Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Л. А. Фильштинский

(Новосибирск)

При решении краевых задач вообще и краевых задач теории пологих оболочек, в частности, необходимо располагать набором специальных решений уравнений этой теории: будь то фундаментальное решение или полная система частных решений, приспособленных для рассматриваемой области. Именно в силу этого обстоятельства подавляющее большинство различных частных результатов, полученных за последние годы, относится либо к сферической, либо к цилиндрической оболочке, т. е. к тем оболочкам, для которых известны полные системы частных решений (см., например, [1,2]).

Общие представления решений уравнений теории пологих оболочек, когда коэффициенты, входящие в эти уравнения — аналитические функции координат, получены И. Н. Векуа [3]. Ядра в представлениях И. Н. Векуа определяются как решения некоторых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра. Если коэффициенты в уравнениях теории пологих оболочек принять постоянными [4], то анализ несколько упрощается.

Для этого случая можно указать схему преобразований, которая естественным образом приводит решение к представлениям (1.2) типа И. Н. Векуа, причем ядра, входящие в них, будут определяться в явном виде.

Ниже на основании этих соображений строятся различные полные системы решений, а также фундаментальное решение уравнений теории пологих оболочек.

1. Уравнения теории пологих оболочек можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - 2\delta \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \zeta} - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = f(z, \zeta) \tag{1.1}$$

$$F = F_1 + iF_2, \quad F_1(z, \zeta) = U(x, y), \quad F_2(z, \zeta) = \frac{1}{\varepsilon^*} w(x, y)$$

$$z = \xi + i\eta = \frac{\beta\sqrt{i}}{a}(x + iy), \quad \zeta = \xi - i\eta = \frac{\beta\sqrt{i}}{a}(x - iy), \quad \beta = \frac{\sqrt{\varepsilon(1-\alpha)}}{4}$$

$$\varepsilon = \frac{a^2}{Rh}\sqrt{12(1-\mu^2)}, \quad \varepsilon^* = \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2}, \quad \alpha = \frac{R}{R_1}, \quad |\alpha| \leqslant 1, \quad \delta = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

Здесь R, R_1, h и a — главные радиусы кривизны оболочки, толщина и характерный линейный размер; E, μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; U, w—функция напряжений и прогиб в срединной поверхности; $f(z, \zeta)$ — правая часть в уравнении (1.1), под которой можно понимать величину, пропорциональную нагрузке или температурному члену; x и y— декартовы координаты на поверхности оболочки.

Можно показать, что общее представление всех регулярных решений уравнения (1.1) при $f(z, \zeta) = 0$ имеет вид

$$F(z, \zeta) = \varphi_0(z)\operatorname{ch}(\zeta - \xi_0) + \psi_0(\zeta)\operatorname{ch}(z - z_0) - \tag{1.2}$$

$$- \sum_{k=0}^{1} \int_{z_0}^{z} \varphi_k(t) \frac{\partial}{\partial t} G_k(z - t, \zeta - \zeta_0)\, dt - \sum_{k=0}^{1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \psi_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} G_k(z - z_0, \zeta - \tau)\, d\tau$$

Здесь $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(\zeta)$ — произвольные аналитические функции своих аргументов

$$G_1(z-t, \zeta-\tau) = G_1(\zeta-\tau, z-t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^{k+1}}{(k+1)!} g_k(\zeta-\tau)$$
$$G_0(z-t, \zeta-\tau) = G_0(\zeta-\tau, z-t) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} G_1(z-t, \zeta-\tau) \qquad (1.3)$$

Функции $g_k(\zeta)$ могут быть представлены в различной форме.

а. В виде рекуррентных соотношений

$$g_{2k+2}(\zeta) = \operatorname{sh}\zeta + \int_0^{\zeta} \operatorname{sh}(\zeta-\tau)\{2\delta g'_{2k+1}(\tau) + g''_{2k}(\tau)\}\,d\tau \qquad (k=0, 1, \ldots)$$
$$g_{2k+3}(\zeta) = \int_0^{\zeta} \operatorname{sh}(\zeta-\tau)\{2\delta g'_{2k+2}(\tau) + g''_{2k+1}(\tau)\}\,d\tau \qquad (1.4)$$
$$g_0(\zeta) = \operatorname{sh}\zeta, \qquad g_1(\zeta) = \delta\zeta \operatorname{sh}\zeta$$

б. В виде рядов

$$g_{2k}(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2s+1}}{(2s+1)!} a_{k,s}, \qquad a_{k,s} = (k+s)! \sum_{j=0}^{\min(k,s)} \frac{(2\delta)^{2j}}{(k-j)!\,(s-j)!\,(2j)!} \qquad (1.5)$$
$$g_{2k+1}(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2s+2}}{(2s+2)!} b_{k,s}, \qquad b_{k,s} = (k+s+1)! \sum_{s=0}^{\min(k,s)} \frac{(2\delta)^{2j+1}}{(k-j)!\,(s-j)!\,(2j+1)!}$$

в. В виде произведений экспонент на полиномы

$$g_k(\zeta) = e^{\zeta} P_k(\zeta) + e^{-\zeta} Q_k(\zeta) \qquad (1.6)$$

Здесь $P_k(\zeta)$ и $Q_k(\zeta)$ — известные полиномы от ζ степени k.

Ряды (1.3) абсолютно сходятся при любых конечных z и ζ.

Если правая часть $f(z, \zeta)$ в (1.1) отлична от нуля, то в формуле (1.2) появляется слагаемое [3]

$$F^*(z, \zeta) = \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} G_1(z-t, \zeta-\tau) f(t, \tau)\,d\tau \qquad (1.7)$$

В силу самосопряженности уравнения (1.1) ядра G_0 и G_1 будут решениями этого уравнения по аргументам z, ζ и t, τ. G_1 — функция Римана данного уравнения.

Ядра $G_0(z, \zeta)$ и $G_1(z, \zeta)$ можно выразить через контурные интегралы. Эти формулы имеют вид

$$G_k(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p\zeta} G_k^*(p, z)\,dp, \qquad \operatorname{Re} c > 1 \qquad (k=0, 1)$$
$$G_1^*(p, z) = \frac{1}{2pq}\left\{\exp\left[\frac{pz(\delta+q)}{p^2-1}\right] - \exp\left[\frac{pz(\delta-q)}{p^2-1}\right]\right\} \qquad (1.8)$$
$$G_0^*(p, z) = p\frac{\partial}{\partial z} G_1^*(p, z), \qquad q = \sqrt{p^2+\delta^2-1}$$

2. Введем в рассмотрение функции

$$\Phi(z,\zeta)=\overset{\circ}{L}_{z,\zeta}\{\varphi(z)\}=\varphi(z)\operatorname{ch}(\zeta-\zeta_0)-\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\partial}{\partial t}G_0(z-t,\zeta-\zeta_0)\varphi(t)\,dt$$

$$\Phi^*(z,\zeta)=\overset{\circ}{L}_{\zeta,z}\{\varphi^*(\zeta)\}=\varphi^*(\xi)\operatorname{ch}(z-z_0)-\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{\partial}{\partial\tau}G_0(z-z_0,\zeta-\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau$$

$$\Psi(z,\zeta)=L^1_{z,\zeta}\{\psi(z)\}=-\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\partial}{\partial t}G_1(z-t,\zeta-\zeta_0)\psi(t)\,dt \tag{2.1}$$

$$\Psi^*(z,\zeta)=L^1_{\zeta,z}\{\psi^*(\zeta)\}=-\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{\partial}{\partial\tau}G_1(z-z_0,\zeta-\tau)\psi^*(\tau)\,d\tau$$

Здесь $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi^*(\zeta)$ и $\psi^*(\zeta)$ — произвольные аналитические функции своих аргументов.

Из (2.1) следует, что имеют место соотношения

$$\overset{\circ}{L}_{z,\zeta}=\frac{\partial^2}{\partial z\partial\zeta}L^1_{z,\zeta},\qquad \overset{\circ}{L}_{\zeta,z}=\frac{\partial^2}{\partial z\partial\zeta}L^1_{\zeta,z} \tag{2.2}$$

Каждая из введенных в (2.1) функций будет решением уравнения (1.1) при $f(z,\zeta)=0$. Общее решение последнего в силу (1.2) можно представить в виде

$$F(z,\zeta)=\Phi(z,\zeta)+\Phi^*(z,\zeta)+\Psi(z,\zeta)+\Psi^*(z,\zeta) \tag{2.3}$$

Построим теперь некоторые полные системы частных решений однородного уравнения (1.1). Пусть

$$\varphi(z)=\psi(z)=\frac{(z-z_0)^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)},\qquad \varphi^*(\zeta)=\psi^*(\zeta)=\frac{(\zeta-\zeta_0)^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \tag{2.4}$$

Причем будем предполагать пока, что $\operatorname{Re}\gamma>-1$.

Имеем на основании (2.1)

$$\Phi_\gamma(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\overset{\circ}{L}_{z,\zeta}\left\{\frac{(z-z_0)^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}\right\},\qquad \Psi_\gamma(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=L^1_{z,\zeta}\left\{\frac{(z-z_0)^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}\right\} \tag{2.5}$$

$$\Phi_\gamma^*(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\Phi_\gamma(\zeta-\zeta_0,z-z_0)$$

$$\Psi_\gamma^*(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\Psi_\gamma(\zeta-\zeta_0,z-z_0)$$

Реализуя первые два из операторов в (2.5) и учитывая формулу

$$\int\limits_{z_0}^{z}\frac{(z-t)^k(t-z_0)^\gamma}{\Gamma(k+1)\Gamma(\gamma+1)}dt=\frac{(z-z_0)^{k+\gamma+1}}{\Gamma(k+\gamma+2)} \tag{2.6}$$

получаем

$$\Phi_\gamma(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{k+\gamma}}{\Gamma(k+\gamma+1)}g_k'(\zeta-\zeta_0)$$

$$\Psi_\gamma(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{k+\gamma+1}}{\Gamma(k+\gamma+2)}g_k(\zeta-\zeta_0) \tag{2.7}$$

Остальные решения определены в (2.5).

Формулы (2.7) дают, очевидно, аналитическое продолжение решений на всю плоскость параметра γ, за исключением точек $\gamma=-1,-2,\ldots$. В этом последнем случае получаем, учитывая, что гамма функция Эйлера

$$\Gamma(-n) = \infty, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

$$\Phi_{-n}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} g'_{k+n}(\zeta - \zeta_0) = \frac{\partial^n}{\partial z^n} G_0(z - z_0, \zeta - \zeta_0)$$

$$\Psi_{-n}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} g_{k+n-1}(\zeta - \zeta_0) = \frac{\partial^n}{\partial z^n} G_1(z - z_0, \zeta - \zeta_0) \tag{2.9}$$

$$\Phi_{-n}^* (z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \Phi_{-n} (\zeta - \zeta_0, z - z_0), \Psi_{-n}^* (z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \Psi_{-n} (\zeta - \zeta_0, z - z_0)$$

$$g_{-1}(\zeta) \equiv 0$$

Последний результат вполне естественен, так как операторы (2.5) представляют собой, как легко заметить, дробные интегралы порядка γ от соответствующих ядер. При $\gamma = n$ $(n = 1, 2 \ldots)$ мы имеем n-кратные интегралы, при $\gamma = -n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — производные n-го порядка от ядер.

Функции (2.5) будем называть обобщенными степенями, так как операторы в (2.5) отображают степенные аналитические функции (2.4) в решения уравнения (1.1). Это определение оправдывается также тем обстоятельством, что обобщенные степени Φ_n и Ψ_n имеют в точке $z = z_0, \zeta = \zeta_0$ нуль кратности n и $n + 2$ соответственно.

При $\gamma = 0$ видим, что обобщенными постоянными будут сами ядра

$$\Phi_0 (z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \Phi_0^* (z - z_0, \zeta - \zeta_0) = G_0 (z - z_0, \zeta - \zeta_0) \tag{2.10}$$

$$\Psi_0 (z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \Psi_0^* (z - z_0, \zeta - \zeta_0) = G_1 (z - z_0, \zeta - \zeta_0)$$

Определенные выше обобщенные степени будут регулярными решениями уравнения (1.1) в любой конечной односвязной области D, D^* $(z \in D, \zeta \in D^*)$.

3. Ниже потребуются функции

$$\Phi_{-n,\psi}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} \psi(k + 1) g'_{k+n}(\zeta - \zeta_0)$$

$$\Psi_{-n,\psi}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{k!} \psi(k + 1) g_{k+n-1}(\zeta - \zeta_0) \tag{3.1}$$

$$\Phi^*_{-n,\psi}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \Phi_{-n,\psi}(\zeta - \zeta_0, z - z_0),$$

$$\Psi^*_{-n,\psi}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \Psi_{-n,\psi}(\zeta - \zeta_0, z - z_0)$$

$$\psi(k + 1) = -C + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}$$

Здесь $-C = \psi(1)$ — постоянная Эйлера. Функции (3.1) аналитичны по z, ζ в любой ограниченной области D, D^*.

Построим теперь частные решения уравнения (1.1), имеющие в некоторой точке особенность типа логарифма или полюса заданного порядка.

Для этого введем частные решения по формулам

$$\begin{gathered}\Theta\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=L_{z,\zeta}{}^{\circ}\,\{\ln\,(z-z_0)\}\\ \Xi(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=L_{z,\zeta}{}'\,\{\ln\,(z-z_0)\}\\ \Theta^*\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\Theta\,(\zeta-\zeta_0,z-z_0)\\ \Xi^*\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\Xi\,(\zeta-\zeta_0,z-z_0)\end{gathered}\tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}\Theta_{-n}\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=L_{z,\zeta}{}^{\circ}\,\{\varphi\,(z)\},\Xi_{-n}\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=L^1{}_{z,\zeta}\,\{\varphi\,(z)\}\\ \Theta_{-n}{}^*\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\theta_{-n}\,(\zeta-\zeta_0,z-z_0)\\ \Xi_{-n}{}^*\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\Xi_{-n}\,(\zeta-\zeta_0,z-z_0)\end{gathered}\tag{3.3}$$

где

$$\varphi(z)=\frac{(-1)^{n+1}\,(n-1)!}{(z-z_0)^n}\quad(z\neq z_0),\qquad\varphi\,(z)=0\quad(z=z_0)$$

Формулы (3.2) определяют обобщенные логарифмы, формулы (3.3) дают обобщенные отрицательные степени. Вычислим обобщенный логарифм $\Xi\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)$. На основании (1.3) и формулы бинома имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}G_1(z-t,\zeta-\zeta_0)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_k(\zeta-\zeta_0)}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j\,(z-z_0)^{k-j}\,(t-z_0)^j\\ C_k^j=k!\,/\,j!\,(k-j)!\end{gathered}\tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в третью из формул (2.1) и выполняя интегрирование по частям, получаем с учетом (3.3)

$$\Xi\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\Psi_0\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)\ln\,[(z-z_0)\,e^{-C}]-\\ -\Psi_{0,\psi}\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)\tag{3.5}$$

В силу (2.2) имеем

$$\theta\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\Phi_0\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)\ln\,[(z-z_0)\,e^{-C}]-\\ -\Phi_{0,\psi}(z-z_0,\zeta-\zeta_0)\tag{3.6}$$

Остальные обобщенные логарифмы определены в (3.2).

Для определения обобщенной отрицательной степени $\Theta_{-n}\,(z,\zeta)$ положим в первой из формул (3.3) (3.7)

$$\chi\,(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi\,(t)\,dt,\quad\varphi\,(z)=\chi^{(n)}\,(z),\quad\chi^{(k)}\,(z_0)=0\quad(k=0,1,\ldots,n-1)$$

Произведя интегрирование по частям, приходим к выражению

$$\theta_{-n}\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\\ =\sum_{k=0}^{n}\chi^{(k)}\,(z)\,g'_{n-k}\,(\zeta-\zeta_0)+(-1)^{n+1}\int_{z_0}^{z}\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}G_0\,(z-t,\zeta-\zeta_0)\,\chi\,(t)\,dt\tag{3.8}$$

Из (3.8) с учетом (3.3), (3.1) и (1.3) получаем

$$\theta_{-n}\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}\,(k-1)!}{(z-z_0)^k}g'_{n-k}\,(\zeta-\zeta_0)+\\ +\Phi_{-n}\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)\ln\,[(z-z_0)\,e^{-C}]-\Phi_{-n,\psi}\,(z-z_0,\zeta-\zeta_0)\quad(n=1,2,\ldots)\tag{3.9}$$

Аналогичным образом определяется вторая степень

$$\Xi_{-n}(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k(k-2)!}{(z-z_0)^{k-1}}g_{n-k}(\zeta-\zeta_0)+ \tag{3.10}$$

$$+\Psi_{-n}(z-z_0,\zeta-\zeta_0)\ln[(z-z_0)e^{-C}]-\Psi_{-n,\psi}(z-z_0,\zeta-\zeta_0)\quad(n=2,3,\ldots)$$

$$\Xi_{-1}(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\Psi_{-1}(z-z_0,\zeta-\zeta_0)\ln[(z-z_0)e^{-C}]-$$

$$-\Psi_{-1,\psi}(z-z_0,\zeta-\zeta_0)$$

Остальные отрицательные обобщенные степени определены в (3.3). Из (3.9) и (3.10) следует, что порядок главной особенности у функции $\Theta_{-n}(z,\zeta)$ равен n, порядок главной особенности у $\Xi_{-n}(z,\zeta)$ равен $n-2$ при $n=2,3,\ldots$; при $n=1,2$ имеется лишь логарифмическая особенность.

Из теории обобщенных в смысле Соболева — Шварца функций следует, что функцию θ_{-n} (Ξ_{-n}) можно определить как производную n-й степени от Θ (Ξ), т. е. что имеют место соотношения

$$\theta_{-n}(z,\zeta)=\frac{\partial^n}{\partial z^n}\theta(z,\zeta),\qquad \Xi_{-n}(z,\zeta)=\frac{\partial^n}{\partial z^n}\Xi(z,\zeta) \tag{3.11}$$

Аналогичным образом можно получить частные решения уравнения (1.1), имеющие особенность в некоторой точке z_1, ζ_1, отличной от z_0, ζ_0. Эти решения не выписываем.

Функции Φ_n, Φ^*_n, Ψ_n и Ψ_n^* $(n=0,1,\ldots)$ образуют полную систему частных решений однородного уравнения (1.1) для любой ограниченной односвязной области D, D^*. В совокупности же с функциями Θ_{-n}, Θ_{-n}^*, Ξ_{-n}, Ξ_{-n}^* они образуют полную систему частных решений [3] для любой двухсвязной области D, D^*.

4. Из рассмотренного выше следует, что система частных решений Φ_γ, Φ_γ^*, Ψ_γ и Ψ_γ^* не обладает симметрией относительно индекса. При $\gamma=1,2,\ldots$ будем иметь систему частных решений в результате последовательного интегрирования ядер G_0 и G_1; при $\gamma=-1,-2,-,\ldots$, имеем решения, которые будут результатом последовательного дифференцирования тех же ядер. Между тем как те, так и другие функции есть регулярные решения уравнения (1.1). Указанное обстоятельство наводит на мысль о построении такой системы решений, которая была бы симметрична относительно индекса в том смысле, что перемена знака у последнего не выводит из заданного класса регулярных решений.

Рассмотрим следующие свертки функций:

$$\Phi_{\lambda,\gamma}(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{(\zeta-\tau)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\Phi_\gamma(z-z_0,\tau-\zeta_0)\,d\tau\qquad(\operatorname{Re}\lambda>0,\ \operatorname{Re}\gamma>0)$$

$$\Psi_{\lambda,\gamma}(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{(\zeta-\tau)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\Psi_{\gamma-1}(z-z_0,\tau-\zeta_0)\,d\tau+ \tag{4.1}$$

$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{(\zeta-\tau)^{\lambda-2}}{\Gamma(\lambda-1)}\Psi_\gamma(z-z_0,\tau-\zeta_0)\,d\tau\qquad(\operatorname{Re}\lambda>1,\ \operatorname{Re}\gamma>1)$$

Функции, определенные в (4.1), будут решениями уравнения (1.1) при некоторых $f(z, \zeta)$.

Выясним вид правой части $f(z, \zeta)$, соответствующей этим решениям. Легко видеть из (2.1) и (2.5), что

$$\Psi_\gamma(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \int_{z_0}^{z} \frac{(z-t)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} G_1(t - z_0, \zeta - \zeta_0)\, dt \tag{4.2}$$

Вставляя (4.2) во вторую формулу (4.1), имеем

$$\Psi_{\lambda,\gamma}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left\{ \frac{(\tau-\zeta_0)^{\lambda-1}(t-z_0)^{\gamma-2}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\gamma-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\tau-\zeta_0)^{\lambda-2}(t-z_0)^{\gamma-1}}{\Gamma(\lambda-1)\Gamma(\gamma)} \right\} G_1(z - t, \zeta - \tau)\, d\tau \tag{4.3}$$

Отсюда в силу (1.7) заключаем, что правая часть уравнения (1.1), соответствующая решению $\Psi_{\lambda,\gamma}$, есть

$$f(z, \zeta) = \frac{(\zeta-\zeta_0)^{\lambda-1}(z-z_0)^{\gamma-2}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\gamma-1)} + \frac{(\tau-\zeta_0)^{\lambda-2}(t-z_0)^{\gamma-1}}{\Gamma(\lambda-1)\Gamma(\gamma)} \tag{4.4}$$

Функция $f(z, \zeta)$, соответствующая решению $\Phi_{\lambda,\gamma}$ имеет вид

$$f(z, \zeta) = \frac{(\zeta-\zeta_0)^{\lambda-2}(z-z_0)^{\gamma-2}}{\Gamma(\lambda-1)\Gamma(\gamma-1)} \tag{4.5}$$

Выполняя интегрирование в (4.1), получаем с учетом (2.7) и (1.5) выражения для функций $\Phi_{\lambda,\gamma}$ и $\Psi_{\lambda,\gamma}$

$$\Phi_{\lambda,\gamma}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{k+\gamma}}{\Gamma(k+\gamma+1)} \sum_{s=0}^{\infty} C_{k,s} \frac{(\zeta-\zeta_0)^{s+\lambda}}{\Gamma(s+\lambda+1)}$$

$$\Psi_{\lambda,\gamma}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{k+\gamma}}{\Gamma(k+\gamma+1)} \sum_{s=0}^{\infty} C_{k,s} \frac{(\zeta-\zeta_0)^{s+\lambda+1}}{\Gamma(s+\lambda+2)} + \tag{4.6}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{k+\gamma+1}}{\Gamma(k+\gamma+2)} \sum_{s=0}^{\infty} C_{k,s} \frac{(\zeta-\zeta_0)^{s+\lambda}}{\Gamma(s+\lambda+1)}$$

$$C_{2k,2s} = a_{k,s}, \quad C_{2k+1,2s} = C_{2k,2s+1} = 0, \quad C_{2k+1,2s+1} = b_{k,s}$$

Формулы (4.6) дают аналитическое продолжение интегралов в равенствах (4.1) на комплексные значения индексов λ и γ, за исключением точек $\gamma = -1, -2, \ldots$; $\lambda = -1, -2, -, \ldots$. Если один из индексов произволен, а другой принимает целые отрицательные значения, то функции (4.6) дают решения уравнения (1.1) с правой частью $f(z, \zeta) = 0$.

Пусть $\gamma = m$, $\lambda = -n$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$, тогда получаем, имея в виду соотношение (2.8)

$$\Phi_{-n,m}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} \int_{z_0}^{z} \frac{(z-t)^{m-1}}{(m-1)!} G_0(t - z_0, \zeta - \zeta_0)\, dt \tag{4.7}$$

Аналогичные соотношения имеют место и для $\Psi_{-n,m}(z, \zeta)$. Из (4.1) или (4.6) следуют соотношения симметрии:

$$\Phi_{\lambda,\gamma}(z, \zeta) = \Phi^*_{\gamma,\lambda}(z, \zeta) = \Phi_{\gamma,\lambda}(\zeta, z), \quad \Psi_{\lambda,\gamma}(z, \zeta) = \Psi^*_{\gamma,\lambda}(z, \zeta) = \Psi_{\gamma,\lambda}(\zeta, z) \tag{4.8}$$

Если $\lambda = -n$, $\gamma = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то согласно соотношениям (4.8) имеем

$$\Phi^*_{-nn}(z, \zeta) = \Phi_{n-n}, (\zeta, z), \quad \Psi^*_{n,n}(z, \zeta) = \Psi_{n,n}(\zeta, z) \tag{4.9}$$

Таким образом, построенная система решений с целым индексом n $\Phi_{-n,n}(z,\zeta)$, $\Phi^*_{-n,n}{}^*(z, \zeta)$, $\Psi_{-n,n}(z, \zeta)$ и $\Psi_{-n,n}{}^*(z, \zeta)$ обладает симметрией по индексу в указанном в начале этого пункта смысле. Эти решения будем называть решениями первого рода с целым индексом. Их можно представить в виде

$$\Phi_{-n,n}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} \int_{z_0}^{z} \ldots \int_{z_0}^{z} G_0(t - z_0, \zeta - \zeta_0)\, dt^n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

$$\Psi_{-n,n}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} \int_{z_0}^{z} \ldots \int_{z_0}^{z} G_1(t - z_0, \zeta - \zeta_0)\, dt^{n-1} + \tag{4.10}$$

$$+ \frac{\partial^{n+1}}{\partial \zeta^{n+1}} \int_{z_0}^{z} \ldots \int_{z_0}^{z} G_1(t - z_0, \zeta - \zeta_0)\, dt^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\Psi_{0,0}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial z}\right) G_1(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = \frac{\partial}{\partial \zeta} G_1(z - z_0, \zeta - \zeta_0)$$

5. Проиллюстрируем как «работают» решения первого рода с целым индексом на примере цилиндрической оболочки. В этом случае $\delta = 1$ и формулы (1.8) примут вид

$$G_k(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{p\zeta} G^*_k(p, z)\, dp \tag{5.1}$$

$$G_1^*(p, z) = \frac{1}{2p^2}\left(\exp \frac{pz}{p-1} - \exp \frac{-pz}{p+1}\right), \qquad G_0^*(p, z) = p \frac{\partial}{\partial z} G_1^*(p, z)$$

(L — замкнутый контур, охватывающий точки $p = \pm 1$)

Из первой формулы (4.10) в силу (5.1) имеем

$$\Phi_{-n,n}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{p\zeta} \left\{\frac{(p-1)^{n-1}}{2} \exp \frac{pz}{p-1} + (-1)^n \frac{(p+1)^{n-1}}{2} \exp \frac{-pz}{p+1}\right\} dp \tag{5.2}$$

Последнюю формулу преобразуем к виду

$$\Phi_{-n,n}(z, \zeta) = \frac{e^{z+\zeta}}{2\pi i} \int_L \frac{(p-1)^{n-1}}{2} \exp\left((p-1)\zeta + \frac{z}{p-1}\right) dp +$$

$$+ \frac{e^{-z-\xi}}{2\pi i} \int_L (-1)^n \frac{(p+1)^{n-1}}{2} \exp\left((p+1)\zeta + \frac{z}{p+1}\right) dp \tag{5.3}$$

Отсюда уже легко получим

$$\Phi_{-n,n}(z, \zeta) = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n/2} I_n(2\sqrt{z\zeta}) \operatorname{ch}\left(z + \zeta - \frac{i\pi n}{2}\right) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{5.4}$$

Аналогично получаем остальные решения с целым индексом

$$\begin{gathered}\Phi^*_{-n,n}(z, \zeta) = \Phi_{-n,n}(\zeta, z) = (\zeta / z)^{n/2} I_n(2\sqrt{z\zeta}) \operatorname{ch}(z + \zeta - {}^1/_2\, i\pi n) \\ \Psi_{-n,n}(z, \zeta) = (z/\zeta)^{n/2} I_n(2\sqrt{z\zeta}) \operatorname{sh}(z + \zeta - {}^1/_2\, i\pi n) \\ \Psi^*_{-n,n}(z, \zeta) = \Psi_{-n,n}(\zeta, z) = (\zeta / z)^{n/2} I_n(2\sqrt{z\zeta}) \operatorname{sh}(z + \zeta - {}^1/_2\, i\pi n)\end{gathered} \tag{5.5}$$

где $I_n(t)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Для ядра $G_0(z, \zeta)$ и функции Римана $G_1(z, \zeta)$ имеем выражения

$$G_0(z, \zeta) = I_0(2\sqrt{z\zeta})\,\mathrm{ch}\,(z+\zeta) \tag{5.6}$$

$$G_1(z, \zeta) = \int\limits_0^{\xi} I_0(2\sqrt{z\zeta})\,\mathrm{sh}\,(z+\zeta)\,d\xi, \qquad 2\xi = z + \zeta$$

Функции (5.4) и (5.5) совпадают с известными регулярными решениями в теории круговой цилиндрической оболочки.

6. Запишем фундаментальное решение уравнения (1.1). Для этого положим [3] в представлениях (1.2)

$$\varphi_0(z) = \psi_0(\zeta) = 0, \quad \varphi_1(z) = A\ln(z - z_0), \quad \psi_1(\zeta) = A\ln(\zeta - \zeta_0) \tag{6.1}$$

Легко видеть из (3.2) и (2.1), что фундаментальное решение имеет вид

$$\Omega(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = A\{\Xi(z - z_0, \zeta - \zeta_0) + \Xi^*(z - z_0, \zeta - \zeta_0)\} \tag{6.2}$$

Или в силу (3.5) и (2.10)

$$\Omega(z - z_0, \zeta - \zeta_0) = 2AG_1(z - z_0, \zeta - \zeta_0)\ln\frac{\sqrt{(z - z_0)(\zeta - \zeta_0)}}{\exp C} - \tag{6.3}$$
$$- A\,[\Psi_{0,\psi}(z - z_0, \zeta - \zeta_0) + \Psi_{0,\psi}(\zeta - \zeta_0, z - z_0)]$$

В силу (1.3), (1.5) и (1.1) функция $\Omega(z, \zeta)$ имеет в точке $z = z_0$, $\zeta = \zeta_0$ особенность типа $\rho^2\ln\rho$, где $\rho^2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. К функции (6.3) можно, очевидно, добавить любое регулярное в точке $z = z_0$, $\zeta = \zeta_0$ решение.

7. Применение теории потенциала в теории оболочек основывается на формулах типа формулы Дарбу (см. [3]), дающих представление решения внутри области через фундаментальное решение и значения решения и его первых трех производных на контуре области. Последние исследования [5] показали эффективность применения теории потенциала во многих краевых задачах теории пологих оболочек.

Представим формулу Дарбу для нашего случая в следующих двух видах:

$$(\text{а}) \quad F(x, y) = A^* \int\limits_L \{N^*(\Omega, F) - N^*(F, \Omega)\}\,ds \left(A^* = \frac{ia^2}{16\pi A\beta^2}\right) \tag{7.1}$$

$$\Omega = \Omega(x' - x, y' - y), \qquad F = F(x', y'), \qquad x', y' \in L, \qquad x, y \in D$$

$$N^*(u, v) = u\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2 v - \frac{\partial u}{\partial n}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} - \frac{\partial\theta}{\partial n}\frac{\partial v}{\partial s} + (b\cos^2\theta + b^*\sin^2\theta)\,v\right] -$$
$$- \frac{\partial u}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial n\,\partial s} - \frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} + v\frac{b^* - b}{2}\sin 2\theta\right], \qquad b^* = \alpha b, \qquad b = \frac{16i\beta^2}{(1-\alpha)a_2}$$

Здесь L — граница области, n и s направления нормали и касательной к контуру области соответственно: θ — угол между осью x и внешней нормалью, D — область, заключенная внутри L: A — положено таким, чтобы $A^* = 1$.

$$(\text{б}) \qquad F(z, \zeta) = \frac{i}{2}\int\limits_L \left\{N(\Omega, F)\frac{d\tau}{ds} - N^*(\Omega, F)\frac{dt}{ds}\right\} ds \tag{7.2}$$

$$N(F_1, F) = \frac{1}{2}F_1\frac{\partial^3 F}{\partial t\,\partial\tau^2} - \frac{1}{2}F_2\frac{\partial^3 F_1}{\partial t\,\partial\tau^2} - F_1\left(\delta\frac{\partial F}{\partial\tau} + \frac{\partial F}{\partial t}\right) +$$
$$+ F\left(\delta\frac{\partial F_1}{\partial\tau} + \frac{\partial F_1}{\partial t}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\frac{\partial^2 F}{\partial\tau^2} + \frac{\partial F_1}{\partial\tau}\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial\tau}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial^2 F_1}{\partial\tau^2} + \frac{\partial F}{\partial\tau}\frac{\partial^2 F_1}{\partial t\,\partial\tau}\right)$$

$$N^*(F_1, F) = \frac{1}{2}F_1\frac{\partial^3 F}{\partial t^2\,\partial\tau} - \frac{1}{2}F\frac{\partial^3 F_1}{\partial t^2\,\partial\tau} - F_1\left(\delta\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial\tau}\right) + F\left(\delta\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial\tau}\right) -$$
$$- \frac{1}{4}\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial\tau} + \frac{\partial F_1}{\partial\tau}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial^2 F_1}{\partial t\,\partial\tau} + \frac{\partial F}{\partial\tau}\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}\right)$$

$$\Omega = \Omega(t - z, \tau - \zeta), \qquad F = F(t, \tau), \qquad t, \tau \in L, L^*, \qquad z, \zeta \in D, D^*$$

Формулой (7.1) удобно пользоваться при сведении краевых задач теории оболочек к интегральным уравнениям. Формула (7.2) после некоторых преобразований приводит к представлению решений уравнения (1.1) через обобщенные интегралы типа Коши и некоторые другие, ядрами которых служат решения типа

$$\theta_{-n}\ (z, \zeta),\quad \theta_{-n}^*\ (z, \zeta),\ \Xi_{-n}\ (z, \zeta), \Xi_{-n}^*\ (z, \zeta),\ (n = 0,1)$$

8. При решении краевых задач в рядах, частные решения, записанные в форме (2.7), (2.9), (3.9), (3.10) и т. д., удобно преобразовать к рядам типа рядов Фурье по θ. Это можно сделать при помощи легко выводимой формулы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+\gamma} A_{2k+m}}{\Gamma(2k+\gamma+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2s+\nu} B_{k+r,\,s+q}}{\Gamma(2s+\nu+1)} = z^{\gamma}\zeta^{\nu} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{m+2j} B_{r+j,\,q+j} (z\zeta)^{2j}}{\Gamma(2j+\gamma+1)\,\Gamma(2j+\nu+1)} + \right.$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{m+2j+2k} B_{j+k+r,\,j+q} (z\zeta)^{2j+k}}{\Gamma(2j+2k+\gamma+1)\,\Gamma(2j+\nu+1)} +$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{m+2j} B_{r+j,\,j+q+k} (z\zeta)^{2j+k}}{\Gamma(2j+\gamma+1)\,\Gamma(2j+2k+\nu+1)} \right\} \tag{8.1}$$

При применении указанной процедуры над полученными частными решениями необходимо иметь в виду соотношения, которым подчиняются величины $a_{k,s}$ и $b_{k,s}$ в (1.5)

$$a_{r,\,r+k}(\delta) = \alpha_1^{-2r} \varkappa_{2r,\,2r+k}, \qquad b_{r,\,r+k}(\delta) = \alpha_1^{-2r-1} \varkappa_{2r+1,\,2r+k+1} \tag{8.2}$$

где

$$\varkappa_{r,\,r+k} = \sum_{j=0}^{r} 2^{2r-2j} \left(-\frac{2}{\delta+1}\right)^j \frac{(r+k)!\,(2j+2k)!}{j!\,(j+k)!\,(j+2k)!\,(r-j)!}\,, \qquad \alpha_1 = 1 - \alpha = \frac{2}{1+\delta}$$

В заключение отметим, что параметр $0 \leqslant \delta \leqslant \infty$. Если радиусы кривизны оболочки $R > 0$, $R_1 > 0$, $(R_1 \geqslant R)$, то $1 \leqslant \delta \leqslant \infty$; если $R > 0$, $R_1 < 0$ и $|R_1| \geqslant |R|$, то $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Значения параметра $\delta = 1$ и ∞ соответствуют цилиндрической и сферической оболочкам. Значение $\delta = 0$ соответствует оболочке гиперболического типа при $|R| = |R_1|$ (псевдосфере).

Поступила 20 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в оболочках. В сб.: «Концентрация напряжений», Киев, «Наукова думка», 1965, вып. 1.
2. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластинки и оболочки и связанные с ними проблемы. Обзор результатов. В кн.: Упругость и пластичность, 1965. Итоги науки, сер. Механика, М., ВИНИТИ, 1967.
3. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. Савін Г. М., Гавеля С. П. Застосування методів теорії потенціалу при дослідженні концентрації напружень біля отворів у оболонках. Доловіді АН УССР. Сер. А., 1968, № 4.