Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА НАБЛЮДЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

А. И. Соляник, Ф. Л. Черноусько

(Москва)

В статье рассмотрена задача оптимального управления процессом наблюдения в системе, описываемой линейными дифференциальными или рекуррентными алгебраическими уравнениями. В §§ 1 — 2 приводятся исходные уравнения теории наблюдения, в § 3 формулируется задача оптимального наблюдения, в § 4 даются некоторые решения основного уравнения. В §§ 5—6 приводятся иллюстративные примеры задач с непрерывными и дискретными наблюдениями. Отметим, что различные вопросы теории наблюдения рассматривались рядом авторов, например, в работах [1-3]. В частности, основное уравнение (2.5) было получено в работе [1]. Излагаемая в работе постановка задачи об оптимизации наблюдений следует работе [4], но в отличие от [4] предполагается, что случайные возмущения действуют не только на измерительное устройство, но и на движение объекта. Близким вопросам посвящена статья [5].

1. Процесс с дискретным временем. Пусть состояние системы характеризуется n-мерным вектором фазовых координат $x(t)$, а время t принимает дискретные значения $t_0, t_1, \ldots, t_N = T$, причем $t_k < t_{k+1}$ при всех $k = 0,1, \ldots, N-1$. В моменты времени t_k производятся измерения (наблюдения) состояния системы, и результатами измерений являются векторы $y(t_k)$ размерности l_k. Движение (изменение состояния) системы и процесс измерения предполагаем заданными в виде линейных соотношений

$$x(t_{k+1}) = A_k x(t_k) + b_k + F_k \xi(t_k) \quad (k=0,1,\ldots,N-1) \tag{1.1}$$

$$y(t_k) = Q_k x(t_k) + \eta(t_k) \quad (k=0,1,\ldots,N) \tag{1.2}$$

Здесь $\xi(t_k)$ и $\eta(t_k)$ — векторные случайные величины размерностей m_k и l_k соответственно, характеризующие возмущения, действующие на объект, и ошибки измерений. Случайные величины $\xi(t_k)$ и $\eta(t_s)$ при всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$ и $s = 0,1,\ldots, N$ предполагаются не зависимыми одна от другой. Считаем, что величины $\xi(t_k)$, $\eta(t_k)$ имеют нулевые математические ожидания, а их корреляционные матрицы известны и равны G_k (размерности $m_k \times m_k$) и B_k (размерности $l_k \times l_k$) соответственно. Под корреляционными матрицами всюду в данной работе понимаются ненормированные корреляционные матрицы (матрицы вторых моментов).

Отметим, что предположение о равенстве нулю математического ожидания $\xi(t_k)$ не нарушает общности, так как это математическое ожидание можно всегда включить в вектор b_k, а равенство нулю математического ожидания $\eta(t_k)$ означает отсутствие систематической ошибки измерений. Матрица A_k размерности $n \times n$, матрица F_k размерности $n \times m_k$, матрица Q_k размерности $l_k \times n$ и n-мерный вектор b_k, фигурирующие в равенствах

(1.1), (1.2), предполагаются заданными. Матрица Q_k характеризует состав измерений, производимых в момент t_k.

Пусть непосредственно перед началом процесса, в момент $t_0 - 0$ известно вероятностное распределение вектора $x(t_0 - 0)$. Это распределение также предполагаем нормальным с математическим ожиданием x_0 и корреляционной матрицей D_0. Цель наблюдения состоит в том, чтобы указать для любого момента времени математическое ожидание и корреляционную матрицу для вектора фазовых координат. Эти величины (математическое ожидание и корреляционная матрица) изменяются, во-первых, в силу уравнений движения (1.1) и, во-вторых, в результате измерений. Все вероятностные распределения считаем нормальными, а обработка результатов измерений производится по методу максимума правдоподобия [6].

Обозначим через x_k и D_k математическое ожидание и корреляционную матрицу для вектора $x(t_k - 0)$, т. е. непосредственно перед k-м измерением, а через x_k^* и D_k^* — соответствующие величины для момента $t_k + 0$, т. е. сразу после k-го измерения. При помощи метода максимума правдоподобия можно показать, что справедливы соотношения

$$x_k^* = x_k + D_k^* Q_k' B_k^{-1} [y(t_k) - Q_k x_k], \; D_k^* = (D_k^{-1} + Q_k' B_k^{-1} Q_k)^{-1} \quad (k = 0, 1, \ldots, N) \tag{1.3}$$

Штрих вверху означает транспонированную, а степень (единица с минусом) — обратную матрицу. Вывод формул (1.3) дан в работе [4]. В промежутке между t_k и t_{k+1} измерения не производятся, а изменение вектора $x(t_k)$ подчинено уравнению (1.1). Вычисляя математическое ожидание и корреляционную матрицу от обеих частей линейного уравнения (1.1), получим

$$x_{k+1} = A_k x_k^* + b_k, \; D_{k+1} = A_k D_k^* A_k' + F_k G_k F_k' \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{1.4}$$

Рекуррентные соотношения (1.3), (1.4) описывают изменение математического ожидания и дисперсии вектора $x(t)$ в результате процесса наблюдения и движения объекта. Для расчета по этим формулам требуется задать матрицы и векторы A_k, b_k, F_k, входящие в уравнения движения (1.1), матрицы Q_k, характеризующие состав измерений (1.2), корреляционные матрицы B_k и G_k случайных возмущений, начальные значения x_0 и D_0, а также результаты измерений $y(t_k)$.

§ 2. Процесс с непрерывным временем. Случай непрерывного времени рассмотрим путем предельного перехода в соотношениях § 1[1]. Положим

$$\tau = \frac{T - t_0}{N}, \quad t_k = t_0 + k\tau \quad (k = 0, 1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

и введем матрицы $A(t)$, $F(t)$, $Q(t)$, $B(t)$, $G(t)$, $D(t)$ и векторы $b(t)$, $z(t)$ такие, что

$$\begin{gathered} A_k = E + \tau A(t_k), \quad b_k = \tau b(t_k), \quad F_k = \tau F(t_k), \quad Q_k = Q(t_k) \\ B_k = \tau^{-1} B(t_k), \quad G_k = \tau^{-1} G(t_k), \quad D_k = D(t_k), \quad x_k = z(t_k) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь E — единичная матрица размера $n \times n$.

---

[1] Более строгий вывод может быть проделан на основе теории случайных процессов, см. [1, 2].

Подставим соотношения (2.1), (2.2) в уравнения (1.1), (1.2) и перейдем к пределу, полагая $\tau \to 0$, $N \to \infty$ при $N\tau = T - t_0 = \mathrm{const}$. Тогда получим

$$dx(t) = [A(t)x(t) + b(t) + F(t)\xi(t)]\,dt, \qquad y(t) = Q(t)x(t) + \eta(t) \tag{2.3}$$

Подставим равенства (2.2) в соотношения (1.3), разложим их по степеням τ и отбросим малые выше первого порядка

$$x_k^* = z(t_k) + \tau D(t_k)\,Q'(t_k)B^{-1}(t_k)\,[y(t_k) - Q(t_k)\,z(t_k)]$$

$$D_k^* = \{D^{-1}(t_k)\,[E + \tau D(t_k)\,Q'(t_k)B^{-1}(t_k)\,Q(t_k)]\}^{-1} =$$
$$= D(t_k) - \tau D(t_k)\,Q'(t_k)B^{-1}(t_k)\,Q(t_k)D(t_k)$$

Эти соотношения, а также равенства (2.2) подставим в формулы (1.4) и снова отбросим малые высших порядков

$$z(t_{k+1}) = z(t_k) + \tau\,\{A(t_k)\,z(t_k) + b(t_k) + D(t_k)\,Q'(t_k)\,B^{-1}(t_k)\times$$
$$\times[y(t_k) - Q(t_k)\,z(t_k)]\}$$

$$D(t_{k+1}) = D(t_k) + \tau\,[A(t_k)D(t_k) + D(t_k)A'(t_k) -$$
$$- D(t_k)\,Q'(t_k)B^{-1}(t_k)\,Q(t_k)D(t_k) + F(t_k)\,G(t_k)\,F'(t_k)]$$

Переходя к пределу при $\tau \to 0$, получим дифференциальные уравнения [1]

$$dz = [Az + b + DQ'B^{-1}(y - Qz)]\,dt \tag{2.4}$$

$$dD\,/\,dt = AD + DA' - DQ'B^{-1}QD + FGF' \tag{2.5}$$

Здесь для простоты опущена явная зависимость всех функций от t. Начальные условия для уравнений (2.4), (2.5) имеют вид $z(t_0) = x_0$, $D(t_0) = D_0$ и задают математическое ожидание и корреляционную матрицу для фазового вектора $x(t_0)$ в начале процесса.

Как рекуррентные соотношения (1.3), (1.4) для процесса с дискретным временем (1.1), (1.2), так и дифференциальные уравнения (2.4), (2.5) для процесса с непрерывным временем (2.3) описывают эволюцию математического ожидания и корреляционной матрицы для фазового вектора. Отметим, что уравнения (1.3), (1.4), (2.5) для корреляционной матрицы, в отличие от соответствующих уравнений для математического ожидания, не зависят, во-первых, от векторов b_k или $b(t)$ и, во-вторых, от результатов измерений $y(t)$. Поэтому уравнения (1.3), (1.4), (2.5) для корреляционной матрицы будут обычными (не стохастическими) уравнениями и могут быть решены заранее, до того, как произведены наблюдения.

Дифференциальные уравнения (2.4), (2.5) целесообразно рассматривать вместо дискретных (1.3), (1.4), если измерения производятся непрерывно или дискретно, но достаточно часто. Функция $B(t)$ характеризует погрешность измерений в единицу времени. Уравнения (2.4), (2.5) применимы и в том случае, когда процесс описывается дифференциальным уравнением (2.3), а измерения производятся в дискретные моменты времени. Тогда функция $B^{-1}(t)$ представляется в виде суммы дельта-функций времени.

Ниже на основе уравнения (2.5) рассматривается задача оптимизации процесса наблюдения для системы, описываемой дифференциальным уравнением (2.3). Предполагаются известными матрицы $A(t)$, $F(t)$, $Q(t)$, $B(t)$, $G(t)$, входящие в правую часть уравнения (2.5). Размерности этих матриц равны соответственно $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$, $l \times l$, $m \times m$. Здесь $m(t)$ — размерность вектора случайных возмущений ξ, а $l(t)$ — размерность вектора y, т. е. число скалярных параметров, измеряемых в момент t. Эти размерности могут изменяться в процессе движения.

§ 3. Задача оптимального наблюдения. Введем обозначения

$$V(t) = Q'(t)B^{-1}(t)Q(t), \qquad K(t) = F(t)G(t)F'(t) \tag{3.1}$$

и перепишем уравнение (2.5) в виде

$$dD / dt = AD + DA' - DVD + K, \qquad D(t_0) = D_0 \tag{3.2}$$

Из соотношений (3.1) следует, что матрицы $V(t)$ и $K(t)$ имеют размерность $n \times n$ и обладают свойствами симметрии и положительной определенности, так как такие же свойства имеют матрицы B, G. Матрица V характеризует процесс наблюдения и зависит от состава измерений (т. е. от матрицы Q) и от их точности (т. е. от матрицы B). В частности, если наблюдений не проводится, то $V = 0$. Матрица K характеризует возмущения, действующие на объект.

Если наблюдатель может изменять выбор наблюдаемых параметров или точность их измерения, то матрица V в матричном уравнении (3.2) может рассматриваться как управляющая функция. Роль фазовых координат в системе (3.2) играют элементы корреляционной матрицы D. Число различных элементов в силу симметрии матрицы D равно $n(n+1)/2$.

На управляющую функцию V могут быть наложены ограничения

$$V(t) \in U(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.3}$$

где $U(t)$ — замкнутое множество матриц, характеризующее возможности наблюдения. Введем в рассмотрение функционалы

$$J_0 = \int_{t_0}^{T} f(V, t)\, dt, \qquad J = \sum_{j,k=1}^{n} D_{jk}(T_*) q_j q_k \tag{3.4}$$

Здесь скалярная функция f определена при всех $t \in [t_0, T]$ и $V(t) \in U(t)$, через $D_{jk}(T_*)$ обозначены элементы матрицы D в фиксированный момент T_*, причем $t_0 < T_* \leqslant T$, а q_j — компоненты заданного ненулевого n-мерного вектора q. Функционал J_0 из (3.4) характеризует стоимость или длительность процесса наблюдения, и функция f есть стоимость наблюдений в единицу времени.

Пусть, например, наблюдатель в любой момент времени может либо вести наблюдения фиксированным способом (с матрицей V_0), либо вообще не производить измерений. Тогда множество U при любом t состоит из двух матриц 0 и V_0. Если положить в (3.4)

$$f(0, t) = 0, \qquad f(V_0, t) = 1$$

то функционал J_0 будет равен длительности наблюдения.

Функционал J из (3.4) равен, как легко видеть дисперсии следующей линейной функции от фазовых координат в момент T_*

$$Z = (q, x(T_*)) \tag{3.5}$$

Скобки означают скалярное произведение векторов.

Теперь можно поставить различные задачи об оптимизации наблюдений как обычные задачи оптимального управления для системы (3.2). Система уравнений, начальные условия и ограничения на управляющие функции определены равенствами (3.2), 3.3). Минимизируемый функционал естественно задать либо в виде интегрального функционала J_0 (стоимость или длительность наблюдения), либо в виде J из (3.4), что отвечает минимизации дисперсии величины (3.5). В первом случае могут быть наложены еще условия вида $J_i \leqslant c_i$, где J_i — функционалы типа J из (3.4), $c_i > 0$ — заданные числа, $i = 1, \ldots, s$. Эти условия означают, что точность определения некоторых параметров вида (3.5) должна быть не ниже заданной. Во втором случае также можно наложить условия вида $J_i \leqslant c_i$, $i = 1, \ldots s$, а также ограничение на стоимость или длительность наблюдений вида $J_0 \leqslant c_0$, где $c_0 > 0$ — заданная постоянная.

§ 4. Интегрирование основного уравнения. В нелинейном матричном уравнении (3.2) сделаем замену переменной $D = Y^{-1}$. Тогда, как нетрудно проверить (см. также [4]), это уравнение примет вид

$$dY \,/\, dt = -A'Y - YA + V - YKY, \qquad Y(t_0) = D_0^{-1} \tag{4.1}$$

Отметим случаи, когда уравнение (3.2) или эквивалентное ему уравнение (4.1) интегрируется точно или приближенно. Обозначим через $X(t)$ фундаментальную матрицу решений линейной однородной системы с матрицей A, т. е.

$$dX \,/\, dt = AX, \qquad X(t_0) = E \tag{4.2}$$

1°. Пусть отсутствуют наблюдения и возмущения, действующие на объект, т. е. $V = K \equiv 0$. Тогда общее решение систем (3.2) и (4.1), которые в этом случае линейны и однородны, имеет вид [4]

$$D(t) = X(t)\, CX'(t), \qquad Y(t) = [X'(t)]^{-1} C^{-1} X^{-1}(t) \tag{4.3}$$

что можно проверить непосредственно при помощи уравнения (4.2). Определяя постоянную матрицу C с учетом начальных условий (3.2), (4.1), получим $C = D_0$.

2°. Если $V(t) \equiv 0$ (наблюдения отсутствуют), а $K(t)$ произвольно, то решение линейной неоднородной системы (3.2) получим методом вариации произвольных постоянных, используя решение (4.3) соответствующей однородной системы. Производя обычные вычисления и удовлетворяя начальному условию (3.2), найдем

$$D(t) = X(t)\left\{D_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\, K(\tau)\, [X'(\tau)]^{-1} d\tau\right\} X'(t) \tag{4.4}$$

3°. При $K(t) \equiv 0$ (отсутствуют возмущения, действующие на объект) система (3.2) остается нелинейной, но система (4.1) — линейная неоднородная. Она интегрируется методом вариации произвольных постоянных с использованием решения (4.3) соответствующей однородной системы. Аналогично (4.4) получим

$$Y(t) = D^{-1}(t) = [X'(t)]^{-1}\left[D_0^{-1} + \int_{t_0}^{t} X'(\tau)\, V(\tau)\, X(\tau)\, d\tau\right] X^{-1}(t) \tag{4.5}$$

Решение (4.5) получено в работе [4], где рассмотрены также задачи оптимального наблюдения при $K \equiv 0$.

4.° Пусть погрешности наблюдений велики, т. е. матрицу V можно представить в виде $V = \varepsilon V_*$, где V_*— матрица с ограниченными элементами, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Тогда решение системы (3.2) можно искать в виде $D = D^\circ + \varepsilon D^1$, где D° определяется равенством (4.4). Матрица D^1 удовлетворяет, с точностью до малых высшего порядка, следующему уравнению и начальному условию

$$dD^1 \,/\, dt = AD^1 + D^1A' - D^\circ V_* D^\circ, \qquad D^1(t_0) = 0 \tag{4.6}$$

Решение линейной неоднородной системы (4.6) строится аналогично решению (4.4) и имеет вид

$$D^1(t) = -X(t)\left\{\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\, D^\circ(\tau)\, V_*(\tau)\, D^\circ(\tau)\, [X'(\tau)]^{-1} d\tau\right\} X'(t) \tag{4.7}$$

Тем самым построено приближенное решение задачи Коши (3.2).

5°. Пусть интенсивность внешних возмущений мала, т. е. $K = \varepsilon K_*$, где K_* — матрица с ограниченными элементами, $\varepsilon \ll 1$. Решение задачи (4.1) ищем в виде $Y = Y^\circ + \varepsilon Y^1$, где Y° определено равенством (4.5). Для Y^1 получим линейную неоднородную задачу, подобную задаче (4.6). Ее решение имеет вид, аналогичный равенству (4.7)

$$Y^1(t) = -[X'(t)]^{-1}\left[\int_{t_0}^{t} X'(\tau)\, Y^\circ(\tau)\, K_*(\tau)\, Y^\circ(\tau)\, X(\tau)\, d\tau\right] X^{-1}(t) \tag{4.8}$$

Тем самым определено и приближенное решение $D = Y^{-1} = (Y^\circ + \varepsilon Y^1)^{-1}$ задачи (3.2).

6°. Важным будет случай, когда измерения производятся в дискретные моменты времени, т. е.

$$V(t) = \sum_{k=1}^{r} V_k(t)\, \delta(t - t_k), \qquad t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_r \leqslant T \tag{4.9}$$

Здесь t_k — моменты измерений, r — их число, δ — дельта-функция, $V_k(t)$ — матричные функции, характеризующие состав и погрешности отдельных измерений. В промежутках между измерениями, т. е. при $t_k < t < t_{k+1}$, решение системы (3.2) имеет вид, аналогичный (4.4)

$$D(t) = X(t)\left\{C_k + \int_{t_k}^{t} X^{-1}(\tau)\, K(\tau)\, [X'(\tau)]^{-1} d\tau\right\} X'(t) \tag{4.10}$$

$$C_0 = D_0, \quad t_k < t < t_{k+1}$$

Здесь C_k — постоянные матрицы. В точках измерений, как следует из второй формулы (1.3) и обозначений (2.2), (3.1), справедливы равенства

$$D^{-1}(t_k + 0) = D^{-1}(t_k - 0) + V_k(t_k), \quad k = 1, \ldots, r \tag{4.11}$$

Соотношения на разрывах (4.11) дают связь между постоянными C_k для соседних интервалов. Равенства (4.10), (4.11) определяют решение задачи (3.2) в случае (4.9). При помощи этих соотношений можно решать задачи об оптимальном выборе моментов измерений t_k в интервале $[t_0, T]$ с точки зрения минимизации одного из функционалов вида (3.4). При этом могут быть наложены различные дополнительные ограничения на другие функционалы типа (3.4), на выбор моментов измерения или на их число и др. При помощи соотношений (4.10), (4.11) все эти задачи сводятся к задачам нелинейного программирования (о минимизации функций от переменных t_k).

§ 5. Задача с непрерывным наблюдением. Пусть уравнение движения (2.3) имеет вид

$$dx(t) = [ax(t) + b(t) + \xi(t)]\, dt \tag{5.1}$$

Здесь $x(t)$ — единственная фазовая координата, a — постоянная, $b(t)$ — заданная функция, $\xi(t)$ — скалярное случайное возмущение с постоянной дисперсией g. Процесс наблюдения состоит в измерении текущего значения фазовой координаты, причем дисперсия ошибки измерения на единицу времени в любой момент времени равна либо постоянной B_0, либо бесконечности (измерения не производятся вовсе). В принятых в § 2—4 обозначениях имеем

$$n = m = l = 1, \quad F = Q = 1, \quad A = a, \quad V = 0$$

или

$$B_0^{-1}, \quad K = G = g$$

причем все матрицы и векторы здесь превращаются в скаляры.

Уравнение (4.1), эквивалентное уравнению (3.2), примет вид

$$dY / dt = -2aY - qY^2 + V, \quad Y = D^{-1} \tag{5.2}$$

Пусть суммарная длительность наблюдений задана и равна $T_0 < T$, начальное условие имеет вид $D(0) = D_0$ и требуется указать способ наблюдения, минимизирующий дисперсию $D(T)$ фазовой координаты $x(T)$ в конце процесса. Таким образом, начальные условия, ограничения и функционал можно записать в форме

$$Y(0) = D_0^{-1}, \quad V(t) = 0 \quad \text{или} \quad V(t) = B_0^{-1}, \ J = Y(T) \to \max$$

$$\int_0^T f(V)\,dt = T_0 < T, \qquad f(0) = 0, \qquad f(B_0^{-1}) = 1 \tag{5.3}$$

Для решения задачи (5.2), (5.3) применим принцип максимума. Составим функцию Гамильтона, сопряженное уравнение и условие трансверсальности

$$H = p(-2aY - gY^2 + V) + p_0 f(V) \to \max \text{ по } V$$

$$dp / dt = 2p(a + gY), \qquad p(T) = 1 \tag{5.4}$$

Здесь $p(t)$ — сопряженная переменная, p_0 — постоянная. Из принципа максимума (5.4) и ограничений (5.3) на V следует, что V определяется из условия

$$V(t) = B_0^{-1} \quad \text{при } \varphi(t) > 0, \qquad V(t) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi(t) < 0$$

$$\varphi(t) = p_0 + p(t) B_0^{-1} \tag{5.5}$$

Очевидно, что все решения сопряженного уравнения (5.4), кроме тривиального $p(t) \equiv 0$, нигде не обращаются в нуль. Поэтому, т. к. $p(T) > 0$, то $p(t) > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Пользуясь уравнениями (5.2) и (5.4), вычислим

$$d^2p / dt^2 = 2dp / dt\,(a + gY) + 2pgdY / dt = 2p\,[2(a + gY)^2 +$$

$$+ g(-2aY - gY^2 + V)] = 2p\,[(a + gY)^2 + a^2 + gV] > 0$$

Последнее неравенство следует из того, что $V \geqslant 0$, $p > 0$. Для функции $\varphi(t)$, определенной равенством (5.5), имеем, как и для $p(t)$, неравенство $d^2\varphi / dt^2 > 0$, т. е. $\varphi(t)$ — строго выпуклая функция, имеющая не более двух нулей на интервале $[0, T]$. Поэтому оптимальный закон наблюдения содержит не более двух участков наблюдения, которые расположены в начале и в конце интервала (один из этих участков может отсутствовать), т. е.

$$\begin{aligned} &V(t) = B_0^{-1}, \quad 0 < t < t_* \ (0 \leqslant t_* \leqslant T_0) \\ &V(t) = 0, \quad t_* < t < T - (T_0 - t_*) \\ &V(t) = B_0^{-1}, \quad T - (T_0 - t_*) < t < T \end{aligned} \tag{5.6}$$

Здесь t_* — неизвестная пока длительность первого участка наблюдения; длительность второго участка равна, очевидно, $T_0 - t_*$. Если $V(t)$ постоянно, то уравнение (5.2) сразу интегрируется. Его общее решение на участках (5.6) имеет вид

$$\begin{aligned} &Y(t) = \frac{\beta - a}{g} - \frac{2\beta}{g(C_1 e^{2\beta t} + 1)}, \quad \beta = \sqrt{a^2 + gB_0^{-1}}, \quad 0 < t < t_* \\ &Y(t) = -\frac{2a}{g\,[C_2 e^{2a(t - t_*)} + 1]}, \quad t_* < t < T - T_0 + t_* \\ &Y(t) = \frac{\beta - a}{g} - \frac{2\beta}{g\,[C_3 e^{2\beta(t - T + T_0 - t_*)} + 1]}, \quad T - T_0 + t_* < t < T \end{aligned} \tag{5.7}$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 определим из начального условия (5.3) и условий непрерывности функции $Y(t)$ в точках переключения. Эти условия дают

$$\frac{\beta - a}{g} - \frac{2\beta}{g(C_1 + 1)} = D_0^{-1}, \quad \beta - a - \frac{2\beta}{C_1 e^{2\beta t_*} + 1} = -\frac{2a}{C_2 + 1}$$

$$-\frac{2a}{C_2 e^{2a(T - T_0)} + 1} = \beta - a - \frac{2\beta}{C_3 + 1}$$

Отсюда находим искомые постоянные, а затем при помощи равенств (5.3), (5.7) и значение функционала $J(\lambda)$

$$C_1 = \frac{\beta + a + gD_0^{-1}}{\beta - a - gD_0^{-1}}, \qquad C_2 = \frac{\gamma C_1 \lambda - 1}{\gamma - C_1 \lambda}$$

$$C_3 = \frac{\gamma C_2 \lambda_1^2 + 1}{\gamma + C_2 \lambda_1^2} = \frac{\gamma C_1 (\gamma^2{}_1 - 1) - \gamma(\lambda_1^2 - 1)}{\gamma \lambda C_1 (\lambda_1^2 - 1) + \gamma^2 - \lambda_1^2} \tag{5.8}$$

$$J(\lambda) = \frac{\beta - a}{g} - \frac{2\beta}{g(C_3 e^{2\beta T_0} \lambda^{-1} + 1)}, \lambda = e^{2\beta t_*}, \quad \lambda_1 = e^{a(T - T_0)}, \quad \gamma = \frac{\beta + a}{\beta - a} > 0$$

Отметим следующие неравенства для введенных величин

$$\gamma \geqslant 1, \quad \lambda_1 \geqslant 1, \quad C_1 \geqslant 1 \quad \text{при} \quad a \geqslant 0, \qquad \gamma \leqslant 1, \quad \lambda_1 \leqslant 1 \quad \text{при } a \leqslant 0 \tag{5.9}$$

$$\frac{\lambda_1 + \gamma}{\lambda_1 + 1} \leqslant 1, \qquad \left| \frac{\lambda_1 - \gamma}{\lambda_1 \gamma - 1} \right| \leqslant 1 \quad \text{при всех } a$$

Соотношения (5.8) дают возможность выразить значение функционала $J(\lambda)$ через неизвестную λ, зависящую от t_*. Таким образом, задача сводится к отысканию максимума функции $J(\lambda)$ по λ на инвервале

$$1 \leqslant \lambda \leqslant e^{2\beta T_0}, \quad 0 \leqslant t_* \leqslant T_0 \tag{5.10}$$

Из (5.8) получаем, исключая C_2 и C_3

$$J(\lambda) = \frac{\beta - a}{g} - \frac{2\beta}{g} \frac{\lambda^2 \gamma C_1 (\lambda_1^2 - 1) + \lambda(\gamma^2 - \lambda_1^2)}{\Lambda(\lambda)} \tag{5.11}$$

$$\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{2\beta}{g} \frac{e^{2\beta T_0} \gamma (\lambda_1^2 - 1) [\lambda^2 C_1^2 (\gamma^2 \lambda_1^2 - 1) - 2\lambda C_1 \gamma (\lambda_1^2 - 1) - (\gamma^2 - \lambda_1^2)]}{\Lambda^2(\lambda)}$$

$$\Lambda(\lambda) = \lambda^2 \gamma C_1 (\lambda_1^2 - 1) + \lambda [\gamma^2 - \lambda_1^2 + C_1 e^{2\beta T_0} (\gamma^2 \lambda_1^2 - 1)] - \gamma e^{2\beta T_0} (\lambda_1^2 - 1)$$

Обозначим значения λ, при которых $J(\lambda)$ достигает локального максимума и мини мума соответственно через $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$.

Приравнивая $dJ / d\lambda$ нулю и исследуя знак $dJ / d\lambda$, из (5.11) с учетом (5.9) находим

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{C_1} \frac{\lambda_1 + \gamma}{\lambda_1 \gamma + 1}, \quad \lambda_{\min} = \frac{1}{C_1} \frac{\lambda_1 - \gamma}{\lambda_1 \gamma - 1} \quad \text{при } C_1 > 0$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{C_1} \frac{\lambda_1 - \gamma}{\lambda_1 \gamma - 1}, \quad \lambda_{\min} = \frac{1}{C_1} \frac{\lambda_1 + \gamma}{\lambda_1 \gamma + 1} \quad \text{при } C_1 < 0$$

$$\lambda_{\max} > \lambda_{\min} \tag{5.12}$$

$$dJ/d\lambda < 0 \text{ при } \lambda > \lambda_{\max}, \quad \lambda < \lambda_{\min}$$

$$dJ/d\lambda > 0 \text{ при } \lambda_{\min} < \lambda < \lambda_{\max}$$

Найдем оптимальный закон наблюдения.

При $a \geqslant 0$, используя соотношения (5.9), (5.12), находим, что $\lambda_{\max} \leqslant 1$. Условия (5.12) показывают, что $dJ / d\lambda < 0$ на интервале (5.10), т. е. $J(\lambda)$ убывает на этом интервале. Следовательно, $J(\lambda)$ достигает своего максимального значения при $\lambda = 1$. Оптимальный закон наблюдения при $a \geqslant 0$ имеет вид

$$V(t) = 0, \quad 0 < t < T - T_0, \qquad V(t) = B_0^{-1}, \qquad T - T_0 < t < T \tag{5.13}$$

При $a < 0$ оптимальный закон наблюдения имеет вид (5.6), где в зависимости от параметров задачи t_* принимает одно из значений

$$t_* = 0, \quad \text{если } \lambda_{\max} \leqslant 1 \tag{5.14}$$

$$t_* = 0, \quad \text{если } 1 < \lambda_{\max} \leqslant e^{2\beta T_0}, \ J(1) \geqslant J(\lambda_{\max})$$

$$t_* = \ln(\lambda_{\max})/2\beta, \quad \text{если } 1 < \lambda_{\max} \leqslant e^{2\beta T_0}, \ J(1) < J(\lambda_{\max})$$

$$t_* = T_0, \text{ если } \lambda_{\min} \leqslant 1, \ \lambda_{\max} > e^{2\beta T_0}$$

$$t_* = 0, \quad \text{если } \lambda_{\min} > 1, \ \lambda_{\max} > e^{2\beta T_0}, \ J(1) \geqslant J(e^{2\beta T_0})$$

$$t_* = T_0, \text{ если } \lambda_{\min} > 1, \ \lambda_{\max} > e^{2\beta T_0}, \ J(1) < J(e^{2\beta T_0})$$

Соотношения (5.14) получаются из условия максимальности $J(\lambda)$ на интервале (5.10) с учетом условий (5.12).

Таким образом, равенства (5.13) и (5.6), (5.14) определяют оптимальный закон наблюдения при $a \geqslant 0$ и $a < 0$ соответственно.

Сравнивая эти результаты с результатами, полученными в работе [4] для аналогичного примера при отсутствии внешних возмущений ($g = 0$), замечаем, что эти возмущения приводят, вообще говоря, к смещению наблюдений к концу интервала $[0, T]$.

§ 6. Задачи с дискретными наблюдениями. **1°.** Пусть уравнение движения системы имеет вид

$$dx(t) = [b(t) + \xi(t)]\, dt \tag{6.1}$$

Здесь, как и в предыдущей задаче, $x(t)$ — единственная фазовая координата, $\xi(t)$ — скалярное случайное возмущение с постоянной дисперсией g, $b(t)$ — заданная функция. Пусть измерения фазовой координаты производятся в дискретные моменты времени t_k, $k = 1, \ldots, r$, т. е.

$$V(t) = \sum_{k=1}^{r} V_k \delta(t - t_k), \qquad t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_r \leqslant T$$

где V_k — постоянные.

Требуется выбрать моменты наблюдения так, чтобы минимизировать дисперсию $D(T)$ фазовой координаты в конце процесса.

Уравнение (4.1) для данной задачи имеет вид

$$dY / dt = -gY^2 + V, \qquad Y(t_0) = D_0^{-1} \tag{6.2}$$

По формуле (4.11) находим

$$Y(t_k + 0) = Y(t_k - 0) + V_k \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{6.3}$$

Интегрируя уравнение (6.2) на интервале (t_{k-1}, t_k) с учетом равенств (6.3), получим

$$Y(t_k + 0) = \frac{Y(t_{k-1} + 0)}{1 + (t_k - t_{k-1})\, gY(t_{k-1} + 0)} + V_k \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{6.4}$$

$$D^{-1}(T) = \frac{Y(t_r + 0)}{1 + (T - t_r)\, gY(t_r + 0)}$$

Пусть известны моменты времени t_{r-1} и значение $Y(t_{r-1} + 0)$. Найдем t_r такое, что $t_{r-1} \leqslant t_r \leqslant T$ и $D^{-1}(T)$ максимально. Используя (6.4), находим

$$D^{-1}(T) = \frac{V_r + Y(t_{r-1} + 0)[1 + (t_r - t_{r-1})\, gV_r]}{1 + (T - t_{r-1})\, gY(t_{r-1} + 0) + (T - t_r)\, gV_r[1 + (t_r - t_{r-1})\, gY(t_{r-1} + 0)]}$$

Очевидно, что $D^{-1}(T)$ достигает своего максимального значения при $t_r = T$. Рассуждая аналогичным образом, получим по индукции следующий оптимальный закон наблюдения:

$$t_1 = \ldots = t_r = T$$

т. е. все наблюдения производятся в конце процесса.

2°. Возьмем уравнения движения системы в виде

$$dx_1(t) / dt = x_2, \qquad dx_2(t) = [b(t) + \xi(t)]\, dt \tag{6.5}$$

Здесь $x_1(t)$ играет роль координаты, $x_2(t)$ — скорости, $b(t)$ — заданная функция, а $\xi(t)$ — случайное возмущение. Будем считать, что интенсивность возмущения мала, т. е.

$$K(t) = \varepsilon K_*(t) = \varepsilon \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_* \end{Vmatrix} \tag{6.6}$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, g_* — постоянная.

Пусть в дискретные моменты времени t_k, $k = 1, \ldots, r$ производятся наблюдения координаты, причем погрешности наблюдений велики

$$V(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^{r} V_k \delta(t - t_k) \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad t_0 \leqslant t^1 \leqslant \ldots \leqslant t_r \leqslant t_{r+1} = T$$

Здесь V_k — постоянные. Требуется так выбрать моменты наблюдений, чтобы минимизировать дисперсию координаты в конце процесса.

Используя соотношения (4.10), (4.11) и ограничиваясь членами первого порядка малости по ε, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$D(t_k + 0) = D(t_{k-1} + 0) +$$

$$+ X(t_k) \left\{ \int_{t_{k-1}}^{t_k} X^{-1}(\tau) K(\tau) [X'(\tau)]^{-1} d\tau \right\} X'(t_k) - \varepsilon D(t_{k-1} + 0) V_k \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} D(t_{k-1} + 0),$$

$$D(t_0) = D_0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{6.7}$$

Здесь $X(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной однородной системы, равная

$$X(t) = \begin{Vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{6.8}$$

Из рекуррентных соотношений (6.7) при помощи равенств (6.6), (6.8) получим с точностью до малых высшего порядка

$$D(T) = D_0 + \varepsilon g_* \begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & T \end{Vmatrix} - \varepsilon \sum_{k=1}^{r} V_k D_0 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} D_0$$

$$d_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{r+1} (t_k - t_{k-1})^3, \qquad d_{12} = d_{21} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r+1} (t_k - t_{k-1})^2 \tag{6.9}$$

Задача о минимуме дисперсии координаты сводится к нахождению минимума элемента

$$d_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{r+1} (t_k - t_{k-1})^3, \qquad t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_r \leqslant t_{r+1} = T$$

Нетрудно показать, что искомый минимум достигается при

$$t_k = \frac{T - t_0}{r + 1} k \qquad (k = 1, \ldots, r)$$

Итак, оптимальный закон наблюдения для этой задачи следующий: все моменты наблюдения нужно равномерно распределить на интервале $[t_0, T]$.

Заметим, что дисперсия скорости в конце процесса здесь не зависит от выбора моментов наблюдения.

Поступила 3 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman R. E., Bucy R. C. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Trans. ASME, ser. D., J. Basic Engng, 1961, vol. 83, N. 1, pp. 95—108.
2. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М., Изд-во Моск. ун-та, 1966.
3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М., «Наука», 1968.
4. Черноусько Ф. Л. Об оптимизации процесса наблюдения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
5. Яшин А. И. О выборе оптимального процесса наблюдения. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1969, № 2, стр. 121—123.
6. Крамер Г. Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.