Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

К ЗАДАЧАМ ОБ УПРАВЛЕНИИ ПРИ СТЕСНЕННЫХ КООРДИНАТАХ

А. Б. Куржанский, Ю. С. Осипов

(Свердловск)

На основе подхода, развитого в монографии [1], рассматривается задача об управлении для линейной системы при ограниченных фазовых координатах. Обсуждаются свойства решений задачи, краевые условия для соответствующей сопряженной системы, получена дополнительная информация о множителях Лагранжа, позволяющая указать путь к сведению решений исходной многомерной задачи к минимизации функции конечного числа переменных.

§ 1. Постановка задачи. Рассматривается управляемое движение, описываемое уравнением

$$dx/dt = A(t)\,x + B(t)\,u + w(t) \tag{1.1}$$

Здесь вектор x — n-мерен, управление u — r-мерно, матрицы $A(t)$, $B(t)$ и n-вектор возмущений $w(t)$ — непрерывные.

Задача 1.1. Заданы: система (1.1), краевые условия $x(t_\alpha) = x_\alpha$, $x(t_\beta) = x_\beta$ и ограничения

на управление $u \in U$

$$\operatorname{vrai}\max_t |u_j(t)| \leqslant \nu_j, \quad t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.2}$$

на координаты $x(t) \in X(t)$

$$|x_k(t)| \leqslant f_k(t) \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{1.3}$$

Функции $f_k(t)$ — абсолютно непрерывные, положительные. Систему (1.1) требуется перевести из x_α в x_β за минимальное время $t_\beta^0 - t_\alpha$ при ограничениях (1.2), (1.3).

§ 2. Условия разрешимости. Принцип максимума. Результат этого параграфа справедлив при любых замкнутых выпуклых ограничениях $u \in U$, $x \in X$ на мгновенные значения управлений и первых m координат, если только нуль есть внутренняя точка U, X.

Пусть t_β фиксировано. Рассмотрим следующую счетную проблему моментов:

$$\begin{aligned} &\int h_j(t_\beta, \tau)\, u(\tau)\, d\tau = c_{j\beta} && (j = 1, \ldots, n) \\ &\int h_k(t_i, \tau)\, u(\tau)\, d\tau + z_k^{(i)} = c_{ki} && (k = 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{2.1}$$

при

$$u \in U, \quad z^{(i)} \in Z(t_i) \qquad (Z = -X) \tag{2.2}$$

Здесь $\{t_i\}$ — всюду плотное на отрезке [1] $[t_\alpha, t_\beta]$ множество точек (например, вида $t_\alpha + i(N)(t_\beta - t_\alpha)2^{-N}$, где $i(N) \leqslant 2^N$, $N = 1, 2, 3, \ldots$); функции $h_j(t, \tau)$ означают j-е строки $n \times r$-матрицы

$$h(t, \tau) = S(\tau, t)B(\tau)$$

$$(dS(\tau, t)\,/\,dt = -S(\tau, t)A(\tau), \qquad S(t, t) = E)$$

причем $h_j(t, \tau) \equiv 0$, если $\tau \geqslant t$, числа c_{ki} суть компоненты вектора

$$c(t_i) = -S(t_\alpha, t_i)x_\alpha - \int_{t_\alpha}^{i} S(\tau, t_i)w(\tau)\,d\tau$$

$$c_{k\beta} = c_k(t_\beta), \quad \Big(\sum_k c_{k\beta}^2 \neq 0\Big), \qquad z^{(i)} = -x(t_i)$$

Проблема моментов (2.1) — (2.3) известным образом [1] связана с исходной задачей 1.1. Именно, оптимальное по быстродействию управление задачи 1.1 есть как раз решение (2.1), (2.2) для наименьшего из t_β, при которых проблема разрешима.

Условия разрешимости проблемы (2.1), (2.2) можно получить методами функционального анализа. Действительно, положим

$$\gamma[h] = \max_u hu(u \in U, h \in R_n) \tag{2.3}$$

$$\gamma_1[l(t_i)] = \max_z l(t_i)z \ (z \in Z(t_i)) \tag{2.4}$$

Проблему (2.1) — (2.3) можно тогда рассматривать как задачу о построении линейной операции (u, z) на элементах $h_j(t_\beta, \tau)$, $h_k(t_i, \tau)$ r-векторного пространства L_2 и элементах $e^{(i)} = \{e_j^{(i)}, j = 1, \ldots, N, \ldots\}$ ($e_j^{(i)} = (0, \ldots, 0)$, если $i \neq j$; $e_j^{(i)} = (0, \ldots, E, 0, \ldots, 0)$, если $i = j$) m-векторного пространства l_2. В силу замкнутости и выпуклости множества функций $u(t)$ из L_2, стесненных ограничением $u \in U$, и векторов $\{z^{(i)}\}$ из l_2, удовлетворяющих (2.2), ограничения (2.2) можем заменить неравенствами [1,2]

$$\int h(t)u(t)\,dt \leqslant \int \gamma[h(t)]\,dt = p[h] \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(t_i)z^{(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_1[l(t_i)] = p_1[l] \tag{2.6}$$

Эти неравенства должны выполняться при любых h из L_2 и любых $l^{(i)}$ из l_2. Таким образом, искомая операция (u, z) мажорируется сублинейным функционалом $(p[h], p_1[l])$. Значит, может быть применена теорема Хана — Банаха [2], и, следовательно, необходимые и достаточные условия разрешимости проблемы моментов сводятся, согласно известной процедуре [3], к тому, чтобы при любом конечном наборе Ω_N векторов $l^{(i)}$ и

[1] Условимся здесь для всего дальнейшего изложения, что если пределы интегрирования не указаны, то нижним пределом предполагается левый конец t_α отрезка $[t_\alpha, t_\beta]$, а верхним пределом — правый конец t_β этого отрезка. В других случаях пределы будут указаны.

любом n-векторе $\{l_j\}$ выполнялось неравенство

$$\int \gamma \left[\sum_{j=1}^{n} l_j h_j (t_\beta, \tau) + \sum_{\Omega_{N,k}} l_k^{(i)} h_k (t_i, \tau) \right] d\tau + \\ + \sum_{\Omega_N} \gamma_1 [l^{(i)}] - \sum_{j=1}^{n} l_j c_{\beta j} - \sum_{\Omega_{N,k}} l_k^{(i)} c_{ki} \geqslant 0 \tag{2.7}$$

При помощи интеграла Стилтьеса [4] и непрерывных справа вектор-функций $\Lambda = \{\Lambda_k (t)\}$ с ограниченной вариацией можем записать (2.7) в эквивалентной форме в виде неравенства

$$\int \gamma \left[\sum_{j=1}^{n} l_j h_j (t_\beta, \tau) + \sum_{k=1}^{m} \int_{\tau}^{t_\beta} h_k (t, \tau) \, d\Lambda_k (t) \right] d\tau + \\ + \int \gamma_1 [d\Lambda] - \sum_{j=1}^{n} l_j c_j (t_\beta) - \int \sum_{k=1}^{m} c_k (t) \, d\Lambda_k (t) \geqslant 0 \tag{2.8}$$

Для разрешимости задачи (2.1), (2.3) необходимо и достаточно, чтобы неравенство (2.8) было справедливо при любом векторе l и при любой m-векторной функции $\Lambda (t)$ с ограниченной вариацией. Здесь

$$\int \gamma_1 [d\Lambda] = \sup \sum_{i=1}^{M-1} \gamma_1 [\Lambda (t_{i+1}) - \Lambda (t_i)]$$

по всевозможным конечным разбиениям $t_\alpha = t_1 < \ldots < t_M = t_\beta$ промежутка $[t_\alpha, t_\beta]$. Достаточность условия (2.8) с очевидностью вытекает из (2.7). Необходимость условия (2.8) устанавливается рассуждением от противного с учетом возможности аппроксимировать любую функцию $\Lambda (t)$ с ограниченной вариацией соответствующим образом подобранной кусочно-постоянной функцией. Интегралы

$$\int \gamma [\ \ ] \, d\tau, \qquad \int \gamma_1 [d\Lambda]$$

обязательно неотрицательны, так как U, X содержат нуль в качестве внутренней точки. Но тогда из (2.8) вытекает эквивалентное условие

$$\nu = \inf_{l, \Lambda} \left\{ \int \gamma \left[\sum_{j=1}^{n} l_j h_j (t_\beta, \tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\tau}^{t_\beta} \sum_{k=1}^{m} h_k (t, \tau) \, d\Lambda_k (t) \right] d\tau + \int \gamma_1 [d\Lambda] \right\} = \inf_{l, \Lambda} \Psi (l, \Lambda) \geqslant 1 \tag{2.9}$$

при

$$\sum_{j=1}^{n} l_j c_{\beta j} + \int \sum_{k=1}^{m} c_k (t) \, d\Lambda_k (t) = 1 \tag{2.10}$$

Заметим сразу, что inf в (2.10) достигается непременно на ненулевом элементе $\eta = (l^\circ, \Lambda^\circ (t))$. Действительно, рассмотрим минимизирующую последовательность $l^{(N)}$ $\Lambda^{(N)}(t)$. Полагая c $(t_\beta) \neq 0$, видим, что ν — величина конечная. Подставляя

$\eta^{(N)} = (l^{(N)}, \Lambda^{(N)})$ в левую часть (2.9), найдем числа ν_N, причем $\nu_N \to \nu$, Отсюда получаем сразу, что функции $\Lambda_k^{(N)}(t)$ равномерно ограничены по норме: $\operatorname{var} \Lambda_k^{(N)}(t) \leqslant k_1$ для всех $N \geqslant N_0$, $k = 1, \ldots, m$, в силу ограниченности величины

$$\int \gamma_1 [d\Lambda^{(N)}]$$

Предположим теперь, что функции $h_j(t_\beta, \tau)$ — линейно независимые. Такое предположение весьма естественно для задачи об управлении по всем координатам. Оно эквивалентно условию управляемости [1] системы (1.1). В данном предположении справедливо свойство

$$\int \gamma \left[\sum_{j=1}^{n} l_j h_j(t_\beta, \tau) \right] d\tau \to \infty$$

если евклидова норма $\| l \| \to \infty$. Из свойства сходимости $\nu_N \to \nu$ и ограниченности функций $\Lambda^{(N)}$ вытекает теперь, что множество $l^{(N)}$ — ограниченное: $\| l^{(N)} \| \leqslant k_2$, если $N \geqslant N_0$. В силу компактности сферы в конечномерном пространстве R_n и слабой компактности сферы в пространстве функций с ограниченной вариацией (см. теоремы Хелли в [4]) можем (сохраняя прежние обозначения) выделить подпоследовательность $\eta^{(N)} = (l^{(N)}, \Lambda^{(N)}(t))$, сходящуюся ($N \to \infty$) к элементу $\eta^\circ = (l^\circ, \Lambda^\circ(t))$, таким образом, что $l^{(N)} \to l^\circ$ по норме и $\Lambda^{(N)} \to \Lambda^\circ$ в смысле слабой сходимости (или, как говорят, «в основном»). При этом условие (2.10) сохранится и для предельного элемента, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} l_j^\circ c_j(t_\beta) + \int \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\, d\Lambda_k^\circ(t) = 1 \tag{2.11}$$

По виду подынтегральных функций выражения (2.9) устанавливаем, что $\nu = \Psi(l^\circ, \Lambda^\circ(t))$ (рассуждения здесь аналогичны изложенным в работе [5]), в частности, имеет место соотношение

$$\int \gamma_1 [d\Lambda^{(N)}] \to \int \gamma_1 [d\Lambda^\circ]$$

Отсюда с учетом (2.11) и вытекает, что минимизирующий элемент из (2.9) — ненулевой. Данное свойство остается справедливым и в том случае, если функции $h_j(t_\beta, \tau)$ — линейно зависимы, но вектор $c(t_\beta)$ таков, что исходная задача разрешима в отсутствие ограничений на координаты (см., например, [1], § 15).

Пусть задача 1.1 разрешима при некотором t_β и $\nu[t_\alpha, t_\beta] \geqslant 1$. При $t_\beta = t_\alpha$ имеем $\nu[t_\alpha, t_\alpha] = 0$.

Вследствие непрерывности $\nu[t_\alpha, t_\beta]$ по t_β существует наименьшее число t_β°, когда $\nu[t_\alpha, t_\beta^\circ] = 1$. Оно и доставляет решение задачи 1.1

Задачу (2.9), (2.10) можем переписать в иных обозначениях. Именно, полагая (см. примечание 2.1).

$$ds(t) = -s(t)A(t)\,dt + d\Lambda(t) \tag{2.12}$$

$$s_\beta = s(t_\beta), \qquad \Lambda_i(t) = \text{const}, \quad \text{если } i > m, \quad s(t_\alpha) = s_\alpha$$

получим вместо (2.9) условие

$$\min_{s(t)} \left\{ \int \gamma [s(t) B(t)]\, dt + \int \gamma_1 [d\Lambda] \right\} = 1 \tag{2.13}$$

Здесь минимум берется по всем движениям сопряженной системы (2.12), стесненным равенством

$$s_\beta x_\beta - s_\alpha x_\alpha + \int s(t)\, w(t)\, dt = 1 \tag{2.14}$$

Минимальное движение $s^\circ(t)$, доставляющее экстремум (2.13) при условии (2.14), будет, естественно, тем, которое определяется по вектору $s_\beta{}^\circ = l^\circ$ и по функции $\Lambda^\circ(t)$, образующих экстремальный элемент (2.9), (2.10).

При помощи (2.3), (2.4) находим непосредственно, что равенство в (2.13) достигается на управлении $u^\circ(t)$, удовлетворяющем принципу максимума

$$\int s^\circ(t)\, B(t)\, u^\circ(t)\, dt = \max_u \int s^\circ(t)\, B(t)\, u(t)\, dt \qquad (u \in U) \tag{2.15}$$

или

$$s^\circ(t)\, B(t)\, u^\circ(t) = \max_u s^\circ(t)\, B(t)\, u(t) \qquad (u \in U) \tag{2.16}$$

и траектории $x^\circ(t)$, удовлетворяющей условию максимума

$$-\int x^\circ(t)\, d\Lambda^\circ(t) = \max_x \int x(t)\, d\Lambda^\circ(t) \qquad (x(t) \in Z(t)) \tag{2.17}$$

Суммируя сказанное, получаем утверждение.

Теорема 2.1. Задача 1.1 будет разрешимой в том и только в том случае, если на движениях $s(t)$ сопряженной системы (2.12), стесненных равенством (2.14), удовлетворяется условие (2.13), где γ, γ_1 определены согласно (2.3), (2.4). Оптимальное управление $u^\circ(t)$ удовлетворяет принципу максимума (2.15) (или (2.16)) на минимальном движении задачи (2.13), (2.14). Оптимальная траектория удовлетворяет условию максимума (2.17) на функции $\Lambda^\circ(t)$, порождающей вместе с краевым условием $s_\beta{}^\circ$ минимальное движение $s^\circ(t)$.

Заметим, что в рассмотренной задаче принцип максимума будет содержательным тогда, когда $h^\circ = s^\circ(t)\, B(t) \not\equiv 0$ на $[t_\alpha, t_\beta]$. Данное условие обсуждается ниже в § 3.

Если функция $\Lambda^\circ(t)$ — абсолютно непрерывная, будем говорить о регулярном случае в задаче 1.1, в противном случае задачу будем называть нерегулярной.

Примечание. 2.1. В регулярном случае задачи 1.1 справедливо представление $d\Lambda^\circ = \lambda^\circ(t)\, dt$. Здесь можно говорить про обычную производную $d\Lambda^\circ / dt = \lambda^\circ(t)$ функции $\Lambda^\circ(t)$. Величина $s^\circ(t)$ в данном случае непрерывная. Соотношение (2.12) является здесь обыкновенным дифференциальным уравнением

$$ds / dt = -sA(t) + \lambda(t) \tag{2.18}$$

В нерегулярном случае $d\Lambda / dt$ можно понимать лишь как обобщенную производную, а (2.18) — как равенство распределений [3,6], т. е. как некоторое обобщенное уравнение, решением которого может, в частности, оказаться уже разрывная функция $s(t)$. Высказанные замечания и следует положить в основу трактовки уравнения (2.12).

2.2. Из определения величины $\gamma_1(t)$ следует в силу (2.17), что, если $\Lambda^\circ(t)$ имеет при $t = t'$ скачок $\Lambda^\circ(t' + 0) - \Lambda^\circ(t' - 0) = \lambda$, то m-мерный вектор λ будет опорным к выпуклому множеству $X(t')$ в точке $x^\circ(t')$, лежащей на границе множества $X(t')$.

2.3. Для конкретных ограничений (1.2), (1.3) имеем

$$\gamma[h] = \sum_{j=1}^{r} \nu_j |h_j|, \qquad \gamma_1[l(t_i)] = \sum_{k=1}^{m} f_k(t_i)\, |l_k|$$

2.4. Решая задачу (2.13), (2.14), можем в правых частях соответствующих условий заменить единицу на какую-нибудь постоянную $c > 0$, выбор которой может диктоваться, например, удобством счета.

2.5. В модифицированном виде изложенная процедура остается верной и для задачи о переводе системы (1.1) за минимальное время с одного выпуклого многообразия на другое при кусочно-абсолютно непрерывных функциях $f_k(t)$.

§ 3. Свойства решений. Пусть $X'(t)$ означает множество граничных точек для $X(t)$.

Лемма 3.1. Если $x^\circ(t) \in X(t) - X'(t)$ при $t \in e$, то при $t \in e$

$$\Lambda^\circ(t) \equiv \text{const}$$

В условиях леммы справедливо неравенство

$$-\int_e x^\circ(t)\, d\Lambda^\circ(t) < \max_{z(t)\in Z(t)} \int_e x(t)\, d\Lambda^\circ(t) = \int_e \gamma_1 [d\Lambda^\circ]$$

которое вместе с (2.17) и приводит к условию $\Lambda^\circ(t) = \text{const}$ при $t \in e$. Переходя к дальнейшим рассуждениям, несколько сузим класс функций $f_i(t)$, определяющих множество $X(t)$.

Предположение 3.1. Функции $f_i(t)$ таковы, что каждое из равенств

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij}(t_\delta, t_\gamma)\, x_j(t_\gamma) \pm \int_{t_\gamma}^{t_\delta} \sum_{j=1}^{r} h_{ij}(t_\delta, \xi)\, \nu_j\, d\xi = f_i(t_\delta)$$

$$(i = 1, \ldots, m) \tag{3.1}$$

$$t_\alpha \leqslant t_\gamma \leqslant t_\delta, \qquad x_s(t_\gamma) = f_s(t_\gamma) \quad (s = 1, \ldots, m)$$

может выполняться для каждого t_γ, $x_j(t_\gamma)$ лишь на множестве значений $\{t_\delta\}$, имеющем меру нуль.

Последнее означает, грубо говоря, что никакой кусок траектории $x(t)$ системы (1.1), построенной при $u_j = \nu_j$ (или $-\nu_j$), не может целиком лежать на $X'(t)$.

Приведем в краткой форме некоторые достаточные условия, при которых предположение 3.1 выполняется.

Пусть, например, предположение 3.1 не выполняется по i-ой координате и функция $f_i(t)$ кусочно-линейная. Тогда на некотором интервале необходимо будем иметь

$$dx_i / dt = a^{(i)}x + b^{(i)}\, u = \alpha = \text{const}$$

где $u_j = \nu_j$ или $u_j = -\nu_j$, символ $a^{(i)}$ означает i-ю строку матрицы A. Пусть Q_i — матрица, составленная из i-х строк матриц $A, A^2, \ldots, A^n$. Предположим, что $a^{(i)} \neq 0$ (следовательно, $Q_i \neq 0$). Дифференцированием dx_i / dt получаем

$$Q_i x = p, \qquad Q_i A x = r \tag{3.2}$$

где n-векторы p, r определяются по формулам

$$p_1 = \alpha - b^{(i)}u, \quad p_s = -a^{(i)} A^{s-2}\, bu \quad (s = 2, \ldots, n)$$

$$r_k = -a^{(i)}A^{k-1}bu \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Пусть n-векторы $e^{(1)}, \ldots, e^{(j)}$ $(e^{(i)} = q^{(i)}A,\ j \leqslant n)$ составляют базис подпространства, натянутого на векторы $q^{(i)}A$, [7]. Для выполнения предположения 3.1 достаточно, чтобы системы (3.2) не имели общего решения. В силу свойств матриц Q_i, Q_iA для этого достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из неравенств $p^j \neq d^j$, где p^j, d^j суть коэффициенты разложения векторов p, r по базисным векторам $e^{(j)}$.

Пусть $a^{(i)} = 0$. Для выполнения предположения 3.1 достаточно, чтобы имело место неравенство $b^{(i)} u \neq \alpha$ при $u_j = \nu_j$ или $u_j = -\nu_j$. В результате получаем утверждение.

Лемма 3.2. Пусть функции $f_i(t)$ — кусочно-линейны и матрицы A, B — постоянны. Тогда для выполнения предположения 3.1 при $Q_i \neq 0$ достаточно, чтобы для коэффициентов $p_s^{(j)}$, $d^{(j)}$ разложения векторов p, r по базису $e^{(j)}$ выполнялось хотя бы одно из неравенств $p^{(j)} \neq d^{(j)}$. В противном случае (при $Q_i = 0$) достаточное условие имеет вид $b^{(i)} u \neq \alpha$.

Заметим, что условие первой части леммы выписывается особенно просто, если матрица Q_i — неособая.

Лемма 3.3. Если для системы (1.1) имеет место предположение 3.1 и выполняется хотя бы одно из равенств $|x_k^\circ(t)| = f_k(t)$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, то хотя бы для одной из компонент h_j функции $h^\circ(t) = s^\circ(t) B$ справедливо условие $h_j^\circ \equiv 0$ при $\tau_1 \leqslant t < \tau_2$.

Утверждение леммы вытекает с учетом ограничений (1.2) на управление из принципа максимума (2.16).

В дальнейшем будем предполагать, что система (1.1) вполне управляема в усиленном смысле [1]. Последнее означает, что при каждом фиксированном i система $\{h_{ij}(t_\beta, \tau)\}$ i-х компонент функций $h_j(t_\beta, \tau)$ $j = 1, \ldots, n$ — линейно независимая, причем равенство нулю каждой комбинации

$$\sum_{j=1}^{n} l_j h_{ij}(t_\beta, \tau) \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} l_i^2 \neq 0\right)$$

может иметь место лишь на множестве нулевой меры. Для стационарного случая данное условие эквивалентно линейной независимости системы векторов $\{b^{(i)}, \ldots, A^{n-1}b^{(i)}\}$ для каждого $i = 1, \ldots, r$.

Лемма 3.4. Если A, B постоянны, система (1.1) вполне управляема в усиленном смысле и хотя бы одна из функций $h_j^\circ(t)$ обращается в тождественный нуль на промежутке $\tau_1 \leqslant t < \tau_2$, то на указанном промежутке выполняется хотя бы одно из условий $|x_i^\circ(t)| = f_i(t)$.

Покажем прежде, что $s_\beta^\circ \neq 0$. Полагая $x_\alpha = 0$ (тогда $x_\beta \neq 0$), имеем $s_\beta^\circ \neq 0$ из (2.14). Пусть $x_\alpha \neq 0$, но $s_\beta^\circ = 0$. Составляя условия (2.13), (2.14), найдем

$$\min\left\{\int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ} \gamma\,[s_\alpha S(t, t_\alpha) + \int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ} d\Lambda(\xi) S(t, \xi) B] + \int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ} \gamma_1[d\Lambda]\right\} \geqslant 1 \qquad \{s(t)\} \tag{3.3}$$

при

$$s_\beta x_\beta - s_\alpha x_\alpha + \int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ} s(t)\, w(t)\, dt = 1$$

Если траектория $x^\circ(t)$ не выходит на ограничение, то $\Lambda \equiv \mathrm{const}$ и $s_\beta = s_\alpha S(t_\beta, t_\alpha) \neq 0$. Пусть $t' \leqslant t_\beta$ означает момент первого выхода на ограничение при движении от t_β к t_α. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $t' - \varepsilon \leqslant t \leqslant t' + \varepsilon$, $\Lambda^\circ(t) \neq \mathrm{const}$ и вместо (3.3) имеем

$$\min\left\{\int_{t_\alpha}^{t'}\gamma\,[s(t)B]\,dt+\int_{t_\alpha}^{t'}\gamma_1\,[d\Lambda]\right\}\geqslant 1 \qquad \{s(t)\} \tag{3.4}$$

при

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta}s(t)\,w(t)\,dt-s_\alpha x_\alpha=1$$

Соотношение (3.4) можем трактовать как условие разрешимости задачи о переводе за время $t'-t_\alpha$ системы (1.1) из x_α в начало координат. При этом экстремальным элементом задачи (3.4), доставляющим в (3.4) равенство, будет решение $s^\circ(t)$ задачи (3.3). Время $t'-t_\alpha$ в данной задаче — оптимальное. Последнее, однако, противоречит условию $\Lambda^\circ(t)\not\equiv\mathrm{const}$, $t'-\varepsilon\leqslant t\leqslant t'+\varepsilon$. Следовательно, $s_\beta^\circ\neq 0$. Аналогично устанавливается, что и $s_\alpha^\circ\neq 0$. Приступим непосредственно к доказательству леммы. Пусть $h_j^\circ(t)\equiv 0$ на промежутке $\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2$, но $x^\circ\in X(t)-X'(t)$ при $\tau_1\leqslant\tau'<t<\tau''\leqslant\tau_2$. Тогда $\Lambda^\circ\equiv\mathrm{const}$ при $\tau'<t<\tau''$. Предположим вначале, что $\Lambda^\circ(t)\equiv\mathrm{const}$ при $\tau'\leqslant t\leqslant t_\beta^\circ$. Тогда

$$h_j^\circ(t)=s_\beta^\circ S(t,t_\beta)\,b^{(j)}\equiv 0,\qquad \tau'\leqslant t\leqslant t_\beta^\circ$$

вопреки условию $s_\beta^\circ\neq 0$ и свойству усиленной управляемости. Полагая $\Lambda^\circ(t)\equiv\mathrm{const}$ при $t_\alpha\leqslant t\leqslant\tau''$, получим

$$h_j^\circ(t)=s_\alpha^\circ S(t,t_\alpha)b^{(j)}\equiv 0,\qquad t_\alpha\leqslant\tau_1<t\leqslant\tau''$$

вопреки условиям управляемости и свойству $s_\alpha^\circ\neq 0$.

Пусть, наконец, $\Lambda^\circ(t)\equiv\mathrm{const}$ при $\tau'\leqslant t<\tau''$ и $\Lambda^\circ(t)\not\equiv\mathrm{const}$ при $t<\tau'$, $\geqslant\tau''$. Имеем тогда

$$d^kh_j^\circ(t)=/\,dt^k=\gamma S(t,0)\,A^kb^{(j)}\equiv 0\qquad(k=1,\ldots,n-1) \tag{3.5}$$

Здесь

$$\gamma=s_\beta^\circ S(0,t_\beta^\circ)+\int_{\tau''}^{t_\beta^\circ}d\Lambda^\circ(\xi)\,S(0,\xi)\,d\xi$$

причем $\gamma\neq 0$. Действительно, предположив $\gamma=0$, получим вместо (3.3) задачу

$$\Phi_\alpha(\Lambda^\circ{}_\alpha)+\Phi_\beta(s_\beta^\circ,\Lambda_\beta^\circ)=\min\,[\Phi_\alpha(\Lambda_\alpha)+\Phi_\beta(s_\beta,\Lambda_\beta)]=1,\qquad\{s_\beta,\Lambda_\alpha,\Lambda_\beta\} \tag{3.6}$$

(минимум берется по всем переменным, указанным в фигурных скобках) при

$$\varphi_\alpha(\Lambda_\alpha)+\varphi_\beta(s_\beta,\Lambda_\beta)=1 \tag{3.7}$$

Здесь

$\Lambda_\alpha(\xi)=\mathrm{const}$, если $\xi\geqslant t_1$

$$\Lambda_\beta(\xi)\equiv\mathrm{const},\quad\text{если}\quad\xi<t_2$$

$$\Lambda_\beta(\xi)\not\equiv\mathrm{const},\quad\text{если}\quad t_2\leqslant\xi<t_2+\varepsilon\quad\text{при}\quad\varepsilon>0$$

$$\Phi_\alpha(\Lambda_\alpha)=\int_{t_\alpha}^{t_1}\gamma\left[\int_t^{t_1}d\Lambda_\alpha(\xi)\,S(t,\xi)\right]dt+\int_{t_\alpha}^{t_1}\gamma_1\,[d\Lambda_\alpha]$$

$$\Phi_\beta(s_\beta,\Lambda_\beta)=\int_{t_2}^{t_\beta^\circ}\gamma\left[s_\beta S(t,t_\beta)+\int_t^{t_\beta^\circ}d\Lambda_\beta(\xi)\,S(t,\xi)\right]dt+\int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ}\gamma_1\,[d\Lambda_\beta]$$

t_1, t_2 ($t_1 \leqslant \tau'$, $t_2 \geqslant \tau''$) — первые моменты выхода $x^\circ(t)$ на ограничения при движении влево от τ' или вправо от τ''

$$\varphi_\alpha(\Lambda_\alpha) = \int_{t_\alpha}^{t_1} d\Lambda_\alpha(\xi)\, w(\xi) - \int_{t_\alpha}^{t_1} d\Lambda_\beta(\xi)\, S(t_\alpha, \xi)\, x_\alpha$$

$$\varphi_\beta(s_\beta, \Lambda_\beta) = s_\beta x_\beta + \int_{t_2}^{t_\beta^\circ} d\Lambda_\beta(\xi)\, w(\xi)$$

Задача (3.6), (3.7) эквивалентна двум следующим:

$$\min \Phi_\alpha(\Lambda_a) = 1 \quad \text{при } \varphi_\alpha(\Lambda_a) = 1, \quad \{\Lambda_a\} \tag{3.8}$$

$$\min \Phi_\beta(s_\beta, \Lambda) = 1 \quad \text{при } \varphi_\beta(s_\beta, \Lambda_\beta) = 1, \quad \{s_\beta, \Lambda_b\} \tag{3.9}$$

причем

$$\Lambda_a^\circ = k_1 \Lambda_\alpha^\circ, \quad s_\beta^\circ = k_2 s_\beta^\circ, \quad \Lambda_b^\circ = k_2 \Lambda_\beta^\circ, \quad k_1 > 0, \ k_2 > 0$$

Заметим, что (3.9) доставляет условие разрешимости задачи о попадании за время $t_\beta^\circ - t_2$ из нуля в x_β. При этом время $t_\beta^\circ - t_2$ — оптимальное для данной задачи. Это противоречит свойствам функции $\Lambda_\beta^\circ(\xi)$. Таким образом, $\gamma \neq 0$ и, значит, условие (3.5) невозможно. Последнее противоречит исходному предположению о том, что $h_j^\circ(t) \equiv 0$ при $\tau_1 \leqslant t < \tau_2$. Лемма, следовательно, доказана.

Следствие 3.1. **Если система (1.1) вполне управляема в усиленном смысле и хотя бы одна из точек x_α, x_β не лежит на границе X' множества X, то каждая из функций $h_j^\circ(t)$ отлична от тождественного нуля на промежутке $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta^\circ$.**

Примечание 3.1. Лемма справедлива при любых выпуклых по x ограничениях $x(t) \in X(t)$ на координаты.

Примечание 3.2. В нестационарном варианте леммы следует потребовать, чтобы свойство усиленной управляемости было еще равномерным по t.

Примечание 3.3. Условие $h^\circ(t) \not\equiv 0$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$ существенно для обоснования сходимости дискретизированного варианта задачи 1.1 к непрерывному [5]. Обоснование упомянутого свойства, изложенное в [5] для регулярных задач, проходит и в общем случае.

Обсудим одно свойство функций $\Lambda^\circ(t)$. Предположим, что при некотором $j = 1, \ldots, s$ имеет место равенство $h_j(t) \equiv 0$, если $\tau_1 \leqslant t < \tau_2$. Иными словами

$$s^\circ(t)\, b^{(j)} \equiv 0, \qquad \tau_1 \leqslant t < \tau_2 \tag{3.10}$$

причем $s^\circ(t)$ будет решением уравнения

$$s^{\boldsymbol{\cdot}} = -sA + \lambda^\circ \tag{3.11}$$

Это уравнение согласно [6] и в соответствии с примечанием 2.1 будем понимать как равенство распределений, порожденных обобщенными производными $s^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\Lambda^{\boldsymbol{\cdot}}$ функций s, Λ, связанных уравнением (2.12). Свойство (3.10) означает тогда равенство нулю линейной ограниченной операции, порожденной распределением $s^\circ b^{(j)}$, когда эта операция совершается над бесконечно дифференцируемыми функциями φ, исчезающими вне (τ_1, τ_2): $(s^\circ b^{(j)}, \varphi) = 0$. Равенство (3.10) можем теперь (в обобщенном смысле) дифференцировать. В результате имеем

$$\frac{d^i}{dt^i}(s^\circ(t)\,b^{(j)}) = s^\circ(t)\,A^i b^{(j)}(-1)^i + \sum_{k=1}^{i}\frac{d^{k-1}\lambda}{dt^{k-1}}A^{i-k}b^{(j)}(-1)^k \equiv 0 \qquad (3.12)$$

Пусть

$$-A^{n+p-1}b^{(j)} = \sum_{q=0}^{n-1}\alpha_{jq}{}^{(p)}A^q b^{(j)} \qquad (p=1,\ldots,m) \qquad (3.13)$$

Система (3.12) ($i = 1, \ldots, n+m-1$) может быть сведена с учетом (3.13) к уравнениям относительно m-векторного распределения λ

$$\sum_{k=1}^{n+p-1}\frac{d^{k-1}\lambda}{dt^{k-1}}A^{n+p-k-1}b^{(j)}(-1)^k + \sum_{q=0}^{n-1}\alpha_{jq}{}^{(p)}\sum_{k=1}^{q}\frac{d^{k-1}\lambda}{dt^{k-1}}A^{q-k}b^{(j)}(-1)^k = 0 \qquad (3.14)$$

доставляющим необходимое и достаточное условие для выполнения (3.10), (3.11). Заменой $\lambda = P_j\xi$ с неособой матрицей P_j система (3.14) может быть приведена к виду

$$\frac{d^{n+p-2}}{dt^{n+p-2}}\xi + D^{(j)}(\xi) = 0 \qquad (3.15)$$

Здесь $D^{(j)}(\xi)$ означает стационарный линейный дифференциальный оператор порядка $n+p-3$.

Известно, однако, [6], что множество решений (3.15) в классе распределений совпадает со множеством решений (3.15) в классе обычных функций. Отсюда вытекает, что величины $\lambda^\circ(t)$ будут удовлетворять (3.10), (3.11) в том и только том случае, если они будут обычными функциями доставляющими решение системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.14). Если $h_j{}^\circ(t) \equiv 0$ при нескольких значениях j, то (3.14) следует выписать для каждого такого значения j.

Следует подчеркнуть, что система (3.14), (3.15) выписана в общем виде. При этом среди уравнений могут оказаться и зависимые. Уравнения (3.15) можно поэтому упростить (например, в случае, когда не все $x_i{}^\circ(t)$, $i = 1, \ldots, m$ достигают ограничений или когда каждый набор из n-векторов вида $A^i b^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, s$ — линейно независимый). Сведение системы (3.15) к наиболее компактной форме записи в каждом из возможных случаев сочетания m и r выходит за рамки статьи.

Отметим, что в наиболее простой форме дифференциальное уравнение для λ° получается, если $h_j{}^\circ(t) \equiv 0$ при одном j (положим $j = 1$) и на ограничение выходит лишь одна координата (положим $x_1 = f_1$). Вместо (3.14) тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d^{k-1}\lambda}{dt^{k-1}}A^{n-k}b^{(1)}(-1)^k + \sum_{q=0}^{n-1}\alpha_q\sum_{k=1}^{q}\frac{d^{k-1}\lambda}{dt^{k-1}}A^{q-k}b^{(1)}(-1)^k \equiv 0 \qquad (3.16)$$

$$-A^n b^{(1)} = \sum_{q=0}^{n-1}\alpha_q A^q b^{(1)}$$

Уравнение (3.16) имеет порядок $n-1$, если $b_1{}^{(1)} \neq 0$. В противном случае, порядок уравнения меньше $n-1$. Суммируя сказанное, получаем следующее утверждение для усиленно управляемых систем.

Лемма 3.5. Если хотя бы одна из функций $h_j^\circ(t)$ обращается в тождественный нуль на промежутке $\tau_1 \leqslant t < \tau_2$ и система (1.1) удовлетворяет предположению 3.1, то на указанном промежутке функции $\Lambda^\circ(t)$ — дифференцируемые и вектор-функция $\lambda^\circ(t) = d\Lambda^\circ / dt$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.14).

Следствие 3.2. Если в предположении 3.1 траектория $x^\circ(t)$ выходит на ограничение ($x^\circ \in X$) на конечном числе отрезков e_l ($l = 1, \ldots, N$), то справедливо разложение $\Lambda^\circ(t) = \Lambda_d^\circ(t) + \Lambda_c^\circ$, где $\Lambda_d^\circ(t)$ — кусочно-постоянная со скачками разве лишь в точках τ_l, τ_{l+1} выхода и схода с ограничений (концах отрезков e_l), $\Lambda_c(t)$ — почти всюду дифференцируемая на $[t_\alpha, t_\beta^\circ]$ функция.

Примечание 3.4. С учетом непрерывности справа функций $\lambda^\circ(t)$, $s^\circ(t)$ можем выписать соотношения, связывающие в силу уравнений (2.19), (3.14) начальные значения для l-го уравнения (3.14) с начальными значениями для p-х уравнений (3.14) ($p > l$) и с величиной s_β°

$$\frac{d^{k_l} s(\tau_l)}{dt^{k_l}} = \zeta_l^{(k)}\left(s_\beta^\circ, \frac{ds^{k_p}(\tau_p)}{dt^{k_p}}, \quad p > l\right) \tag{3.17}$$
$$k_p = 1, \ldots, n_p, \quad l = 1, \ldots, N$$

Здесь $n_p + 1$ — порядок j-го уравнения (3.14). При фиксированных τ_p уравнения (3.17) линейны относительно s_β°, $ds^{k_p}(\tau_p) / dtk_p$. Если система (3.17) невырожденная, то краевые условия для каждого из N уравнений (3.14) выражаются через s_p°, и задача (2.13), (2.14) сводится к минимизации функции n переменных. В противном случае в задаче (2.13), (2.14) кроме неизвестного вектора s_β имеется еще дополнительное конечное число неизвестных свободных параметров, по которой следует вести минимизацию. Для численной реализации описанной процедуры решения (2.13), (2.14) удобно, чтобы была известна оценка сверху числу N.

Примечание 3.5. Вывод следствия 3.5 остается справедливым, если $x^\circ(t)$ выходит на ограничение на счетном числе отрезков e_l при условии, что множество предельных точек концов τ_l, τ_{l+1} отрезков e_l имеет меру нуль.

Сформулируем необходимое условие скачка функции $\Lambda^\circ(t)$.

Лемма 3.6. Если функция $\Lambda^\circ(t)$ имеет при $t = t_1$ скачок $\Lambda^\circ(t_1 + 0) - \Lambda^\circ(t_1 - 0) = \lambda^{(1)}$, то справедливо условие

$$\lambda^{(1)} B\,(u^\circ(t_1 + 0) - u^\circ(t_1 - 0)) \geqslant 0 \tag{3.18}$$

Действительно, из (2.12) вытекает

$$s^\circ(t_1 + 0) - s^\circ(t_1 - 0) = \lambda^{(1)} \tag{3.19}$$

С другой стороны, из принципа максимума (2.16) следует

$$s^\circ(t_1 + 0)\, Bu\,(t + 0) \geqslant s^\circ(t_1 + 0)\, Bu\,(t - 0) \tag{3.20}$$

$$s^\circ(t_1 - 0)\, Bu\,(t + 0) \leqslant s^\circ(t_1 - 0)\, Bu\,(t - 0) \tag{3.21}$$

Вычитая (3.21) из (3.20), получаем с учетом (3.19) условие (3.18). Если функции $f_i(t)$ дифференцируемы, то

$$\lambda^{(1)} B\,(u^\circ(t_1 + 0) - u^\circ(t_1 - 0)) \leqslant 0$$

и (3.18) может выполняться лишь при условии [8,9] $x^{\circ}(t_1+0) = x^{\circ}(t_1-0)$ касания в точке t_1 траектории $x^{\circ}(t)$ и многообразия $x_i = f_i(t)$. В общем случае левая часть неравенства (3.18) может быть и строго положительной (см. ниже пример 4.4). Геометрическим представлением условия (3.18) может служить неравенство

$$\lambda^{(1)}(x^{\circ\cdot}(t+0) - x^{\circ\cdot}(t-0)) \geqslant 0 \tag{3.22}$$

рассматриваемое с учетом того, что вектор $\lambda^{(1)}$ — опорный к $X(t_1)$ (см. примечание 2.2). Условие (3.22) при известных множествах X, U позволяет выделять точки, подозрительные на скачок $\Lambda^{\circ}(t)$. В частности, в условиях следствия 3.5 удовлетворять (3.22) могут не все точки τ_l, τ_{l+1}.

Подводя итог этому параграфу, можем сформулировать утверждение.

Теорема 3.1. Пусть система (1.1) вполне управляема в усиленном смысле и выполняется предположение 3.1. Тогда хотя бы одна из функций $h_j^{\circ}(t) \equiv 0$ на промежутке $\tau' \leqslant t < \tau''$ в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из равенств $|x_i| \equiv f_i(t)$, $\tau' \leqslant t \leqslant \tau''$. Если $x^{\circ}(t)$ выходит на ограничение лишь на конечном множестве отрезков e_l: $\tau_l \leqslant t \leqslant \tau_{l+1}$, $l = 1, \ldots, N$, то сопряженная система (2.12) имеет вид

$$s^{\cdot}(t) = -sA + \lambda^{\circ}(t) + \sum_{j=1}^{N} (\lambda^{(l)}\delta(t-t_l) + \lambda^{(l+1)}\delta(t-t_{l+1})) \tag{3.23}$$

При этом функция $\lambda^{\circ}(t)$ на каждом промежутке $\tau_l \leqslant t < \tau_{l+1}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.14), а векторы $\lambda^{(l)}$, $\lambda^{(l+1)}$ — условию (3.18). Из решения задачи (2.13), (2.14), сводящейся здесь к минимизации функции конечного числа переменных, находятся краевые условия s_β° к системе (3.23), величины $\lambda^{\circ}(t)$, $\lambda^{(l)}$, $\lambda^{(l+1)}$, а также моменты τ_l, τ_{l+1} выхода и схода с ограничения.

На промежутках, где $h_j^{\circ}(t) \equiv 0$, оптимальные управления находятся из (2.16)

$$u_j^{\circ}(t) = \nu_j \operatorname{sign} s^{\circ}(t)\, b^{(j)}$$

Тогда по виду $h^{\circ}(t)$ можно с учетом [10] заключить, что в условиях предположения 3.1 на каждом открытом промежутке (t_1, t_2), где $h^{\circ}(t) \not\equiv 0$ (и где, следовательно, x не лежит на X'), каждая из «релейных» функций $u_j^{\circ}(t)$ может иметь не более чем n — 1-переключение. Если же $h_j^{\circ}(t) \equiv 0$, то (2.16) уже не доставляет информации для определения $u^{\circ}(t)$. Здесь приходится привлекать дополнительные соображения. В частности, решив (2.13), (2.14) и определив τ_l, τ_{l+1}, можем при помощи замены $x_i = f_i(t)$ или, если $f_i(t)$ достаточное число раз дифференцируемы, при помощи условий $d^k x_i / dt^k = f_j^{(k)}(t)$ либо непосредственно найти $u^{\circ}(t)$, либо можем привести задачу 1.1 к существенно более простому виду. Находить $u^{\circ}(t)$ можно и при помощи приема, описанного в [5].

В заключение отметим, что описанный выше подход может быть применен и для невыпуклых ограничений на $u(t)$. Здесь, однако, может возникнуть скользящий режим [11, 12], и рассуждения следует дополнить соответствующей трактовкой скользящего режима, выполненной, например, в духе [11, 13].

§ 4. *Примеры* 4.1. Управляемое прямолинейное движение в присутствии силы трения

$$x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = -x_2 + u, \quad t_\alpha = 0 \tag{4.1}$$
$$|x_2| \leqslant 1, \quad |u| \leqslant 2, \quad x_\alpha = (0,0) \quad x_\beta = (2\ln {}^4/_3 + {}^1/_2, 0)$$

Величина $t_\beta{}^\circ$ — неизвестна. При $|x_\beta| < 2$ точек, подозрительных на скачок $\Lambda^\circ(t)$, в системе нет. Поэтому сразу составляем задачу (2.13), (2.14) (4.2)

$$\min_{s_\beta, \lambda}\left\{2\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\left| s_{\beta 1}(1 - e^{-(t_\beta - \vartheta)}) + s_{\beta 2} e^{-(t_\beta - \vartheta)} + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \lambda(\xi) e^{-(\xi-\vartheta)} d\xi \right| d\vartheta + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} |\lambda|\, dt\right\} = 1$$

при $s_{\beta_1} x_{\beta_1} = c$ (для удобства счета полагаем $c = x_{\beta_1}$). Учитывая, что уравнение (3.16) имеет здесь вид $\lambda^{\cdot} = 0$, $\lambda = \text{const}$ и выписав соотношение типа (3.17)

$$s_{\beta 1}(1 - e^{-(t_\beta - \tau_1)}) + s_{\beta 2} e^{-(t_\beta - \tau_1)} + \lambda \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-(\xi - \vartheta)} d\xi = 0 \tag{4.3}$$

выражающее λ через $s_{\beta 1}$, $s_{\beta 2}$, получаем решение задачи (4.2) и далее находим

$$\tau_1 = \ln 2, \quad \tau_2 = 1 + \ln 2, \quad t_\beta{}^\circ = 1 + \ln 3, \quad s_\beta{}^\circ = (2, -1)$$
$$\lambda^\circ(t) = -2, \quad \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \quad \lambda^\circ \equiv 0, \; t \leqslant \tau_1, \; t > \tau_2$$

Оптимальное управление, удовлетворяющее принципу максимума, здесь имеет вид

$$u^\circ(t) = 2, \quad 0 \leqslant t < \tau_1, \qquad u^\circ(t) = x_2{}^\circ(t) = 1, \quad \tau_1 \leqslant t < \tau_2$$
$$u^\circ(t) = -2, \quad \tau_2 \leqslant t \leqslant t_\beta{}^\circ$$

4.2. Управляемое колебательное движение при наличии силы сопротивления

$$x_1^{\cdot} = x_2, \quad x_2^{\cdot} = -5x_1 - 2x_2 + 2u, \quad t_\alpha = 0 \tag{4.4}$$
$$|x_2| \leqslant 1, \quad |u| \leqslant 5, \quad x_\alpha = (0,0), \quad x_\beta = (1.2; 0)$$

Здесь скачок $\Lambda^\circ(t)$ может иметь место в точках (± 1.6; ± 1), (± 2.4; ∓ 1). При заданных краевых условиях величину λ° можем, однако, искать в классе кусочно абсолютно непрерывных функций. Имеем задачу

$$\min\left\{5\int_{t_\alpha}^{t_\beta{}^\circ}\left| e^{-(t_\beta{}^\circ - \vartheta)}\left[\frac{s_{\beta 1}}{2}\sin 2(t_\beta{}^\circ - \vartheta) + s_{\beta 2}(\cos 2(t_\beta{}^\circ - \vartheta) - \right.\right.\right.$$
$$\left.- \frac{1}{2}\sin 2(t_\beta{}^\circ - \vartheta)\right] + \int_{\vartheta}^{t_\beta{}^\circ}\lambda(\xi)\left[\cos 2(\xi - \vartheta) - \frac{1}{2}\sin 2(\xi - \vartheta)\right] d\xi \left| d\vartheta + \right.$$
$$\left. + \int_{t_\alpha}^{t_\beta{}^\circ} |\lambda|\, d\xi\right\} = 1, \quad \{s_\beta, \lambda\} \quad \text{при } s_{\beta_1} x_{\beta_1} = c = x_{\beta 1} \tag{4.5}$$

Уравнение (3.16) имеет здесь вид $\dot\lambda = 4\lambda$, и, значит,

$$\lambda^\circ(t) = k^\circ e^{4(t-\tau_1)} \quad \text{при } \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \; \lambda^\circ(t) \equiv 0 \quad \text{при } t < \tau_1, \; t \geqslant \tau_2$$

Составляя уравнение, аналогичное (4.3), и решая (4.5), находим

$$s_{\beta_1}{}^\circ = 1, \quad s_{\beta_2}{}^\circ = \sin 2(t_\beta{}^\circ - \tau_2) \,/\, 5\sin[2(t_\beta{}^\circ - \tau_2) - \alpha]$$
$$\cos\alpha = {}^1/_5, \quad \sin\alpha = {}^2/_5, \quad k^\circ = {}^2/_3 e^{-(t_\beta{}^\circ - \tau_2)}\csc(2t_\beta{}^\circ - 2\tau_2 - \alpha),$$
$$\tau_1 = 0.113, \quad \tau_2 = 1.163, \quad t_\beta{}^\circ = 1.222, \quad u^\circ(t) = 5, \quad 0 \leqslant t < \tau_1$$
$$u^\circ(t) = 2.5x_1{}^\circ + x_2{}^\circ, \quad \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \quad u^\circ(t) = -5, \quad \tau_2 \leqslant t \leqslant t_\beta{}^\circ$$

Задачи 4.1, 4.2, как видим, регулярны. Ниже рассматривается несколько примеров нерегулярных задач.

4.3. Даны уравнения

$$x_1^{\cdot} = x_2, \qquad x_2^{\cdot} = u \tag{4.6}$$

$$|u| \leqslant 1, \qquad |x_2| \leqslant 1 + {}^1/_2 (4.5 - t)^2 = f(t), \quad x_\alpha = (0, 0), \qquad x_\beta = ({}^{163}/_{24}, \ 0)$$

Проверяя возможность выполнения условия (3.18) в некоторой точке, видим, что такими точками будут $t_1 = 3.5$, $t_2 = 5.5$. Значит, если t_1, t_2 суть точки выхода или схода с ограничения, то можно ожидать появления скачка $\Lambda^\circ(t)$ в этих точках. Поэтому сразу ищем $\lambda^\circ(t)$ в виде

$$\lambda^\circ(t) = \lambda^{(1)}\delta(t - t_1) + \lambda^{(2)}\delta(t - t_2) + \lambda, \ \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2 \ (\lambda = \text{const})$$

так как здесь (3.16) имеет вид

$$\lambda^{\cdot}(t) = 0$$

$$\min\left\{\int_0^{t_\beta^\circ} \left| s_{\beta 1}(t_\beta^\circ - \vartheta) + s_{\beta 2} + \int_\vartheta^{t_\beta^\circ} \lambda(t)\,dt \right| d\vartheta + \int_0^{t_\beta^\circ} f(t)\,|\lambda(t)|\,dt\right\} = 1 \ \{s_\beta, \lambda\} \tag{4.7}$$

при $s_{\beta 1}x_{\beta 1} = x_{\beta 1}$. Решая полученную задачу, находим

$$\tau_1 = 3.5, \ \tau_2 = 4.5, \ t_\beta^\circ = 5.5, \ \lambda^{(1)} = -1, \ \lambda^{(2)} = 0, \ \lambda = -s_{\beta 1}^\circ, \ s_\beta^\circ = (1, -1)$$

Таким образом, функция $h^\circ(\vartheta) = s^\circ(\vartheta)\, b$ здесь разрывна:

$$h^\circ = 2.5 - \vartheta \quad (0 \leqslant \vartheta < 3.5), \qquad h^\circ \equiv 0 \quad (3.5 \leqslant \vartheta < 4.5)$$
$$h^\circ(\vartheta) = 4.5 - \vartheta \quad (4.5 \leqslant \vartheta \leqslant t_\beta^\circ = 5.5)$$

Управление $u^\circ(t)$ имеет вид

$$u^\circ(\vartheta) = 1 \ \ (0 \leqslant \vartheta < 2.5), \quad u^\circ = -1 \ \ (2.5 \leqslant \vartheta < 3.5), \quad u^\circ = 0 \ \ (3.5 \leqslant \vartheta < 4.5)$$
$$u^\circ = -1 \ [4.5, \ 5.5]$$

Заметим, что вследствие гладкости $f(t)$ здесь оптимальная траектория $x^\circ(t)$ касается ограничения X при $t = 3.5$.

4.4. Пусть в примере 4.3 непрерывное ограничение не будет гладким: $|x_2| \leqslant at + b$, причем $a = 0, b = 1$, пока $0 \leqslant t \leqslant 2$ и, далее $a > 1, b = 1 - 2a$, если $t > 2$. $x_\alpha = (0,0)$ $x_\beta = (5,0)$, $|u| \leqslant 1$. Здесь единственная точка, подозрительная на скачок $\Lambda^\circ(t)$, отвечает $t_1 = 2$. Решая задачу (4.7) при $f(t) = at + b$, тогда полагаем $\lambda^\circ = \lambda^{(1)}\delta(t - t_1) + \lambda\ (\lambda = \text{const})$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$. В результате получаем $s_\beta^\circ = (1, -2)$, $\lambda^{(1)} = -1$, $\lambda = -s_\beta^{\ \circ}$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2 = t_2$ и далее $t_\beta^\circ = 5$

$$s^\circ(t)\, b = 1 - t, \qquad u^\circ(t) = 1 \qquad (0 \leqslant t < 1)$$
$$s^\circ(t)\, b = 0, \qquad u^\circ(t) = 0 \qquad (1 \leqslant t < 2)$$
$$s^\circ(t)\, b = 3 - t, \qquad u^\circ(t) = \operatorname{sign} s^\circ(t)\, b \qquad (2 \leqslant t \leqslant 5)$$

т. е.

$$u^\circ = 1 \qquad (2 \leqslant t < 3), \quad u^\circ = -1 \ \ (3 \leqslant t \leqslant 5)$$

В данном примере $x^\circ(t)$ не касается ограничения X при $t_2 = \tau_2$. Как и $f(t)$, траектория $x^\circ(t)$ при $t = 2$ недифференцируема.

4.5. Пусть теперь предположение 3.1 не выполнено; для системы $x_1^{\cdot} = x_2$, $x_2^{\cdot} = u$, $|u| \leqslant 1$ дано условие $|x_2| \leqslant f(t)$, где $f(t) = 5 - t$ при $0 \leqslant t \leqslant 3$ и $f(t) = 2 + t$ при $t > 3$, $x_\alpha = (0, 0), x_\beta = (7,0)$. Имеем задачу, аналогичную (4.7). Однако здесь нельзя воспользоваться уравнением (3.16), так как на ограничении здесь не обязательно $h^\circ(t) \equiv 0$. Величину (обобщенную функцию) $\lambda^\circ(t)$ следует искать непосредственно из минимизации выражения вида (4.7). В результате находим

$$s_\beta^\circ = (1, -2), \quad \lambda^\circ(t) = -2\delta(t - 3), \ t_\beta^\circ = 6$$
$$h^\circ(t) = 2 - t \qquad (0 \leqslant t < 3), \qquad h^\circ(t) = 4 - t \qquad (3 \leqslant t \leqslant 6)$$
$$u^\circ(t) = 1, \qquad (0 \leqslant t < 2, \ 3 \leqslant t < 4)$$
$$u^\circ(t) = -1, \qquad (2 \leqslant t < 3, \ 4 \leqslant t < 6)$$

4.6. Рассмотрим снова уравнения (4.6), то уже при ограничениях $|u| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant f(t)$, где функция $f(t)$ определена следующим образом: задана функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 3 - t - 2^{1-n}, & (1 - 2^{1-n} \leqslant t \leqslant 1 - 2^{-n} - 2^{-n-1}) \\ t - 1 + 2^{1-n}, & (1 - 2^{1-n} - 2^{-n-1} \leqslant t \leqslant 1 - 2^{-n}) \\ 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}$$
$$(n = 1, \ldots, N, \ldots)$$

Далее непрерывная функция $f(t)$ определяется так, чтобы $f(t) > \varphi(t)$ при $1 - 2^{1-n} - 2^{-n-2} < t < 1 - 2^{1-n} + 2^{-n-2}$ и $f(t) = \varphi(t)$ в остальных точках. Краевые условия примем следующие: $x_\alpha = (0,0)$, $x_\beta = (0, {}^{33}/_{12})$. Снова минимизируя выражение вида (4.7) при условии $s_{\beta_1} = 1$, находим

$$t_\beta{}^\circ = 3, \quad s_{\beta 1}{}^\circ = 1, \quad s_{\beta 2}{}^\circ = -1, \quad \lambda^\circ(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta(t - t_i)$$
$$\alpha_i = 2^{-i}, \; t_i = 1 - 2^{-i} - 2^{-i-1}$$

Вычисляя величину $h^\circ(t)$ (которая здесь всюду отлична от тождественного нуля), находим

$$u^\circ(t) = 1, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1, \; 1 - 2^{-(n-1)} - 2^{-(n+1)} \leqslant t < 1 - 2^{-n})$$
$$u^\circ(t) = -1, \qquad (2 \leqslant t \leqslant 3, \; 1 - 2^{-(n-1)} \leqslant t \leqslant 1 - 2^{-n} - 2^{-(n-1)})$$

В данном примере движение $x^\circ(t)$ выходит на ограничение бесконечное число раз и функция $\Lambda^\circ(t)$ имеет счетное множество скачков. Оптимальное управление находится всюду из принципа максимума. Последнее объясняется, в частности, тем, что здесь не выполнено предположение 3.1.

В заключение заметим, что решение задач с бесконечным числом выходов на ограничение уже, как правило, не сводится к минимизации функций конечного числа переменных, хотя изложенная процедура § 2 остается верной и для таких задач. Основная трудность заключается здесь в определении минимизирующего элемента из (2.13), (2.14).

Поступила 5 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
2. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Иосида К. Функциональный анализ. М., «Мир», 1967.
4. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, 1957.
5. Куржанский А. Б., Осипов Ю. С. К задаче об управлении с ограниченными фазовыми координатами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
8. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Некоторые оптимальные задачи для линейных систем. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 12.
9. Хрусталев М. М. О достаточных условиях оптимальности в задачах с ограничениями на фазовые координаты. Автоматика и телемеханика, 1967, т. 28, № 4.
10. Гамкрелидзе Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, т. 22, № 4.
11. Гамкрелидзе Р. В. О скользящих оптимальных режимах. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 6.
12. Кротов В. Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, II. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 5.
13. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Расширения вариационных задач. Тр. Моск. матем. о-ва, 1968, т. 18.