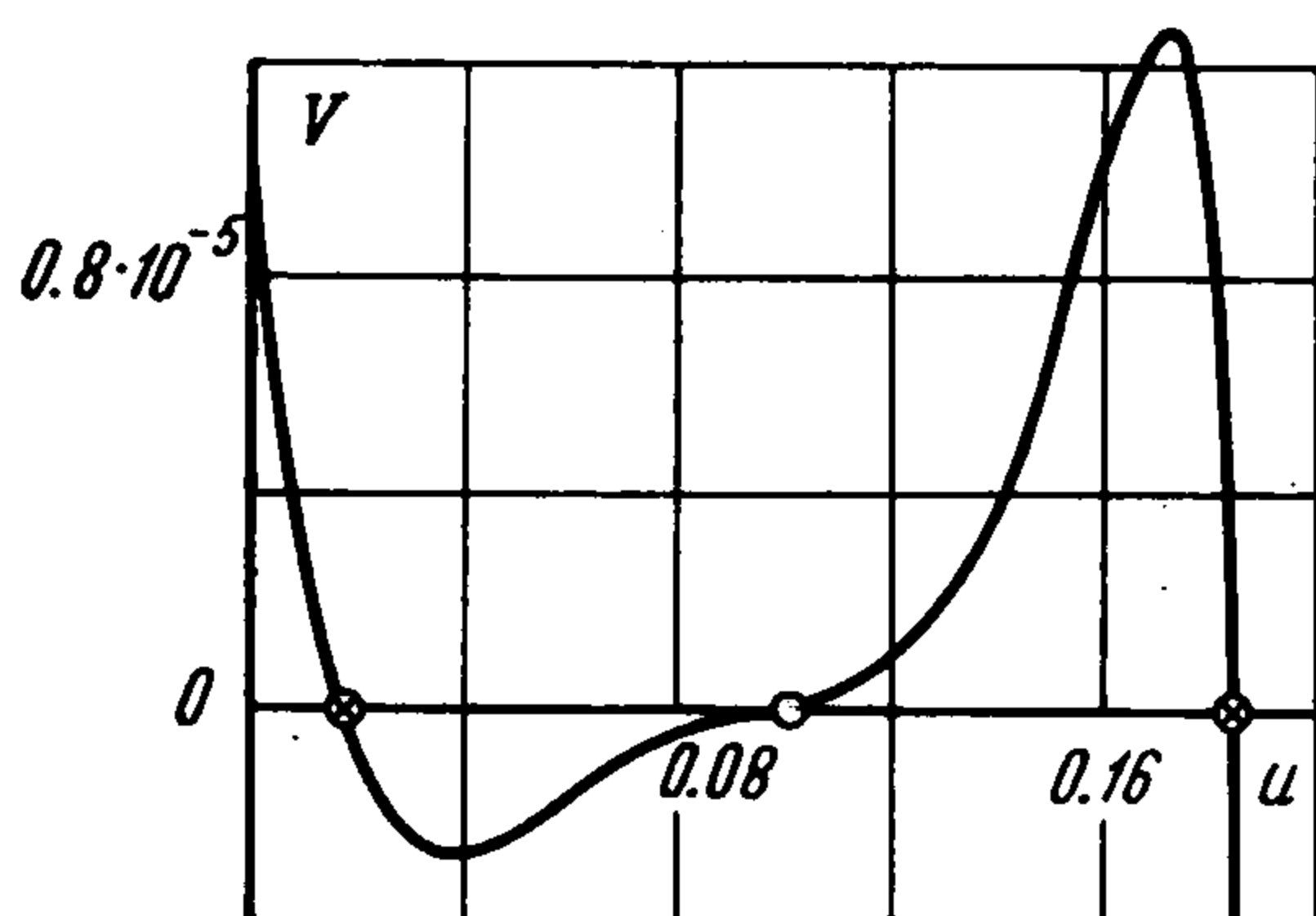


Фиг. 4

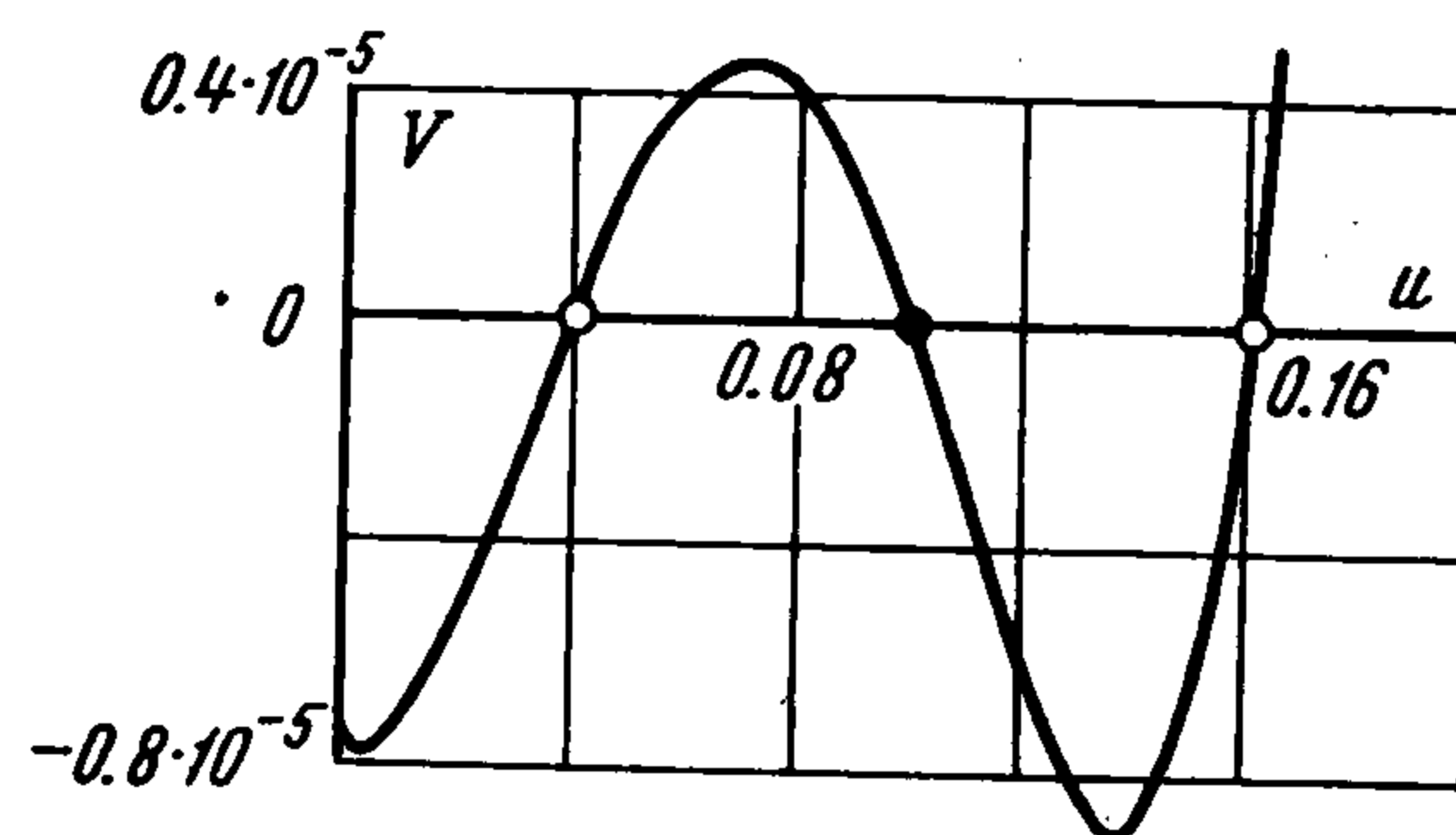
точки пересечения поверхностей  $\{\alpha_2\}$  и  $\{\alpha_3\}$ ; точки  $C$  — точки пересечения поверхностей  $\{\alpha_3\}$  и  $\{\alpha_4\}$

точки	$A$	$B$	$C$
$b =$	0.12002	0.12065	0.121225
$r =$	0.10609	0.10656	0.10698

Поверхности  $\{\alpha_2\}$ ,  $\{\alpha_3\}$  и  $\{\alpha_4\}$  выделяют в пространстве параметров область, которой соответствует фазовое пространство с пятью предельными циклами: устойчивым симметричным, двумя устойчивыми несимметричными и двумя неустойчивыми несимметричными. В окрестности точки  $A$  осуществляется бифуркация [4], соответствующая



Фиг. 5



Фиг. 6

случаю  $h_0 < 0$ . На фиг. 3 представлен график функции  $V(u)$ , построенный при значениях параметров  $b = 0.12060$ ,  $r = 0.10652$ , взятых из указанной области. Нули функции, изображенные на графике светлыми точками, соответствуют двум неустойчивым несимметричным предельным циклам; нули функции, изображенные на графике кружочком с крестиком, соответствуют двум устойчивым несимметричным предельным циклам; нуль функции, изображенный на графике темной точкой, соответствует устойчивому симметричному предельному циклу.

Для области, расположенной между поверхностями  $\{\alpha_2\}$  и  $\{\alpha_3\}$  слева от точки  $B$ , в фазовом пространстве существуют симметричный неустойчивый и два несимметричных устойчивых предельных цикла (фиг. 4). На фиг. 5 представлен соответствующий график функции  $V(u)$ , построенный при значениях параметров  $b = 0.12040$ ,  $r = 0.106375$ , взятых из указанной области.

Для области, расположенной между поверхностями  $\{\alpha_2\}$  и  $\{\alpha_3\}$  справа от точки  $B$ , в фазовом пространстве существует симметричный устойчивый и два несимметричных неустойчивых предельных цикла. На фиг. 6 представлен график функции  $V(u)$ , построенный при значениях параметров  $b = 0.12120$ ,  $r = 0.10696$ , взятых из указанной области.

Для области, расположенной выше поверхностей  $\{\alpha_2\}$  и  $\{\alpha_3\}$  вблизи этих поверхностей в фазовом пространстве, существует симметричный неустойчивый предельный цикл, который исчезает при дальнейшем увеличении параметра  $r$ . Неустойчивый предельный цикл расположен на дважды перекрученной полосе и не разделяет фазовое пространство на части, из которых изображающие точки идут к различным элементам притяжения

$b = 0.05$	0.10	0.15	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
$r_2 = 0.0442$	0.0903	0.0127	0.1551	0.1949	0.2212	0.2398	0.2536
$r_3 = 0.0459$	0.0909	0.0126	0.1536	0.1929	0.2192	0.2380	0.2520

Приводим значения  $b$ ,  $r_2$  и  $r_3$ , соответствующие сечениям поверхностей  $\{\alpha_2\}$  и  $\{\alpha_3\}$  плоскостями  $a = 2$  и  $d = 0.2$ .

В заключение автор благодарит Н. Н. Баутина за многочисленные советы и обсуждения.

Поступила 26 XI 1968

## ЛИТЕРАТУРА

1. Комраз Л. А. Особенности динамики спускового регулятора с электромагнитным приводом. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
2. Фуфаев Н. А. Теория электромагнитного прерывателя. Сборник памяти А. А. Андропова. М., Изд-во АН СССР, 1955.
3. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Изв. вузов, Радиофизика, 1958, т. 1, № 2.
4. Комраз Л. А. О бифуркациях неподвижных точек точечного преобразования, при которых корень характеристического полинома переходит через значение  $\lambda = -1$ . ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.

### К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ЗЕМЛИ ПО ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА

В. Д. Андреев, О. Ф. Малахова

(Москва)

На основании решения задачи Стокса [1-4] находятся точные выражения для коэффициентов разложения по полиномам Лежандра потенциала регуляризованного поля тяготения Земли, когда за поверхность уровня поля тяжести принимается эллипсоид Клеро.

1. Решение задачи Стокса, когда за поверхность уровня поля тяжести Земли принимается эллипсоид Клеро [4], приводит к следующему выражению для потенциала  $V$  гравитационного поля Земли [1-3] в связанной с ней правой ортогональной системе координат  $Oxyz$  (начало  $O$  этой системы совмещено с центром Земли, ось  $z$  направлена по оси вращения Земли):

$$V(x, y, z) = -AP(x^2 + y^2) - BQz^2 + CR \quad (1.1)$$

Здесь

$$P = \arctg \varepsilon' - \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'^2}, \quad Q = \varepsilon' - \arctg \varepsilon', \quad R = \arctg \varepsilon' \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon'$  — второй эксцентриситет эллипсоида, софокусного эллипсоиду Клеро и проходящего через точку, в которой определяется потенциал,  $A$ ,  $B$  и  $C$  — постоянные.

Величина  $\varepsilon'$  определяется равенством

$$\varepsilon' = [(a^2 - b^2) / (b^2 + v)]^{1/2} \quad (1.3)$$

где  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси эллипсоида Клеро, а  $v$  — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + v} + \frac{z^2}{b^2 + v} = 1 \quad (1.4)$$

Постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$ , входящие в формулу (1.1), определяются из соотношений

$$A = \frac{u^2(1 + \varepsilon^2)}{2[(3 + \varepsilon^2) \arctg \varepsilon - 3\varepsilon]}, \quad B = 2A \quad (1.5)$$

$$C = \frac{a^2}{\varepsilon} \left\{ \frac{g_0 + u^2 a}{a} + \frac{u^2(1 + \varepsilon^2)(\varepsilon - \arctg \varepsilon)}{(3 + \varepsilon^2) \arctg \varepsilon - 3\varepsilon} \right\}$$