ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ХАРАКТЕРЕ ДВИЖЕНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ

А. М. Тер-Крикоров

(Москва)

Изучается поведение решений уравнения (1.1), когда $t \to \infty$, а параметр ε достаточно мал. Предполагается, что разложение функции $f(x)$ в ряд по степеням x начинается с x^2. Хорошо известны методы, позволяющие решить такую задачу для случая, когда функция $\varphi(t)$ периодическая или почти периодическая [1]. В данной работе рассмотрен случай, когда функция $\varphi(t)$ непериодическая, но достаточно быстро стремится к нулю при $t \to +\infty$. Доказывается, что решение задачи Коши с нулевыми начальными условиями при $t \to +\infty$ и при достаточно малых значениях параметра ε стремится асимптотически к некоторому периодическому решению уравнения (1.10). Строится асимптотический по параметру ε ряд, в который может быть разложено решение.

1. Постановка задачи. Исследование линеаризированной задачи. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x^{\cdot\cdot} + x = f(x) + \varepsilon\varphi(t) \tag{1.1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $\varphi(t)$ — непрерывная при $0 \leqslant t < +\infty$ функция удовлетворяющая при некотором $\gamma > 0$ следующему условию:

$$\sup\{e^{\gamma t}|\varphi(t)|\} < +\infty, \qquad 0 \leqslant t < +\infty \tag{1.2}$$

Разложение функции $f(x)$ в ряд по степеням x начинается с членов порядка x^2

$$f(x) = c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots \qquad (|x| < x_0) \tag{1.3}$$

Уравнение (1.1) можно интерпретировать как уравнение движения консервативной системы с одной степенью свободы. Будем рассматривать движения, возникшие из состояния покоя.

Если искать решение уравнения (1.1) с нулевыми начальными условиями в виде ряда по степеням малого параметра ε, то очень скоро можно убедиться в невозможности определить все коэффициенты этого ряда так, чтобы они были ограниченными функциями при $0 \leqslant t < +\infty$. Здесь будет предложен другой метод решения.

Рассмотрим сначала линейное уравнение

$$x^{\cdot\cdot} + x = F(t) \tag{1.4}$$

Решение уравнения (1.4) при произвольных начальных условиях имеет следующий вид:

$$x(t) = \sin t\left[x^{\cdot}(0) + \int_0^t F(\tau)\cos\tau\, d\tau\right] + \cos t\left[x(0) - \int_0^t F(\tau)\sin\tau\, d\tau\right] \tag{1.5}$$

Пусть функция $F(t)$ удовлетворяет условию (1.2). Введем следующие обозначения

$$\begin{gathered}\mathrm{S}F = \sin t\int_{+\infty}^t F(\tau)\cos\tau\, d\tau - \cos t\int_{+\infty}^t F(\tau)\sin\tau\, d\tau \\ \mathrm{L}_1F = \int_0^{+\infty} F(t)\cos t\, dt, \qquad \mathrm{L}_2F = \int_0^{+\infty} F(t)\sin t\, dt\end{gathered} \tag{1.6}$$

Тогда выражение (1.5) можно записать в следующем виде:

$$x(t) = \sin t\,[x^{\cdot}(0) + \mathrm{L}_1F] + \cos t\,[x(0) - \mathrm{L}_2F] + \mathrm{S}F \tag{1.7}$$

Лемма 1.1. Для того чтобы решение уравнения (1.4) при заданных начальных условиях стремилось к нулю при $t \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$x^{\cdot}(0) + \mathrm{L}_1F = 0, \qquad x(0) - \mathrm{L}_2F = 0 \tag{1.8}$$

Доказательство сразу следует из (1.7) и из того, что $SF \to 0$ при $t \to +\infty$.

Если $F = \varepsilon\varphi$, то при нулевых начальных условиях решение можно записать в следующем виде:

$$x(t) = \varepsilon A \cos(t - \alpha) + \varepsilon S\varphi, \qquad L_1\varphi = A\sin\alpha, \qquad L_2\varphi = -A\cos\alpha \tag{1.9}$$

Из формулы (1.9) следует, что при $t \to +\infty$ решение неоднородного линейного уравнения (1.4) с нулевыми начальными условиями стремится к некоторому решению однородного уравнения. Сделаем гипотезу о том, что при $t \to +\infty$ решение нелинейного уравнения (1.1) стремится к некоторому периодическому решению уравнения

$$x^{\cdot\cdot} + x = f(x) \tag{1.10}$$

В дальнейшем будет доказана правильность этой гипотезы.

2. **Сведение задачи к системе функциональных уравнений.** Задача о разыскании периодических решений уравнения (1.10) хорошо изучена. Достаточно построить четное решение, любое другое может быть получено произвольным сдвигом независимой переменной. Следуя классическому методу Ляпунова [1], положим

$$t = \tau\sqrt{a(\mu)}, \qquad a(\mu) = 1 + a_1\mu + \ldots + a_n\mu^n + \ldots \tag{2.1}$$

и будем искать решение в виде ряда по степеням малого параметра

$$x(\tau) = \mu x_1(\tau) + \ldots + \mu^n x_n(\tau) + \ldots \tag{2.2}$$

Неизвестные числа a_k определяются из условия отсутствия в выражениях для x_k вековых членов. Известно, что при достаточно малых значениях параметра ε ряды (2.1) и (2.2) сходятся, причем ряд (2.2) сходится равномерно. Также равномерно сходятся ряды, полученные из ряда (2.2) почленным дифференцированием. Выпишем в явном виде первые коэффициенты в разложениях (2.1) и (2.2)

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & a_2 &= {}^5\!/_6 c_2 + {}^3\!/_4 c_3 \\ x_1(\tau) &= \cos\tau, & x_2(\tau) &= c_2\left({}^1\!/_2 - {}^1\!/_6 \cos 2\tau\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Делая сдвиг независимой переменной и возвращаясь к переменной t, можем записать периодическое решение уравнения (1.10) в следующем виде:

$$u(t, \mu, b) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k[\omega(\mu)(t - b)]\mu^k$$

$$\omega(\mu) = [a(\mu)]^{-1/2} = 1 - \mu^2\left({}^5\!/_{12} c_2 + {}^3\!/_8 c_3\right) + \ldots \tag{2.4}$$

Значения функции $u(t, \mu, b)$ и ее производной при $t = 0$ будут аналитическими функциями параметров μ и b

$$u(0, \mu, b) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(\omega b)\mu^k, \qquad u^{\cdot}(0, \mu, b) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega x_k^{\cdot}(-\omega b)\mu^k \tag{2.5}$$

Воспользовавшись формулами (2.3), можно представить (2.5) в следующем виде:

$$u(0, \mu, b) = \mu\cos b + \zeta_1(\mu, b)\mu^2, \qquad u^{\cdot}(0, \mu, b) = \mu\sin b + \zeta_2(\mu, b)\mu^2 \tag{2.6}$$

где $\zeta_1(\mu, b)$ и $\zeta_2(\mu, b)$ — аналитические функции параметров μ и b в окрестности $\mu = 0$ и любого конечного b. Известно, что разложение функции $u(t, \mu, b)$ по степеням параметра μ содержит вековые члены

$$u(t, \mu, b) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k(t - b)$$

$$u_1(t) = \cos t, \qquad u_2(t) = c_2\left({}^1\!/_2 - {}^1\!/_6\cos 2t\right) \tag{2.7}$$

где $u_k(t - b)$ содержит вековой член порядка t^{k-2}.

Лемма 2.1. Существует такое число $\mu_0 > 0$, что при $|\mu| < \mu_0$ справедливы оценки

$$|u(t, \mu, b)| < B_1|\mu|, \qquad \left|\frac{\partial u(t, \mu, b)}{\partial b}\right| < B_2|\mu|, \qquad \left|\frac{\partial u(t, \mu, b)}{\partial \mu}\right| < B_3\sqrt{1 + t^2} \tag{2.8}$$

где постоянные B_1, B_2 и B_3 не зависят от μ и b.

Доказательство сразу следует из формул (2.4) и того факта, что ряд, полученный почленным дифференцированием ряда (2.4) сходится равномерно по t.

Будем считать, что μ_0 настолько мало, что $B_1\mu_0 < x_0$, а следовательно, в силу (2.8) и $|u| < x_0$, где x_0 определено в разложении (1.3).

Сделаем теперь в уравнении (1.1) замену переменной

$$x(t) = u(t, \mu, b) + y(t) \tag{2.9}$$

Для того чтобы функция $x(t)$ удовлетворяла нулевым начальным условиям, потребуем, чтобы

$$y(0) = -u(0, \mu, b), \qquad y^{\cdot}(0) = -u^{\cdot}(0, \mu, b) \tag{2.10}$$

Учитывая, что $u^{\cdot\cdot} + u = f(u)$, можно уравнение для y записать в следующем виде:

$$y^{\cdot\cdot} + y = f(u + y) - f(u) + \varepsilon\varphi(t) \tag{2.11}$$

Параметры μ и b пока произвольны. Выберем их такими функциями параметра ε, чтобы

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0 \tag{2.12}$$

Вследствие леммы 1.1 решение уравнения (2.11) при начальных условиях (2.10) и условии (2.12) эквивалентно решению системы функциональных уравнений

$$y(t) = \varepsilon S\varphi + S[f(u + y) - f(u)] \tag{2.13}$$

$$u(0, \mu, b) - A\varepsilon\cos\alpha + L_2[f(u + y) - f(u)] = 0 \tag{2.14}$$

$$u^{\cdot}(0, \mu, b) - A\varepsilon\sin\alpha - L_1[f(u + y) - f(u)] = 0 \tag{2.15}$$

где оператор S и функционалы L_1 и L_2 определены равенствами (1.6), а числа A и α равенствами (1.9).

Из системы трех функциональных уравнений (2.13) — (2.15) нужно определить три неизвестные функции $y(t, \varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$. Если это возможно, то гипотеза, сформулированная в конце предыдущего раздела, справедлива.

3. Построение асимптотических рядов. Будем искать формальное решение системы уравнений (2.13) — (2.15) в виде рядов по степеням малого параметра ε

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \mu_k, \qquad b = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_{k+1}, \qquad y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t) \tag{3.1}$$

Будем в дальнейшем k-мерный вектор $(a_1, \ldots a_k)$ обозначать через $\mathbf{a}_k$. Подставляя разложение (3.1) в (2.7), получаем

$$u(t, \mu, b) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t, \boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{b}_k)\varepsilon^k, \qquad v_1(t) = \cos t \tag{3.2}$$

причем v_k содержит вековой член порядка t^{k-2}, $k \geqslant 2$.

Так как функция $f(x)$ — аналитическая, то

$$f(u + y) - f(u) = \sum_{k=1}^{\infty} y^k \frac{f^{(k)}(u)}{k!} \qquad (|y| + |u| < x_0) \tag{3.3}$$

Разложение y^k по степеням параметра ε имеет следующий вид:

$$y^k = \sum_{i=1}^{\infty} P_{ik}(\mathbf{y}_i)\varepsilon^{k+i-1}, \qquad P_{ik}(\mathbf{y}_i) = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_k = 1 \\ n_1 + \ldots + n_k = i}}^{i-k+1} y_{n_1}, \ldots, y_{n_k} \tag{3.4}$$

Разложение функции $f'(u)$ можно представить в следующем виде:

$$f'(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j f_{j1}(\mathbf{v}_j), \qquad f_{j1}(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{j} \sum_{\substack{l=2 \\ i+l-2=j}}^{j+1} l c_l P_{i,\, l-1}(\mathbf{v}_i) \tag{3.5}$$

Аналогично

$$f^{(k)}(u)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{j}f_{jk}(\mathrm{v}_j),\qquad f_{jk}(\mathrm{v}_j)=\sum_{i=1}^{j+1}\sum_{l=k}^{j+k}l\ldots(l-k+1)c_l P_{i,\,l-k}(\mathrm{v}_i)\tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.1) получаем

$$yf'(u)=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^{m}F_{m,1}(\mathrm{v}_{m-1},\mathrm{y}_{m-1}),\qquad F_{m,1}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}f_{j1}(\mathrm{v}_j)y_i\tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.4) получаем

$$y^{k}f^{(k)}(u)=\sum_{m=k}^{\infty}\varepsilon^{m}F_{m,k}(\mathrm{v}_{m-k},\mathrm{y}_{m-k+1}),\qquad F_{m,k}=\sum_{i=1}^{m+1-k}\sum_{j=0}^{m-k}P_{ik}(\mathrm{y}_i)f_{jk}(\mathrm{v}_j)\tag{3.8}$$

Подставляя разложения (3.7) и (3.8) в (3.3), получаем

$$f(u+y)-f(u)=\sum_{n=2}^{\infty}\varepsilon^{n}\Phi_n(\mathrm{y}_{n-1},\mathrm{v}_{n-1})\tag{3.9}$$

$$\Phi_n(\mathrm{y}_{n-1},\mathrm{v}_{n-1})=F_{n,1}(\mathrm{v}_{n-1},\mathrm{y}_{n-1})+\sum_{k=2}^{n}\sum_{\substack{m=2\\ m+k-2=n}}^{n}\frac{1}{k!}F_{n,k}(\mathrm{v}_{m-2},\mathrm{y}_{m-1})$$

Подставляя разложения (4.1) в выражения (2.6), получаем

$$\begin{aligned}u(0,\mu,b)&=\sum_{k=1}^{\infty}[\mu_k\cos b_1-\mu_1 b_k\sin b_1+\varphi_k(\boldsymbol{\mu}_{k-1},\mathbf{b}_{k-1})]\,\varepsilon^k\\ u^{\cdot}(0,\mu,b)&=\sum_{k=1}^{\infty}[\mu_k\sin b_1+\mu_1 b_k\cos b_1+\psi_k(\boldsymbol{\mu}_{k-1},\mathbf{b}_{k-1})]\,\varepsilon^k\end{aligned}\tag{3.10}$$

Подставляя разложения (3.9) и (3.10) в уравнения (2.13) — (2.15) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получаем рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned}&y_1(t)=\mathrm{S}\varphi,\quad \mu_1=A,\quad b_1=\alpha,\quad y_n(t)=\mathrm{S}\Phi_n(\mathrm{y}_{n-1},\mathrm{v}_{n-1})\qquad(n=2,\ldots)\\ &\mu_n\cos\alpha-Ab_n\sin\alpha=-\varphi_n(\boldsymbol{\mu}_{n-1},\mathbf{b}_{n-1})-\mathrm{L}_2\Phi_n(\mathrm{y}_{n-1},\mathrm{v}_{n-1})\\ &\mu_n\sin\alpha+Ab_n\cos\alpha=-\psi_n(\boldsymbol{\mu}_{n-1},\mathbf{b}_{n-1})+\mathrm{L}_1\Phi_n(\mathrm{y}_{n-1},\mathrm{v}_{n-1})\end{aligned}\tag{3.11}$$

Если на каждом шаге оператор S и функционалы L_1 и L_2 могут быть применены к функциям $\Phi_n(\mathrm{y}_{n-1},\mathrm{v}_{n-1})$, то все системы (3.11) могут быть последовательно разрешены, следовательно, формальные ряды (3.1) могут быть построены.

В дальнейшем будет удобно пользоваться терминологией функционального анализа. Будем множество функций, непрерывных при $0\leqslant t<+\infty$ и удовлетворяющих условию (1.2) обозначать через B°. Это множество будет пространством Банаха, если величину, стоящую в левой части неравенства (1.2), назвать нормой функции $\varphi(t)$. Аналогично B^n есть пространство Банаха функций, непрерывных при $0\leqslant t<+\infty$ с нормой

$$\|\varphi\|_{B^n}=\sup\{e^{\gamma t}\,|\,\varphi(t)\,|\,(1+t^2)^{-1/2n}\}\qquad(0\leqslant t<+\infty)\tag{3.12}$$

Лемма 3.1. Оператор S действует из пространства B^n в B^n при любом n и ограничен. Функционалы L_1 и L_2 также ограничены в B^n.

Доказательство леммы элементарно. Следует воспользоваться явными выражениями (1.6) для оператора S и функционалов L_1 и L_2.

Теорема 3.1. Если $\varphi\in B^\circ$, то все уравнения (3.11) могут быть последовательно разрешены, причем $y_1\in B^\circ$, $y_2\in B^\circ$, $y_{n+3}\in B^n$ при $n=0,1\ldots$

Доказательство. Если $\varphi \in B^\circ$, то по лемме 3.1 имеем $y_1 = S\varphi \in B^\circ$. Далее, $y_2 = S\Phi_2(y_1, v_1)$, где $\Phi_2(y, v_1)$ есть многочлен, не содержащий y_1 в нулевой степени. Функция $v_1(t)$ ограниченная, следовательно, $\Phi_2(y_1, v_1) \in B^\circ$ и по лемме 3.1 имеем, что и $y_2 = S\Phi_2(y_1 v_1) \in B^\circ$. Аналогично показывается, что и $y_3 \in B^\circ$. Теорему будем доказывать по индукции. Пусть $y_3 \in B^\circ, \ldots y_{n+3} \in B^n$. Докажем, что тогда и $y_{n+4} \in B^{n+1}$. Так как $v_k(t)$ содержит вековой член порядка t^{k-2} при $k \geqslant 2$, то в силу формулы (3.4) и $P_{ik}(v_i)$ содержит вековой член порядка t^{i-2} при $i \geqslant 2$. Из (3.5) и (3.6) следует, что $f_{jk}(v_j)$ содержит вековой член порядка t^{j-2}, $j \geqslant 2$. Из (3.7) и (3.8) теперь следует, что $F_{n+4,k}(v_{n+4-k}, y_{n+5-k}) \in B^{n+1}$. Из (3.9) получаем, что $\Phi_{n+4}(y_{n+3}, v_{n+1}) \in B^{n+1}$, и так как $y_{n+4} = S\Phi_{n+4}$, то $y_{n+4} \in B^{n+1}$. Что и требовалось доказать.

Таким образом ряды (3.1) могут быть построены. Будет показано, что эти ряды асимптотические по параметру ε.

При практическом вычислении коэффициентов рядов (3.1) выкладки получаются весьма громоздкими. Выпишем формулы для величин $y_2(t)$, μ_2 и b_2

$$y_2(t) = c_2 S\,[(S\varphi)^2 + 2A\cos(t-\alpha)\,S\varphi]$$

$$\begin{aligned}\mu_2 &= {}^1/_6\, A^2 c_2\,[2\sin\alpha\sin 2\alpha - 3\cos\alpha + \cos\alpha\cos 2\alpha] - \\ &- c_2\int_0^\infty \sin(t-\alpha)\,[(S\varphi)^2 + 2A\cos(t-\alpha)\,S\varphi]\,dt \\ b_2 &= {}^1/_6\, A c_2\,[2\sin 2\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha - \cos 2\alpha\sin\alpha] + \\ &+ c_2\int_0^\infty \cos(t-\alpha)\,[(S\varphi)^2 + 2A\cos(t-\alpha)\,S\varphi]\,dt\end{aligned} \tag{3.13}$$

4. Доказательство асимптотичности рядов (3.1). Положим

$$B = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^k b_{k+1}, \qquad v = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \mu_k, \qquad Y(t) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k y_k(t)$$

$$U(t, \varepsilon) = u(t, v, B), \qquad u = U + u^*\varepsilon^N$$

и будем искать решение системы уравнений (2.13) — (2.15) в виде

$$y = Y + y^*\varepsilon^N, \qquad b = B + b^*\varepsilon^{N-1}, \qquad \mu = v + \mu^*\varepsilon^N \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. Существуют такие положительные числа ε_0, η_0 b_0, μ_0, что при

$$|\varepsilon| < \varepsilon_0, \quad |\mu^*| < \mu_0, \quad |b^*| < b_0, \quad \|y^*\|_{B^k} < \eta_0(k) \tag{4.2}$$

выполняются неравенства

$$\begin{gathered} |v| < A_1\varepsilon, \quad \|Y(t)\|_{B^{N-3}} \leqslant A_2\varepsilon, \quad |\mu| < A_3\varepsilon \\ \|y\|_{B^k} \leqslant A_4(k)\varepsilon, \quad |u(t, \mu, b)| < A_5\varepsilon, \quad |U(t, \varepsilon)| < A_6\varepsilon \\ |u^*| \leqslant A_7(|\mu^*| + |b^*|)\sqrt{1+t^2} \qquad (k \geqslant N-3) \end{gathered} \tag{4.3}$$

где постоянные A_i не зависят от ε, μ^* и b^*.

Доказательство. Все неравенства, кроме последнего, легко выводятся из формул (4.1). Докажем последнее неравенство. Применяя формулу конечных приращений, получаем

$$u(t, \mu, b) - u(t, v, B) = (\mu - v)\, u'_\mu\,[t, v + \theta(\mu - v), B + \theta(b - B)] + (b - B)\, u_b'\,[t, v + \theta(\mu - v), B + \theta(b - B)] \qquad (0 < \theta < 1)$$

Воспользовавшись теперь равенствами (4.1) и неравенствами (2.8), получаем

$$|u^*| \leqslant |\mu^*|\, B_3\sqrt{1+t^2} + |b^*|\,\frac{|v| + \varepsilon^N|\mu^*|}{\varepsilon} \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) следует, что при достаточно малых ε справедливо последнее неравенство (4.3). Рассмотрим функцию

$$\varphi(u, y) = f(u + y) - f(u) \tag{4.5}$$

Лемма 4.2. Можно так выбрать числа ε_0, μ_0, b_0 и η_0, что при выполнении неравенств (4.2) для функции $\varphi(u, y)$ будут справедливы следующие оценки:

$$\|\varphi(u, y) - \varphi(U, Y)\|_{B^{N-2}} \leqslant A_8 \varepsilon^{N+1}$$
$$\|\varphi(u, Y + \varepsilon^N y_1^*) - \varphi(u, Y + \varepsilon^N y_2^*)\|_{B^{N-2}} \leqslant A_9 \|y_2^* - y_1^*\|_{B^{N-2}} \varepsilon^{N+1} \tag{4.6}$$

где постоянные A_8 и A_9 не зависят от ε, μ^* и b^*.

Доказательство. Из разложения (1.3) следует, что при $|x| < x_0$ для функции $f(x)$ выполняются неравенства

$$|f'(x)| < c_1 |x|, \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant c_2 |x_2 - x_1| \tag{4.7}$$

Выберем числа ε_0, b_0, η_0 и μ_0 так, чтобы удовлетворялись неравенства (4.3) и чтобы $|u| + |y| < x_0$. Тогда в силу (4.7) должны быть выполнены неравенства (4.8)

$$\left|\frac{\partial\varphi(u, y)}{\partial u}\right| = |f'(u+y) - f'(u)| \leqslant c_2 |y|, \quad \left|\frac{\partial\varphi(u, y)}{\partial u}\right| = |f'(u+y)| \leqslant C_1(|u| + |y|)$$

Применяя теперь формулу конечных приращений, получаем

$$\varphi(u, y) - \varphi(U, Y) = (u - U)\frac{\partial\varphi}{\partial u}[U + \theta(u - U), \qquad Y + \theta(y - Y)] +$$
$$+ (y - Y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}[U + \theta(u - U), Y + \theta(y - Y)] \qquad (0 < \theta < 1)$$

Применяя неравенства (4.8), получаем

$$\varphi(u, y) - \varphi(U, Y)| < \varepsilon^N |u^*| c_2 (|Y| + |y|) + \varepsilon^N |y^*| (|u| + |U| + |y| + |Y|)$$

Воспользовавшись неравенством (4.3) для u^*, получаем

$$\|\varphi(u, y) - \varphi(U, Y)\|_{B^{N-2}} \leqslant A_7 C_2 \varepsilon^N (|\mu^*| + |b^*|)(\|Y\|_{B^{N-3}} + \|y\|_{B^{N-3}}) +$$
$$+ \varepsilon^N \|y\|_{B^{N-3}} \sup\{(|u| + |U| + |y| + |Y|)(1 + t^2)^{-1/2}\}, 0 \leqslant t < +\infty \tag{4.9}$$

Но в силу леммы 4.1 при достаточно малых ε, μ^*, b^* и η_0 имеем

$$\|Y\|_{B^{N-3}} \leqslant A_2\varepsilon, \|y\|_{B^{N-3}} \leqslant A_4\varepsilon, |u| < A_5\varepsilon, |U| < A_6\varepsilon, |y| \leqslant \|y\|_{B^{N-3}} e^{-\gamma t}(1 + t^2)^{1/2(N-3)} < A_{10}\varepsilon$$
$$|Y| \leqslant \|Y\|_{B^{N-3}} e^{-\gamma t}(1 + t^2)^{1/2(N-3)} \leqslant A_{11}\varepsilon$$

Подставляя эти оценки в (4.9), получаем первое из неравенств (4.6). Второе неравенство выводится аналогично. Нетрудно видеть, что первые N коэффициентов разложения функции $\varphi(u, y)$ по степеням ε совпадают с первыми N коэффициентами разложения функции $\varphi(U, Y)$. В силу (3.9) получаем

$$\varphi(U, Y) = \sum_{n=2}^{N} \varepsilon^n \Phi_n(y_{n-1}, v_{n-1}) + \varepsilon^{N+1}\chi(t, \varepsilon) \tag{4.10}$$

где $\chi(t, \varepsilon)$ — некоторая известная непрерывная функция. Так как $Y \in B^{N-3}$, а U — ограниченная функция, то $\varphi(U, Y) \in B^{N-3}$. Точно так же и

$$\sum_{n=2}^{N} \varepsilon^n \Phi_n(y_{n-1}, v_{n-1}) \in B^{N-3}$$

Следовательно, $\chi(t, \varepsilon) \in B^{N-3}$ и для $\varphi(u, y)$, используя (4.10), получим

$$\varphi(u, y) = \varphi(u, y) - \varphi(U, Y) + \sum_{n=2}^{N} \varepsilon^n \Phi_n(y_{n-1}, v_{n-1}) + \varepsilon^{N+1}\chi(t, \varepsilon) \tag{4.11}$$

Подставляя выражение (4.11) в уравнение (2.13) и используя уравнения (3.11) при $n = 2, \ldots N$, получаем уравнение для y^*

$$y^* = \varepsilon S\Phi^*(y^*, \mu^*, b^*, \varepsilon), \quad \Phi^* = \varepsilon^{-(N+1)}[\varphi(u, y) - \varphi(U, Y)] + \chi(t, \varepsilon) \tag{4.12}$$

Теорема 4.1. Существуют числа ε_0, μ_0, b_0 и η_0 такие, что при выполнении неравенств (4.2) уравнение (4.12) имеет единственное решение $y^* = y^*(t, \varepsilon, \mu^*, b^*)$, причем y^* есть дифференцируемая функция μ^*, b^*, и имеют место следующие оценки:

$$\|y^*\|_{B^{N-2}} \leqslant C_1\varepsilon, \qquad \left\|\frac{\partial y^*}{\partial b^*}\right\|_{B^{N-2}} \leqslant C_2\varepsilon, \qquad \left\|\frac{\partial y^*}{\partial \mu^*}\right\|_{B^{N-1}} \leqslant C_3\varepsilon \tag{4.13}$$

Теорема 4.1 есть простое следствие леммы 4.2 и принципа сжатых отображений [2].

Найдем теперь уравнения для определения μ^* и b^*. Заметим, что первые N коэффициентов в разложении по степеням ε функций $u(0, \mu, b)$ и $u(0, \nu, B)$ совпадают. Точно так же совпадают первые N коэффициентов в разложении функций $u^{\cdot}(0, \mu, b)$ и $u^{\cdot}(0, \nu, B)$. Вспоминая уравнения (3.10), получаем

$$\begin{gathered} u(0, \nu, B) = \sum_{k=1}^{\infty} [\mu_k \cos\alpha - Ab_k \sin\alpha + \varphi_k(\mu_{k-1}, \mathrm{b}_{k-1})]\,\varepsilon^k + \varepsilon^{N+1}\varphi^*(\varepsilon) \\ u^{\cdot}(0, \nu, B) = \sum_{k=1}^{\infty} [\mu_k \sin\alpha + AB_k \cos\alpha + \psi_k(\mu_{k-1}, \mathrm{b}_{k-1})]\,\varepsilon^k + \varepsilon^{N+1}\psi^*(\varepsilon) \end{gathered} \tag{4.14}$$

где $\varphi^*(\varepsilon)$ и $\psi^*(\varepsilon)$ — некоторые непрерывные функции параметра ε. Подставляя разложение (4.14) в уравнения (2.14) и (2.15), получаем уравнения для определения μ^* и b^*

$$\begin{gathered} u^*(0, \mu^*, b^*) - \varepsilon[\varphi^*(\varepsilon) - \mathrm{L}_2\Phi^*(y^*, \mu^*, b^*, \varepsilon)] = 0 \\ u^{\cdot *}(0, \mu^*, b^*) - \varepsilon[\psi^*(\varepsilon) + \mathrm{L}_1\Phi^*(y^*, \mu^*, b^*, \varepsilon)] = 0 \\ \text{где } u^* = \varepsilon^{-N}[u(0, \mu, b) - u(0, \nu, B)] \end{gathered} \tag{4.15}$$

Если подставить в уравнение (4.15) функцию $y^*(t, \mu^*, b^*, \varepsilon)$, найденную из уравнения (4.12), то получим систему двух уравнений для определения μ^* и b^*. Из леммы 4.1 следует, что $|u^*(0, \mu^*, b^*)| \leqslant c(|\mu^*| + |b^*|)$. Следовательно, $u^*(0, 0, 0) = 0$. Нетрудно показать, что и $u^{\cdot *}(0, 0, 0) = 0$. Следовательно, уравнения (4.15) имеют при $\varepsilon = 0$ решение $\mu^* = b^* = 0$. Покажем, что якобиан этой системы отличен от нуля при $\varepsilon = \mu^* = b^* = 0$. Действительно

$$\frac{\partial u^*(0, \mu^*, b^*)}{\partial \mu^*} = \frac{1}{\varepsilon^N}\frac{\partial u(0, \mu, b)}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \mu^*} = \frac{\partial u(0, \mu, b)}{\partial \mu}$$

Вспоминая теперь выражение (2.6) для $u(0, \mu, b)$, получаем

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial \mu^*}\right)_{\mu^*=b^*=\varepsilon=0} \equiv \left(\frac{\partial u^*}{\partial \mu^*}\right)_0 = \cos\alpha \tag{4.16}$$

Аналогично показывается, что

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial b^*}\right)_0 = -A\sin\alpha, \qquad \left(\frac{\partial u^{\cdot *}}{\partial \mu^*}\right)_0 = \sin\alpha, \qquad \left(\frac{\partial u^{\cdot *}}{\partial b^*}\right)_0 = A\cos\alpha \tag{4.17}$$

Из (4.16) и (4.17) следует, что при $\varepsilon^* = \mu^* = b^* = 0$ якобиан системы (4.15) равен числу $A > 0$. По теореме о неявных функциях система (4.15) имеет в достаточно малой окрестности точки $\varepsilon = \mu^* = b^* = 0$ решение $\mu^*(\varepsilon)$, $b^*(\varepsilon)$, причем $\mu^*(\varepsilon)$ и $b^*(\varepsilon)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Итак доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. Решение системы уравнений (2.13) — (2.15) всегда можно найти в виде (4.1), причем $b^*(\varepsilon)$, $\mu^*(\varepsilon)$ и $\|y^*\|_{B^{N-2}}$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, ряды (3.1) асимптотические.

Предлагаемый метод пригоден и для изучения консервативных систем с большим числом степеней свободы.

Поступила 16 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.