О МНОЖЕСТВЕ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

С. Я. Степанов (Москва)

В первых четырех пунктах принята ограниченная постановка задачи, т. е. предполагается, что центр масс спутника движется как материальная точка по кеплеровской круговой орбите. При предположении, что гиростатический момент может принимать произвольные постоянные значения, множество положений относительного равновесия спутника-гиростата в орбитальной системе координат представлено в наглядной геометрической форме. Выделены области устойчивости и неустойчивости.

Полученные в пп. 1—4 результаты оцениваются с точки зрения неограниченной постановки задачи (п. 5).

1. Свяжем со спутником систему координат $Gx_1x_2x_3$, оси которой направим по его главным центральным осям инерции.

Предположим, что спутник состоит из твердого корпуса и симметричных роторов, вращающихся с постоянными относительными угловыми скоростями, тогда проекции на оси x_i момента количеств относительных движений роторов (гиростатического момента) будут постоянными

$$k_i = \text{const} \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.1}$$

В этом случае измененная потенциальная энергия действующих на спутник гравитационных сил и сил инерции в орбитальной системе координат имеет вид ([1], стр. 102)

$$W = {}^3/_2\omega^2(A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2) - {}^1/_2\omega^2 (A_1\beta_1^2 + A_2\beta_2^2 + A_3\beta_3^2) - $$
$$- \omega(k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3)$$

Здесь ω — кеплеровская орбитальная угловая скорость; A_i — моменты инерции спутника с роторами относительно осей x_i; γ_i, β_i — проекции на те же оси ортов $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\beta}$ соответственно радиуса-вектора центра масс спутника G и нормали к плоскости орбиты, причем

$$\psi = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{1.2}$$
$$\chi = \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0, \qquad \varphi = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \tag{1.3}$$

Согласно теореме Лагранжа [2] относительные равновесия спутника соответствуют стационарным точкам γ_{i0}, β_{i0} функции $W(\gamma_i, \beta_i)$ при условиях (1.2), (1.3). Таким образом, уравнения равновесия, наряду с (1.2), (1.3), можно записать с множителями Лагранжа λ, μ, ν в виде

$$\partial V / \partial\gamma_i = (\mu + 3A_i\omega)\gamma_i + \lambda\beta_i = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.4}$$
$$\partial V / \partial\beta_i = \lambda\gamma_i + (\nu - A_i\omega)\beta_i - k_i = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.5}$$
$$V = W / \omega + \lambda\chi + {}^1/_2\mu\psi + {}^1/_2\nu\varphi$$

Зафиксируем $\nu = \nu_0$ и $\gamma_i = \gamma_{i0}$ $(i = 1,2,3)$, стесненные соотношением (1.2), и разрешим систему (1.3) — (1.5) относительно μ, λ, β_i, k_i.

Умножая уравнения (1.4) на γ_i и на $\lambda\beta_i - 3A_i\omega\gamma_i$ и суммируя по $i = 1,2,3$ с учетом (1.2), (1.3), соответственно, получим

$$\mu = \mu_0 = -3\omega \sum_{i=1}^{3} A_i\gamma_{i0}^2, \qquad \lambda = \lambda_0 = \pm 3\omega \left[\sum_{i=1}^{3} A_i^2\gamma_{i0}^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} A_i\gamma_{i0}^2\right)^2\right]^{1/2} \tag{1.6}$$

С учетом (1.6) при $\lambda_0 \neq 0$ из (1.4) и (1.5) получим

$$\beta_i = \beta_{i0} = \frac{3\omega}{\lambda_0}\left(\sum_{j=1}^{3} A_j\gamma_{j0}^2 - A_i\right)\gamma_{i0} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.7}$$

$$k_i = k_{i0} = \lambda_0\gamma_{i0} + (\nu_0 - A_i\omega)\beta_{i0} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.8}$$

При этом значения (1.7) удовлетворяют уравнениям (1.3).

Если $\lambda_0 = 0$, то уравнения (1.4) удовлетворяются независимо от β_i, в чем нетрудно убедиться, рассматривая сумму квадратов левых частей уравнений (1.4) с учетом (1.6). Тогда в качестве β_{i0} можно взять любые значения, удовлетворяющие уравнениям (1.3), а величины k_{i0} определятся из (1.5)

$$k_i = k_{i0} = (\nu_0 - A_i\omega)\beta_{i0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Как видно из (1.6) — (1.8), величины β_{i0} не зависят от величины ν_0, которая влияет лишь на выбор гиростатических моментов k_{i0} и на устойчивость равновесий. Величина ν_0 имеет смысл момента количеств движений спутника относительно нормали к плоскости орбиты, в чем легко убедиться, умножая уравнения (1.5) на β_i и складывая.

Выражение, стоящее в квадратных скобках в (1.6), легко привести к виду

$$\sum_{(123)} (A_2 - A_3)^2 \gamma_{20}^2 \gamma_{30}^2$$

из которого следует, что оно неотрицательно при любых значениях γ_{i0}, удовлетворяющих (1.2), и уничтожается лишь в случае, когда в положении равновесия по γ направлена одна из главных центральных осей инерции спутника. Следовательно, система (1.3) — (1.5) разрешима относительно μ, λ, β_i, k_i при любых значениях ν_0 и γ_{i0}, связанных соотношением (1.2).

Таким образом, в положении равновесия спутник-гиростат может быть направлен на Землю произвольно выбранным в нем направлением. Причем, если $\lambda_0 \neq 0$, т. е. γ не совпадает с главной центральной осью инерции спутника, то каждому такому направлению, или, что одно и то же, каждой точке единичной сферы (1.2), отвечают два динамически эквивалентных положения равновесия, соответствующих различным знакам λ_0 и отличающихся поворотом на 180° вокруг γ; k_{i0} отличаются знаками. Если $\lambda_0 = 0$, т. е. по γ направлена главная центральная ось инерции спутника, то возможно любое (относительно поворота вокруг γ) положение равновесия.

Сравним с указанным множеством два однопараметрических семейства положений относительных равновесий спутника-гиростата, рассмотренных в работе [1]

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \beta_1 = \sin\theta, \quad \beta_2 = \cos\theta, \quad \beta_3 = 0 \qquad (1.9)$$

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = -\sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \cos\theta, \quad \beta_3 = \sin\theta \qquad (1.10)$$

Учитывая, наряду с произвольным параметром θ, равным углу между осью x и нормалью к плоскости орбиты, имеющийся произвол в выборе системы осей $Gx_1x_2x_3$, отметим следующие три предложения.

Семейства положений относительных равновесий (1.9) и (1.10) отвечают в указанной интерпретации точкам больших кругов $\gamma_{i0} = 0$ на единичной сфере (1.2).

Если эллипсоид инерции спутника-гиростата симметричен, то семейства (1.9) и (1.10) исчерпывают все множество положений относительных равновесий спутника-гиростата.

Семейство (1.9) исчерпывает все возможные положения равновесия, в которых по γ направлены главные центральные оси инерции спутника, т. е. случай, когда $\lambda_0 = 0$.

Учитывая, что последний случай подробно исследован в работе [1], далее всюду будем предполагать $\lambda_0 \neq 0$.

2. Рассмотренные стационарные движения спутника-гиростата на основании теорем Лагранжа и Кельвина [2] будут устойчивы, если значения γ_{i0}, β_{i0} обращают функцию W при условиях (1.2), (1.3) в минимум.

Рассмотрим три матрицы

$$A^{(i)} = \| a_{pq}^{(i)} \| \qquad (a_{pq}^{(i)} = a_{qp}^{(i)}; \ p, q = 1, \ldots, 9; \ i = 1, 2, 3)$$

состоящие из вторых частных производных функции V и отличающиеся циклической перестановкой индексов (123) в последовательности переменных λ, μ, ν, γ_1, γ_2, γ_3, β_1,

β_2, β_3, по которым производится дифференцирование. При обозначениях

$$J = A_1\gamma_{10}^2 + A_2\gamma_{20}^2 + A_3\gamma_{30}^2 \tag{2.1}$$

$$a_i = \nu_0 - A_i\omega, \qquad b_i = 3A_i\omega + \mu_0 = 3\omega(A_i - J) \quad (i = 1,2,3)$$

ненулевые несимметричные элементы $a_{pq}^{(i)}$ с номерами $p \leqslant q$ имеют вид (циклическая перестановка (123) не распространяется на нижние индексы в $a_{pq}^{(i)}$)

$$\begin{gathered} a_{17}^{(1)} = a_{24}^{(1)} = \gamma_{10}, \quad a_{18}^{(1)} = a_{25}^{(1)} = \gamma_{20}, \quad a_{19}^{(1)} = a_{26}^{(1)} = \gamma_{30} \\ a_{14}^{(1)} = a_{37}^{(1)} = \beta_{10}, \quad a_{15}^{(1)} = a_{38}^{(1)} = \beta_{20}, \quad a_{16}^{(1)} = a_{39}^{(1)} = \beta_{30} \\ a_{44}^{(1)} = b_1, \quad a_{55}^{(1)} = b_2, \quad a_{66}^{(1)} = b_3, \quad a_{47}^{(1)} = a_{58}^{(1)} = a_{69}^{(1)} = \lambda_0 \\ a_{77}^{(1)} = a_1, \quad a_{88}^{(1)} = a_2, \quad a_{99}^{(1)} = a_3 \qquad (123) \end{gathered} \tag{2.2}$$

В силу (1.3) величины β_{10}, β_{20}, β_{30} не могут обращаться в нуль одновременно. Пусть $\beta_{i0} \neq 0$ (i фиксировано) в данном положении относительного равновесия. Тогда [1] достаточные условия устойчивости этого равновесия можно записать в виде [3]

$$\Delta_7^{(i)} = \beta_{i0}^2 a > 0, \qquad \Delta_8^{(i)} > 0, \qquad \Delta_9^{(i)} = \Delta = a\nu_0^2 + b\nu_0 + c > 0 \tag{2.3}$$

Здесь $\Delta_j^{(i)}$ обозначают главные диагональные миноры j-го порядка с обратным знаком матрицы $A^{(i)}$.

Условия (2.3) будут самыми широкими условиями устойчивости, которые могут быть получены из условной знакоопределенности квадратичной формы, соответствующей второй вариации.

Кельвин ввел понятия вековой устойчивости и временной устойчивости [2]. В этом смысле условия (2.3) гарантируют вековую устойчивость. При нарушении условий (2.3), с заменой знака хотя бы одного из неравенств на противоположный, равновесие будет в вековом смысле неустойчивым.

Раскладывая определитель Δ по первым трем строкам и столбцам, с учетом (1.2), (1.3), (1.7), (2.1) и (2.2) получим

$$\Delta = \sum_{j=1}^{3} b_j\alpha_{j0}^2 \sum_{(123)} \beta_{10}^2 a_2 a_3 + \sum_{j=1}^{3} a_j\alpha_{j0}^2 \sum_{(123)} \gamma_{10}^2 b_2 b_3 - \lambda_0^2\left(\sum_{j=1}^{3} a_j\gamma_{j0}^2 + \sum_{j=1}^{3} b_j\beta_{j0}^2\right) \tag{2.4}$$

$$\alpha_{10} = \beta_{20}\gamma_{30} - \beta_{30}\gamma_{20} = -3\omega\lambda_0^{-1}(A_2 - A_3)\gamma_{20}\gamma_{30} \qquad (123)$$

Отсюда с учетом выражений (2.1) для a_i получим

$$a = \sum_{i=1}^{3} b_i\alpha_{i0}^2, \qquad b = -\omega a \sum_{(123)} \beta_{10}^2(A_2 + A_3) + \sum_{(123)} \gamma_{10}^2 b_2 b_3 - \lambda_0^2$$

$$c = \omega^2 a \sum_{(123)} \beta_{10}^2 A_2 A_3 - \omega \sum_{i=1}^{3} A_i\alpha_{i0}^2 \sum_{(123)} \gamma_{10}^2 b_2 b_3 + \omega\left(4J - 3\sum_{i=1}^{3} A_i\beta_{i0}^2\right)\lambda_0^2 \tag{2.5}$$

На основании (1.6), (1.7), (2.1), (2.4) величины a, b и c представляют собой рациональные функции от ω, A_i, γ_{i0}.

Если β_{10}, β_{20}, $\beta_{30} \neq 0$ одновременно для некоторого положения равновесия, то, как следует из [3], условия (2.3) при $i = 1,2,3$ будут эквивалентны между собой, т. е.

[1] При доказательстве условий [3] условного минимума функции W требуется, чтобы в матрице Якоби, соответствующей k уравнениям связей (1.2), (1.3) был отличен от нуля определитель, составленный из первых k столбцов. Однако, если вместо этого предположить, что матрица, составленная из первых $k + 1$ ее столбцов имеет ранг k, то формулировка теоремы сохранит силу. Это следует из того, что фигурирующие в формулировке главные диагональные миноры $\Delta_j^{(i)}$, начинающиеся с $2k + 1$-го порядка, не изменяются от одинаковой перестановки в матрице $A^{(i)}$ первых $2k + 1$ строк и столбцов.

если условия (2.3) выполнены при одном каком-либо значениия i, то они будут выполнены при любом $i = 1,2,3$. Они также будут эквивалентны симметричным по форме условиям

$$a > 0, \qquad \Delta_8^{(1)} + \Delta_8^{(2)} + \Delta_8^{(3)} = d\Delta / d\nu_0 > 0, \qquad \Delta > 0 \tag{2.6}$$

Действительно, выполнение условий (2.6) при выполнении условий (2.3) (при $i = 1,2,3$) очевидно. Обратно, при выполнении условий (2.6), должно быть выполнено хотя бы одно из неравенств $\Delta_8^{(i)} > 0$ ($i = 1,2,3$), пусть $\Delta_8^{(1)} > 0$, тогда, очевидно условия (2.3) будут выполнены при $i = 1$, а тогда в силу их эквивалентности и при $i = 2,3$.

Покажем, что условия (2.6) применимы при произвольных значениях β_{i0}, т. е. и тогда, когда некоторые из β_{i0} обращаются в нуль. Пусть, например, $\beta_{10} \neq 0$, и при $i = 1$ условия (2.3) выполнены. Тогда, как следует из [3], будут выполнены неравенства $\Delta_8^{(i)} \geqslant 0$ ($i = 2,3$), и условия (2.6) будут выполнены.

Обратно, пусть условия (2.6) выполнены для положения равновесия, для которого некоторые из β_{i0} равны нулю. При сделанных предположениях всегда можно достат чно мало и непрерывно изменить параметры спутника (k_{i0} или γ_{i0}) так, чтобы для соответствующего измененного положения равновесия величины β_{i0} все будут отличны от нуля и условия (2.6) сохранятся по непрерывности. Тогда измененное положение равновесия будет устойчиво (в вековом смысле), и согласно теории Пуанкаре бифуркации равновесий [2] будет устойчиво и исходное положение равновесия ($\Delta \neq 0$).

Окончательно перепишем условия (2.6) устойчивости относительных равновесий спутника-гиростата в виде

$$a > 0, \qquad \nu_0 > \nu_2 \qquad (2a\nu_2 = b + \sqrt{b^2 - 4ac}) \tag{2.7}$$

Здесь ν_2 — наибольший из корней $\nu_{1,2}$ уравнения $\Delta = 0$. Дискриминант этого уравнения $b^2 - 4ac$ неотрицателен. В противном случае при $a \neq 0$ и любом ν_0 было бы $\Delta \neq 0$, и его знак совпадал со знаком a. Тогда в силу второго условия из (2.6), степень неустойчивости была бы различной при $\nu_0 = \pm M$ (при $a > 0$ — 0 и 2, при $a < 0$ — 1 и 3; M — достаточно большое положительное число), что противоречит теории бифуркации [2].

В частности, например, при $\gamma_{10} = \beta_{10} = 0$ определитель Δ распадается на рациональные множители

$$\begin{gathered} 3\omega (A_1 - A_2\gamma_{20}^2 - A_3\gamma_{30}^2)(\nu_0 - A_1\omega) - 9\omega^2 (A_2 - A_3)^2\gamma_{20}^2\gamma_{30}^2 \\ \nu_0 - \omega (A_2\gamma_{20}^2 + A_3\gamma_{30}^2) - 3\omega (A_2 - A_3) (\gamma_{20}^2 - \gamma_{30}^2) \end{gathered} \tag{2.8}$$

Условия (2.7) в этом случае эквивалентны полученным В. В. Румянцевым ([1], стр. 108) и имеют вид

$$A_1 - A_2\gamma_{20}^2 - A_3\gamma_{30}^2 > 0, \qquad \nu_0 > \nu_1, \qquad \nu_0 > \nu_2$$

где ν_1 и ν_2 — корни линейных относительно ν_0 выражений (2.8).

3. Без ограничения общности можно считать, что $A_1 \geqslant A_2 \geqslant A_3$.

Выражение (2.5) для a может быть разложено на множители

$$a = 27\omega^3\lambda_0^{-2} (J - A_1)(J - A_2)(J - A_3)$$

Знак величины a определяется знаком множителя $A_2 - J$. Уравнение $A_2 - J = 0$ определяет на сфере (1.2) два больших круга

$$\sqrt{A_2 - A_3}\,\gamma_3 \pm \sqrt{A_1 - A_2}\,\gamma_1 = 0 \tag{3.1}$$

Большие круги (3.1) разбивают сферу (1.2) на четыре области. В областях, содержащих точки $\gamma_3 = \pm 1$, величина a положительна, в областях, содержащих точки $\gamma_1 = \pm 1$ отрицательна, за исключением самих этих точек $\gamma_3 = \pm 1$ и $\gamma_1 = \pm 1$, где $a = 0$. При $A_1 = A_2$ указанные круги, сливаясь, совпадают с большим кругом

$\gamma_3 = 0$ и на всей сфере (1.2), кроме этого круга и точек $\gamma_3 = \pm 1$, a положительно. При $A_2 = A_3$ они, сливаясь, совпадают с большим кругом $\gamma_1 = 0$, и на всей сфере, кроме этого круга и точек $\gamma_1 = \pm 1$, a отрицательно.

Согласно условиям устойчивости (2.7) в областях, где $a > 0$, положения относительного равновесия будут устойчивыми, если $\nu_0 > \nu_2$, и неустойчивыми в вековом смысле, если $\nu_0 < \nu_2$. В областях, где $a < 0$, равновесия неустойчивы в вековом смысле при любых ν_0.

Кроме того, возможна временная устойчивость спутника, когда степень неустойчивости четна, что будет если $\Delta > 0$ [2]. Последнее имеет место в областях, где $a < 0$, при $\nu_1 < \nu_0 < \nu_2$ и в областях, где $a > 0$, при $\nu_0 < \nu_1$.

Если степень неустойчивости нечетна, что будет, если $\Delta < 0$, равновесие — неустойчиво [2]. Это будет в областях, где $a < 0$, при $\nu_0 > \nu_2$ и $\nu_0 < \nu_1$, в областях, где $a > 0$, при $\nu_1 < \nu_0 < \nu_2$.

4. Рассмотрим случай, когда некоторые из роторов вращаются относительно корпуса с постоянными угловыми скоростями, а остальные, или вообще все роторы, свободно вращаются на своих осях, т. е. действующие на эти роторы силы не дают моментов относительно их осей, и, следовательно, проекции абсолютных угловых скоростей роторов на их оси остаются постоянными. Тогда будут постоянными проекции на оси x_i вектора гиростатического момента, равного сумме моментов количеств относительных (относительно корпуса спутника) движений роторов, вращающихся с постоянными относительными угловыми скоростями, и осевых моментов количеств абсолютных движений свободных роторов

$$k_i^* = \text{const} \qquad (i = 1,2,3) \tag{4.1}$$

В стационарных движениях все роторы вращаются с постоянными относительными угловыми скоростями, при этом

$$k_i^* = k_i + \omega \sum_s J_s l_{si} (l_{s1}\beta_1 + l_{s2}\beta_2 + l_{s3}\beta_3) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4.2}$$

где k_i имеют тот же смысл, что в п. 1, то есть равны проекциям вектора суммы моментов количеств относительных движений всех роторов в данном стационарном движении; J_s, l_{s1}, l_{s2}, l_{s3} — осевые моменты инерции и направляющие косинусы осей свободных роторов.

В случае (4.1) потенциальная энергия приведенной системы, получающейся исключением циклических координат, соответствующих свободным роторам, имеет вид ([1], стр. 109)

$$W^* = {}^3/_2\omega^2 (A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2) - {}^1/_2\omega^2 (A_1\beta_1^2 + A_2\beta_2^2 + A_3\beta_3^2) - \omega (k_1^*\beta_1 + k_2^*\beta_2 + k_3^*\beta_3) + {}^1/_2\omega^2 \sum_s J_s (l_{s1}\beta_1 + l_{s2}\beta_2 + l_{s3}\beta_3)^2$$

С учетом соотношений (4.2) нетрудно убедиться, что $\delta W^* = \delta W$. Следовательно, множества стационарных движений в случаях (1.1) и (4.1) совпадают [1].

Вторая вариация функции W^* отличается от второй вариации W знакоположительным слагаемым

$$\delta^2 W^* = \delta^2 W + \omega^2 \sum_s J_s (l_{s1}\delta\beta_1 + l_{s2}\delta\beta_2 + l_{s3}\delta\beta_3)^2$$

Поэтому при выполнении условий (2.7) условной положительной определенности $\delta^2 W$ функция W^* также будет иметь условный минимум, и по теореме Рауса [4] стационарные движения спутника-гиростата при выполнении условий (2.7) в случае (4.1) также будут устойчивы. Последнее было показано в [5] для случая одного ротора.

Однако условия условного минимума функции W^* могут быть получены и непосредственно. Совершенно так же, как в п. 2, они могут быть приведены к виду

$$a > 0, \quad \nu_0 > \nu_2^* \qquad (2a\nu_2^* = b^* + \sqrt{b^{*2} - 4ac^*}) \tag{4.3}$$

где

$$b^* = b + a\omega \sum_s J_s [1 - (l_{s1}\beta_{10} + l_{s2}\beta_{20} + l_{s3}\beta_{30})^2]$$

$$c^* = c - \omega\lambda_0^2 \sum_s J_s \Big(\sum_{i=1}^3 l_{si}\gamma_{i0}\Big)^2 - 2\lambda_0\omega\Big(\sum_{i=1}^3 b_i\alpha_{i0}\beta_{i0}\Big)\sum_s J_s\Big(\sum_{i=1}^3 l_{si}\alpha_{i0}\Big)\Big(\sum_{i=1}^3 l_{si}\gamma_{i0}\Big) +$$

$$+ \omega^2 a \sum_{s<r} J_s J_r \Big[\sum_{(123)} \beta_{10}(l_{s2}l_{r3} - l_{r2}l_{s3})\Big]^2 + \omega\Big(\sum_{(123)} \gamma_{10}^2 b_2 b_3\Big)\sum_s J_s\Big(\sum_{i=1}^3 l_{si}\alpha_{i0}\Big)^2 -$$

$$- \omega^2 a \sum_s J_s \sum_{(123)} A_1 (l_{s2}\beta_{30} - l_{s3}\beta_{20})^2$$

Условия (4.3) шире условий (2.7), поэтому при $a > 0$ должно быть $\nu_2^* \leqslant \nu_2$ (аналогично, при $a < 0$ должно быть $\nu_1^* \leqslant \nu_1$). Из вида условий (4.3) следует, что все заключения п. 3 будут справедливы и для случая (4.1) лишь с заменой величин ν_1, ν_2 на ν_1^*, ν_2^*.

5. Рассмотрим теперь неограниченную постановку задачи. Введем неподвижную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в притягивающем центре. С центром масс спутника G, помимо системы $Gx_1x_2x_3$ (п. 1), свяжем систему координат $Gy_1y_2y_3$. Ось y_3 направлена по OG, ось y_1 параллельна плоскости $O\xi_3\xi_1$ и направлена в сторону движения. Все системы правые и прямоугольные. Положение корпуса спутника в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ определим сферическими координатами R, $\varkappa$, σ центра масс спутника G

$$\xi_1 = R\cos\varkappa\,\sin\sigma, \qquad \xi_2 = R\sin\varkappa, \qquad \xi_3 = R\cos\varkappa\,\cos\sigma$$

и косинусами γ_i, β_i ($i = 1,2,3$) углов, образуемых осями x_i с y_3 и ξ_2. При этом γ_i, β_i и $\varkappa$ связаны соотношением (1.2) и соотношениями

$$\chi^\circ = \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 - \sin\varkappa = 0, \qquad \varphi = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \tag{5.1}$$

В случае (1.1) измененная потенциальная энергия, получающаяся при игнорировании циклической координаты σ, имеет вид ([1], стр. 125)

$$W^\circ(\gamma_i, \beta_i, \varkappa, R) = {}^1/_2 K^2/S - U$$

$$K = k - k_1\beta_1 - k_2\beta_2 - k_3\beta_3, \qquad S = MR^2\cos^2\varkappa + A_1\beta_1^2 + A_2\beta_2^2 + A_3\beta_3^2$$

$$U = fMR^{-1} - {}^3/_2 fR^{-3}[A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2 - {}^1/_3(A_1+A_2+A_3)]$$

Здесь U — функция гравитационных сил, f — гравитационная постоянная, M — масса спутника, k — постоянный момент количеств движений спутника относительно оси $O\xi_2$, остальные обозначения те же, что в п. 1.

Введем функцию

$$V^\circ = W^\circ / \omega + \lambda\chi^\circ + {}^1/_2\mu\psi + {}^1/_2\nu\varphi$$

где λ, μ, ν — неопределенные множители Лагранжа, а ω — некоторая произвольная постоянная, которой в дальнейшем (см. (5.3)) придадим смысл кеплеровской круговой угловой скорости: $\omega^2 = f(R^\circ)^{-3}$. Согласно теореме Рауса для определения стационарных движений, наряду с уравнениями (1.2), (5.1), будем иметь уравнения ($\Omega = K / S$ — истинная орбитальная угловая скорость спутника, связанная с величиной k)

$$\partial V^\circ / \partial\gamma_i = (3fR^{-3}\omega^{-1}A_i + \mu)\gamma_i + \lambda\beta_i = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

$$\partial V^\circ / \partial\beta_i = \lambda\gamma_i + (\nu - \Omega^2\omega^{-1}A_i)\beta_i - \Omega\omega^{-1}k_i = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{5.2}$$

$$\partial V^\circ / \partial\varkappa = \Omega^2 MR^2\sin\varkappa\cos\varkappa - \lambda\cos\varkappa = 0$$

$$\partial V^\circ / \partial R = -\Omega^2 MR\cos^2\varkappa + fMR^{-2} - {}^9/_2 fR^{-4}[A_1\gamma_1^2 + A_2\gamma_2^2 + A_3\gamma_3^2 -$$

$$- {}^1/_3(A_1 + A_2 + A_3)] = 0$$

При фиксированных значениях $\nu = \nu_0$, $\gamma_i = \gamma_{i0}$ $(i = 1,2,3)$, связанных соотношением (1.2), система уравнений (5.1), (5.2) допускает решения вида

$$\lambda = \lambda^\circ,\ \mu = \mu^\circ,\ \beta_i = \beta_i{}^\circ,\ k_i = k_i{}^\circ,\ \Omega = \Omega^\circ,\ \varkappa = \varkappa^\circ,\ R = R^\circ = f^{-1/3}\omega^{-2/3} \qquad (5.3)$$

Аналогично п. 1 получим

$$\lambda^{\circ 2}\cos^2\varkappa^\circ = 9\omega^2\left(\sum_{i=1}^{3} A_i{}^2\gamma_{i0}{}^2 - J^2\right), \qquad \mu^\circ = -3\omega J - \lambda^\circ \sin\varkappa^\circ \qquad (5.4)$$

и при $\lambda^\circ \neq 0$ (случай $\lambda^\circ = 0$ соответствует случаю $\lambda_0 = 0$ и рассмотрен в [1])

$$\beta^\circ{}_i = -(3\omega A_i + \mu^\circ)(\lambda^\circ)^{-1}\gamma_{i0}, \qquad k_i{}^\circ = \omega\,(\Omega^\circ)^{-1}\,[\lambda^\circ\gamma_{i0} + (\nu_0 - \Omega^{\circ 2}\omega^{-1}A_i)\beta_i{}^\circ]$$
$$(i = 1,2,3) \qquad (5.5)$$

Далее, для удобства сравнения порядков малости различных величин предположим, что все они отнесены, например, к M, ω, $A_1 + A_2 + A_3$ и имеют безразмерную форму. Символами ε и ε^2 будем обозначать различные величины порядков $l\,/\,R$ и $l^2\,/\,R^2$ (l — характерный размер спутника; ε^2 — не обязательно положительная величина).

Последние два уравнения в (5.2) с учетом (5.4), (5.5) определяют величины $\varkappa^\circ$ и Ω°, при этом $\varkappa^\circ \neq 0$ при $\lambda^\circ \neq 0$, и

$$\varkappa^\circ = \varepsilon^2 \neq 0, \qquad \Omega^\circ = \omega + \varepsilon^2 \qquad (5.6)$$

Тогда из (5.4) и (5.5) с учетом (5.6) следует:

$$\lambda^\circ = \lambda_0\,(1 + \varepsilon^2),\quad \mu^\circ = \mu_0 + \lambda_0\varepsilon^2,\quad \beta_i{}^\circ = \beta_{i0} + \varepsilon^2,\quad k_i{}^\circ = k_{i0} + (1 + \nu_0)\varepsilon^2$$
$$(i = 1,2,3) \qquad (5.7)$$

Из (5.6) и (5.7) следует, что стационарные движения спутника-гиростата в случае (1.1) в неограниченной постановке задачи отличаются от рассмотренных в п. 1 положений относительных равновесий величинами порядка ε^2, что для реальных спутников Земли весьма мало.

Отметим, что так как $\varkappa^\circ \neq 0$ при $\lambda^\circ \neq 0$, то во всех рассмотренных здесь при $\lambda^\circ \neq 0$ стационарных движениях плоскость орбиты центра масс спутника не проходит через притягивающий центр (в случае $\gamma_{10} = 0$ такие движения более подробно исследованы в работе [6]). Смещение плоскости орбиты равно $R^\circ \sin\varkappa^\circ$ и имеет порядок εl.

Таким образом, стационарные движения [1] спутника-гиростата, в которых одна из его главных центральных осей инерции направлена по $\boldsymbol{\gamma}$ (случай $\lambda^\circ = \lambda_0 = 0$) и центр круговой орбиты совпадает с притягивающим центром O, будут в этом смысле исключительными.

Для исследования устойчивости рассмотрим аналогично п. 2 три матрицы

$$A^{(i\varepsilon)} = \|\,a_{pq}^{(i\varepsilon)}\,\| \quad (a_{pq}^{(i\varepsilon)} = a_{qp}^{(i\varepsilon)};\ p,\,q = 1, \ldots, 11;\quad i = 1,\,2,\,3)$$

вторых частных производных функции V°, соответственно по переменным

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \varkappa,\ R \qquad (123)$$

Для производных от функции $\Omega = K\,/\,S$ легко получить соотношения

$$\partial\Omega\,/\,\partial\gamma_i = 0,\quad \partial\Omega\,/\,\partial\beta_i = \varepsilon^2,\quad \partial\Omega\,/\,\partial\varkappa = \varepsilon^2,\quad \partial\Omega\,/\,\partial R = \varepsilon \qquad (5.8)$$

На основании (5.2), (5.6), (5.7) и (5.8) элементы $a_{pq}^{(i\varepsilon)}$ с номерами $p \leqslant q \leqslant 9$ мало отличаются от значений (2.3), из них ненулевые имеют вид

$$\begin{gathered}
a_{17}^{(1\varepsilon)} = a_{24}^{(1\varepsilon)} = \gamma_{10}, \quad a_{18}^{(1\varepsilon)} = a_{25}^{(1\varepsilon)} = \gamma_{20}, \quad a_{19}^{(1\varepsilon)} = a_{26}^{(1\varepsilon)} = \gamma_{30} \\
a_{14}^{(1\varepsilon)} = a_{37}^{(1\varepsilon)} = \beta_1{}^\circ, \quad a_{15}^{(1\varepsilon)} = a_{38}^{(1\varepsilon)} = \beta_2{}^\circ, \quad a_{16}^{(1\varepsilon)} = a_{39}^{(1\varepsilon)} = \beta_3{}^\circ \\
a_{44}^{(1\varepsilon)} = b_1 + \varepsilon^2,\ a_{55}^{(1\varepsilon)} = b_2 + \varepsilon^2,\ a_{66}^{(1\varepsilon)} = b_3 + \varepsilon^2,\ a_{47}^{(1\varepsilon)} = a_{58}^{(1\varepsilon)} = {}_{69}^{(1\varepsilon)} = \lambda^\circ \\
a_{77}^{(1\varepsilon)} = a_1 + (1 + \nu_0)^2\,\varepsilon^2,\ a_{88}^{(1\varepsilon)} = a_2 + (1 + \nu_0)^2\varepsilon^2,\ a_{99}^{(1\varepsilon)} = a_3 + (1 + \nu_0)^2\varepsilon^2 \\
a_{78}^{(1\varepsilon)},\ a_{79}^{(1\varepsilon)},\ a_{89}^{(1\varepsilon)} \sim (1 + \nu_0)^2\varepsilon^2 \qquad (123)
\end{gathered} \qquad (5.9)$$

Ненулевые элементы последних двух столбцов матрицы $A^{(i\varepsilon)}$ имеют вид

$$a_{10\,10}^{(i\varepsilon)} = M\omega^2 R^{\circ 2}(1+\varepsilon^2), \quad a_{11\,11}^{(i\varepsilon)} = M\omega^2(1+\varepsilon^2)$$

$$a_{1\,10}^{(i\varepsilon)} = -\cos\varkappa^\circ; \qquad a_{7\,10}^{(i\varepsilon)},\ a_{8\,10}^{(i\varepsilon)},\ a_{9\,10}^{(i\varepsilon)} \sim (1+\nu_0)^2\varepsilon^2 \tag{5.10}$$

$$a_{3\,11}^{(i\varepsilon)},\ a_{4\,11}^{(i\varepsilon)},\ a_{5\,11}^{(i\varepsilon)},\ a_{6\,11}^{(i\varepsilon)},\ a_{10\,11}^{(i\varepsilon)} \sim \varepsilon; \qquad a_{7\,11}^{(i\varepsilon)},\ a_{8\,11}^{(i\varepsilon)},\ a_{9\,11}^{(i\varepsilon)} \sim (1+\nu_0)\,\varepsilon$$

Из (5.9), (5.10) нетрудно получить следующие соотношения для главных диагональных миноров с обратным знаком матриц $A^{(i\varepsilon)}$:

$$D_7^{(i)} = \Delta_7^{(i)} + \varepsilon^2, \qquad D_8^{(i)} = \Delta_8^{(i)} + (1+\nu_0)\,\varepsilon^2, \qquad D_9^{(i)} = \Delta_9^{(i)} + (1+\nu_0)^2\varepsilon^2$$

$$D_{10}^{(i)} = M\omega^2 R^{\circ 2}\,[\Delta_9^{(i)} + (1+\nu_0)^2\varepsilon^2], \qquad D_{11}^{(i)} = M^2\omega^4 R^{\circ 2}\,[\Delta_9^{(i)} + (1+\nu_0)^2\varepsilon^2]$$

Согласно теореме Рауса [4] с применением критерия условного минимума [3] при $\beta_i^\circ \neq 0$ (i фиксировано) условия устойчивости можно записать в виде

$$D_7^{(i)} > 0, \ldots, D_{11}^{(i)} > 0$$

или

$$\Delta_7^{(i)} + \varepsilon^2 > 0, \qquad \Delta_8^{(i)} + (1+\nu_0)\varepsilon^2 > 0, \qquad \Delta_9^{(i)} + (1+\nu_0)^2\varepsilon^2 > 0 \tag{5.11}$$

Так же, как в п. 2, условия (5.11) могут быть приведены к виду

$$a + \varepsilon^2 > 0, \qquad \nu_0 > \nu_2^\circ \qquad (2a\nu_2^\circ = b + \sqrt{b^2 - 4ac} + (1+\nu_0)\,\varepsilon^2)$$

Аналогично дело обстоит и для случая (4.1).

Таким образом, с точностью до членов порядка ε^2 геометрическая интерпретация множества стационарных движений, данная в пп. 1 и 3, а также условия устойчивости (2.7) и (4.3) соответственно для случаев (1.1) и (4.1) имеют место и при неограниченной постановке задачи. При этом условия (2.7) и (4.3) будут условиями устойчивости по отношению к γ_i, β_i, R, $\varkappa$, $\gamma_i^{\cdot}$, $\beta_i^{\cdot}$, $R^{\cdot}$, $\varkappa^{\cdot}$, $\sigma^{\cdot}$ при учете возмущаемости орбиты.

6. Условия устойчивости (2.7) и (4.3) останутся справедливыми и в том случае, когда в спутнике, помимо роторов, имеются полости, целиком заполненные жидкостью [7].

Автор благодарит В. В. Румянцева за обсуждение статьи и полезные замечания.

Поступила 19 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М., Вычислительный центр АН СССР, 1967.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
3. Шостак Р. Я. О признаке условной определенности квадратичной формы n переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функции n переменных. Усп. матем. наук, 1954, т. 9, вып. 2.
4. Пожарицкий Г. К. О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости относительных равновесий и стационарных движений спутника-гиростата. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.
6. Степанов С. Я. О стационарных движениях спутника-гиростата. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.