Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О КОРРЕКТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В. А. Шачнев

(Москва)

Определение напряженного и деформированного состояний безмоментной оболочки отрицательной кривизны приводит к необходимости решать систему уравнений гиперболического типа. Краевая задача для такой системы не всегда имеет решение, и потому, в общем, такая задача не корректна. В данной работе для системы уравнений безмоментной теории в случае оболочек вращения отрицательной кривизны будет рассмотрена следующая краевая задача. На каждом крае оболочки будут заданы одно статическое и одно геометрическое граничные тангенциальные условия [1], т. е. в каждой точке края заданы одно усилие и одно перемещение в касательной к срединной поверхности оболочки плоскости. В этом случае задача разделяется на две: статическую, заключающуюся в решении уравнений равновесия с учетом статического граничного условия, и геометрическую, заключающуюся в решении уравнений для перемещений, определяющих малые изгибания оболочки, с учетом геометрического граничного условия При этом, если направления заданных на крае оболочки перемещений и усилий взаимно ортогональны в каждой точке края, то обе задачи будут сопряженными. Ввиду существования в этом случае альтернативных теорем [1] разрешимость одной задачи определяет условия разрешимости другой. Каждая из этих задач будет краевой задачей для соответствующей гиперболической системы уравнений, и исследование корректности задачи проведем сначала для статической задачи. Дополнительно в работе будет показано, что в случае задания только геометрических тангенциальных граничных условий, по два на каждом крае оболочки, задача оказывается корректной.

Краевая задача для гиперболических уравнений рассматривалась в литературе, в частности для уравнения или системы уравнений колебания струны рассматривалась в работах [2-6]. В случае задачи Дирихле для уравнения струны было показано, что краевая задача может не иметь решения, если отношение сторон прямоугольной области, в которой определялось решение, есть рациональное число. Наличие всюду плотного множества недопустимых размеров области приводит к необходимости определения условий, при которых краевая задача может быть поставлена корректно. В работе С. Л. Соболева [4] рассмотрены некоторые условия корректности краевой задачи для системы уравнений колебания струны, заданной в квадратной области.

В теории оболочек краевая задача для некоторых частных оболочек отрицательной кривизны рассматривалась В. З. Власовым [7] и А. М. Соколовым [8], и также было обнаружено плотное множество недопустимых размеров области. Задача Дирихле здесь возникает в случае, когда статические или геометрические тангенциальные граничные условия заданы в направлении координатных линий. В работе [7] рассматривалась задача Дирихле для системы уравнений равновесия, в [8] для однополостного гиперболоида рассматривалась геометрическая задача с косыми (не координатными) тангенциальными граничными условиями. В качестве эксперимента, реализующего задачу Дирихле, В. З. Власовым демонстрировалась модель тонкостенной оболочки в форме однополостного гиперболоида, закрепление краев которого отвечало случаю отсутствия на каждом крае одного из координатных усилий в касательной к поверхности оболочки плоскости. Для некоторых размеров, соответствующих некорректности задачи, оболочка обладала большей деформативностью в случае специального способа ее нагружения по боковой поверхности. Этот факт показывает, что отсутствие решения уравнений безмоментной теории отвечает в действительности реальному изменению поведения оболочки.

В работе А. Л. Гольденвейзера [9] показано, что учет всюду плотного множества размеров оболочки, при которых решение задачи не существует, не всегда имеет практический смысл, так как в рамках безмоментной теории интерес представляют лишь решения, показатели изменяемости которых не слишком велики, и густота таких решений должна быть определенного порядка.

В настоящей работе для оболочек вращения отрицательной кривизны рассматриваются условия существования и корректности решения статической задачи для различных граничных тангенциальных условий. Краевая задача состоит в определении решения уравнения второго порядка с заданной на границе косой производной.

1. Безмоментное напряженное состояние оболочки вращения описывается системой уравнений равновесия [1], которую для координатных усилий T и S, лежащих в касательной к срединной поверхности оболочки плоскости, можно написать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{rT}{A} = -rX + rr'Z \qquad \left(A = \sqrt{1 + r'^2}\right) \tag{1.1}$$
$$r''\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{rT}{A} + \frac{1}{r}\frac{\partial r^2 S}{\partial z} = -rAY - rA^2\frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

где $r = r(z)$ — радиус в сечении, перпендикулярном оси вращения z оболочки, штрих означает дифференцирование по осевой координате z, A — коэффициент первой квадратичной формы, β — угловая координата, T и S — соответственно нормальное и касательное усилия в элементе оболочки, ограниченном координатными линиями, X, Y, Z — компоненты внешней нагрузки.

Решение системы уравнений (1.1) в прямоугольной области

$$\Omega\,\{0 \leqslant z \leqslant H,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi\}$$

рассматривается при граничных условиях вида

$$k_1 T(0, \beta) + k_2 S(0, \beta) = R_0(\beta), \quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0 \tag{1.2}$$
$$k_3 T(H, \beta) + k_4 S(H, \beta) = R_1(\beta), \quad k_3^2 + k_4^2 \neq 0, \quad k_i = \mathrm{const}$$

Задачу назовем корректной, если для заданного H существует единственное решение, и единственное решение существует при достаточно малом изменении H.

Для исследования корректности задачи рассмотрим однородные уравнения, соответствующие (1.1), (1.2), так как для существования решения в общем случае необходимо, чтобы однородная задача имела лишь тривиальное решение. В случае однородной задачи система уравнений (1.1) при помощи функции напряжений Φ может быть сведена к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = \frac{1}{rr''}\frac{\partial}{\partial z} r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad T = -\frac{A}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \qquad S = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{1.3}$$

Однородные граничные условия, соответствующие (1.2), согласно (1.3) можно записать в виде

$$z = 0, -k_1\frac{A}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + k_2\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0$$
$$z = H, -k_3\frac{A}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + k_4\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad k_3^2 + k_4^2 \neq 0 \tag{1.4}$$

Для оболочки отрицательной кривизны $rr'' > 0$, и потому уравнение (1.3) гиперболического типа. В дальнейшем полагаем, что функция $r(z)$ имеет нужное количество непрерывных производных. Корректность задачи, описываемой уравнениями (1.3), (1.4), определяется теоремой.

Теорема. Для заданных размеров области определения решения существует такая совокупность значений k_1, k_2, k_3, k_4, что задача (1.3), (1.4) корректна.

Доказательство. Представим решение уравнения (1.3) в виде формального ряда $\Phi = \sum_n \Phi_n(z, \beta)$, где члены ряда удовлетворяют уравнению (1.3) и имеют вид

$$\Phi_n(z, \beta) = \varphi_1(z, n)\cos n\beta + \varphi_2(z, n)\sin n\beta \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.3) и (1.4), получим, что $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ удовлетворяют уравнению

$$(r^2\varphi')' + n^2rr''\varphi = 0 \tag{1.6}$$

и граничным условиям вида (1.7)

$$z = 0, \quad -nl_1\varphi_1 + k_2\varphi_2' = 0, \quad nl_1\varphi_2 + k_2\varphi_1' = 0 \qquad (l_1 = -k_1A(0)/r(0))$$
$$z = H, \quad -nl_3\varphi_1 + k_4\varphi_2' = 0, \quad nl_3\varphi_2 + k_4\varphi_1' = 0 \qquad (l_3 = -k_3A(H)/r(H))$$

Представим φ_1 и φ_2 в виде

$$\varphi_1 = A\psi_1 + B\psi_2, \quad \varphi_2 = C\psi_1 + D\psi_2, \quad A, B, C, D = \text{const} \tag{1.8}$$

где ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют уравнению (1.6) и начальным условиям

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1'(0) = n, \quad \psi_2(0) = 1, \quad \psi_2'(0) = 0. \tag{1.9}$$

Подставим (1.8) в (1.7). Получающаяся при этом система уравнений относительно A, B, C, D может иметь нетривиальное решение, когда

$$\begin{vmatrix} 0 & -l_1 & k_2 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & l_1 \\ -nl_3\psi_1(H) & -nl_3\psi_2(H) & k_4\psi'_1(H) & k_4\psi_2'(H) \\ k_4\psi_1'(H) & k_4\psi_2'(H) & nl_3\psi_1(H) & nl_3\psi_2(H) \end{vmatrix} = 0 \tag{1.10}$$

Условие (1.10) отвечает возможной некорректности задачи, и если определитель не равен нулю, то задача разрешима. Условие (1.10) эквивалентно двум следующим:

$$nl_1l_3\psi_1(H) + k_2k_4\psi_2'(H) = 0, \qquad nl_3k_2\psi_2(H) - l_1k_4\psi_1'(H) = 0 \tag{1.11}$$

которые будем называть условиями некорректности. Введем замену переменных

$$\psi = \frac{u(\xi)}{(r^3r'')^{1/4}}, \qquad \xi = \int_0^z \left(\frac{r''}{r}\right)^{1/2} dz$$

Тогда уравнение (1.6) преобразуется к виду [10]

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + [n^2 - Q(\xi)]\,u = 0, \qquad Q(\xi) = Q(z(\xi)) = \frac{r^2}{(r^3r'')^{3/4}}\frac{d}{dz}r^2\frac{d}{dz}(r^3r'')^{-1/4}$$

При достаточно больших n его решения можно представить в асимптотическом виде

$$u_1 = c_1\sin n\xi + O(n^{-1}), \qquad u_1' = nc_1\cos n\xi + O(1)$$
$$u_2 = c_2\cos n\xi + O(n^{-1}), \qquad u_2' = -nc_2\sin n\xi + O(1)$$

и соответственно положив $c_1 = \sqrt[4]{r^5(0)/r''(0)}$, $c_2 = \sqrt[4]{r^3(0)\,r''(0)}$, получим

$$\psi_1(z) = \frac{c_1\sin n\xi(z)}{(r^3r'')^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \psi_1'(z) = nc_1\left(\frac{r''}{r^5}\right)^{1/4}\cos n\xi(z) + O(1)$$

$$\psi_2(z) = \frac{c_2\cos n\xi(z)}{(r^3r'')^{1/4}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \psi_2'(z) = -nc_2\left(\frac{r''}{r^5}\right)^{1/4}\sin n\xi(z) + O(1)$$

Подставляя последнее в условия некорректности (1.11), получим

$$\begin{gathered}\left[l_1 l_3\left(\frac{r^5(0)}{r^3(H)\, r''(0)\, r''(H)}\right)^{1/4}-k_2 k_4\left(\frac{r^3(0)\, r''(0)\, r''(H)}{r^5(H)}\right)^{1/4}\right]\sin n\xi(H)+O\left(\frac{1}{n}\right)=0 \\ \left[k_2 l_3\left(\frac{r^3(0)\, r''(0)}{r^3(H)\, r''(H)}\right)^{1/4}-l_1 k_4\left(\frac{r^5(0)\, r''(H)}{r''(0)\, r^5(H)}\right)^{1/4}\right]\cos n\xi(H)+O\left(\frac{1}{n}\right)=0\end{gathered} \qquad (1.12)$$

Полагая, что l_1, l_3, k_2, k_4 отличны от нуля, введем обозначения $p = l_1/k_2$, $q = l_3/k_4$, которые означают величины, пропорциональные тангенсам углов наклона результирующих усилий на краях оболочки. Тогда условия некорректности (1.11) будут определять для разных n некоторые кривые в плоскости (p, q) или точки пересечения соответствующих кривых. Если $\psi_i(H)$, $\psi_i'(H)$, $i = 1,2$ не равны нулю, то условия (1.11) можно переписать в виде

$$n\psi_1(H)\, pq = -\psi_2'(H), \qquad n\psi_2(H)\, q = \psi_1'(H)\, p$$

и совместно они определяют возможно лишь точки пересечения двух ветвей гиперболы с прямой. Рассмотрим случаи, когда $\psi_i(H)$ и $\psi_i'(H)$ могут быть равны нулю.

Пусть $\psi_1(H) = \psi_2'(H) = 0$. Тогда первое из уравнений (1.11) удовлетворяется тождественно. Так как $\psi_2(H)$ и $\psi_1'(H)$ не равны нулю, иначе в силу единственности решения задачи Коши для уравнения (1.6) решения $\psi_i(z)$ должны быть тривиальными и не будут удовлетворять принятым для них условиям (1.9), условие некорректности имеет вид уравнения прямой

$$n\psi_2(H)\, q = \psi_1'(H)\, p$$

Пусть $\psi_2(H) = \psi_1'(H) = 0$. В этом случае тождественно удовлетворяется второе уравнение из (1.11), первое имеет вид уравнения гиперболы

$$n\psi_1(H)\, pq = -\psi_2'(H)$$

При $n \to \infty$ согласно (1.12) кривые некорректности группируются в окрестности кривых

$$pq\sqrt{r(0)\, r(H)} = \sqrt{r''(0)\, r''(H)}, \qquad q\sqrt{r''(0)\, r(H)} = p\sqrt{r''(H)\, r(0)}$$

Вне окрестности этих последних существует лишь конечное число кривых некорректности, которые имеют вид прямых или гипербол. Поэтому для данного H в силу непрерывной зависимости от H левых частей уравнения (1.11) в плоскости (p, q) всегда существует точка, в окрестности которой нет точек кривых некорректности. Теорема доказана.

Рассмотрим условия некорректности (1.11) для случаев $n = 0$ и $n = 1$, полагая при этом, что l_1, l_3, k_2, k_4 отличны от нуля.

При $n = 0$ уравнение (1.6) имеет решение $\varphi = c_1 \int r^{-2} dz + c_2$ и условия некорректности (1.11) имеют вид: $k_2 r^{-1}(0) = 0$, $k_4 r^2(H) = 0$, т. е. при k_2, k_4, отличных от нуля, задача корректна.

Заметим, что случай $n = 0$ отвечает решению однородных уравнений (1.1) в виде $T \equiv 0$, $S = S(z)$. Решение $S \equiv 0$, $T = T(z)$ следует из уравнения (1.3), если положить, что Φ не зависит от z. В дальнейшем случай $n = 0$ не учитывается.

При $n = 1$ уравнение (1.6) преобразуется заменой $\varphi = r^{-1} f$ к виду $f'' = 0$ и решение для φ будет иметь вид: $\varphi = (c_1 z + c_2)\, r$. Определяя

$$\psi_1 = r(0)\, z r^{-1}(z), \qquad \psi_2 = [r'(0)\, z + r(0)]\, r^{-1}(z)$$

получим условия некорректности вида

$$\begin{gathered} l_1 l_3 H r(0)\, r(H) + k_2 k_4 \{r'(0)\, r(H) - [H r'(0) + r(0)]\, r'(H)\} = 0 \\ k_2 l_3 [H r'(0) + r(0)]\, r(H) - l_1 k_4 [r(H) - H r'(H)]\, r(0) = 0 \end{gathered}$$

Рассмотрим теперь частные случаи условий некорректности (1.11), когда некоторые из коэффициентов k_i равны нулю.

В случае $l_1 = 0$ ($k_1 = 0$) задача разрешима для любого H и значит корректна, так как условия (1.11) в этом случае имеют вид $\psi_2(H) = \psi_2'(H) = 0$ и невозможны для решения $\psi_2(z)$, удовлетворяющего условиям (1.9). Аналогично задача всегда разрешима в случае $k_2 = 0$. В случаях, когда или $l_3 = 0$ или $k_4 = 0$, задача также разрешима, так как иначе из условий (1.11) вытекает равенство нулю в точке $z = H$ определителя Вронского для решений $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, что опять противоречит условиям (1.9). Для теории оболочек эти случаи означают, что задача всегда разрешима, если на одном крае задано координатное усилие, на другом — отличное от координатного.

Рассмотрим случаи, когда нулю равны два коэффициента. В этих случаях решение можно представить в виде следующего формального ряда:

$$\Phi = \sum_n \varphi(z, n) \cos(n\beta + \beta_0) \qquad (1.13)$$

где $\varphi(z)$ удовлетворяет уравнению (1.6). Имеют смысл лишь четыре случая равенства нулю коэффициентов k_i и l_i, которым согласно (1.4) отвечают приводимые ниже граничные условия для φ

$$k_2 = k_4 = 0, \qquad \varphi(0, n) = \varphi(H, n) = 0 \qquad (1.14)$$

$$l_3 = k_2 = 0, \qquad \varphi(0, n) = \varphi'(H, n) = 0 \qquad (1.15)$$

$$l_1 = k_4 = 0, \qquad \varphi'(0, n) = \varphi(H, n) = 0 \qquad (1.16)$$

$$l_1 = l_3 = 0, \qquad \varphi'(0, n) = \varphi'(H, n) = 0 \qquad (1.17)$$

Во всех этих случаях условия некорректности (1.14) — (1.17) соответствуют случаям совпадения значения размера области H с нулями или точками экстремума решений уравнения (1.6). Согласно осцилляционной теореме, число нулей или экстремумов в любом промежутке оси z стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Таким образом, в окрестности каждого размера существует всюду плотное множество размеров оболочки, при которых задача не разрешима. Рассмотренные случаи равенства нулю двух коэффициентов соответствуют случаям или нормального T или касательного S нагружения краев оболочки и в этих случаях задача всегда некорректна. Исследуем эти случаи более подробно.

Решению уравнения (1.1) в форме (1.13) соответствует разложение компонент внешней нагрузки (обозначим их общим символом P) в ряд вида

$$P = \sum_n p(z, n) \cos(n\beta + \gamma_0)$$

Будем называть задачу N — корректной, если она корректна для первых N членов разложения нагрузки в ряд.

Введенное определение корректности задачи отвечает возможности рассматривать существование решения для отдельных членов разложения с $n \leqslant N$, и потому введем еще такое определение.

Размеры оболочки, при которых задача не разрешима для некоторого специального вида нагрузки и заданных граничных условий, будем называть собственными размерами оболочками, соответствующими этой нагрузке и граничным условиям.

В рассматриваемом случае собственные размеры определим для специальной нагрузки вида $p(z, n)\cos(n\beta + \gamma_0)$. Тогда для граничных условий (1.14) — (1.17) собственные размеры оболочки совпадают с нулями или точками экстремума решений уравнения (1.6). В силу теоремы сравнения и принятых ограничений для функции $r(z)$ $(rr'' > 0)$ на каждом конечном интервале для каждого n существует лишь конечное число собственных размеров, и потому задача всегда может быть поставлена N-корректно. Т. е. для выбранного числа членов в разложении заданной нагрузки всегда можно подобрать такой размер H, что задача будет корректной.

При помощи теорем сравнения для уравнений второго порядка можно получить оценки собственных размеров в случаях (1.14) — (1.17).

Для $n \geqslant 2$ оценки имеют вид

$$\frac{m\pi}{\alpha n}\left(\frac{\theta_1}{q_1}\right)^{1/2} \leqslant H_m(n) \leqslant \frac{m\pi}{\alpha n}\left(\frac{\theta_2}{q_2}\right)^{1/2} \tag{1.18}$$

$$\theta_1 = \min r^2, \quad q_1 = \max rr'', \quad \theta_2 = \max r^2, \quad q_2 = \min rr''$$

Здесь $\alpha = 1$ в случаях (1.14), (1.17) и $\alpha = 2$ в случаях (1.15), (1.16).

Для случаев (1.14) — (1.16) уравнение (1.6) сравнивается с уравнением

$$\theta_i\varphi'' + n^2 q_i\varphi = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

и оценки (1.18) вытекают из тождества Пиконе, надлежащим образом проинтегрированного (Дж. Сансоне «Обыкновенные дифференциальные уравнения»). Случай (1.17) сводится к случаю (1.14), если перейти от уравнения (1.6) к уравнению

$$\left(\frac{1}{rr''}u'\right)' + \frac{n^2}{r^2}u = 0 \quad (u = r^2\varphi', \ u(0) = u(H) = 0)$$

Предполагается при этом, что θ_i, q_i отличны от нуля.

Для $n = 1$ собственные размеры не существуют в случае (1.14), в остальных случаях собственные размеры определяются непосредственно при помощи решения уравнения (1.6), которое имеет вид $\varphi = (c_1 z + c_2)r^{-1}(z)$.

Оценки, полученные при помощи теорем сравнения, существенно зависят от поведения функции $r(z)$ на заданном интервале. Рассмотрим, например, случай (1.14). Заменой переменной $\varphi = r^{-1}f$ уравнение (1.6) приведем к виду

$$rf'' + (n^2 - 1)r''f = 0 \qquad (f(0) = f(H) = 0)$$

Из теорем сравнения тогда следует

$$\frac{\pi m}{\sqrt{(n^2-1)\max Q(z)}} \leqslant H_m(n) \leqslant \frac{\pi m}{\sqrt{(n^2-1)\min Q(z)}}, \qquad Q(z) = \frac{r''}{r} \tag{1.19}$$

Если $Q(z)$ быстро убывает при $z \to \infty$, например $Q(z) = {}^1/_4 z^{-2} + O(z^{-2})$, то в силу теоремы Кнейзера [10] на всей оси z существует лишь конечное число собственных размеров. Если $Q(z)$ неограниченно возрастает при $z \to \infty$, то пропадает нижняя оценка.

Кроме того, даже существование собственных размеров не является достаточным условием для определения их приближенных значений по формуле (1.19).

Например, если

$$\min Q(z) = Q(L), \qquad L\sqrt{Q(L)} \leqslant m\pi/\sqrt{n^2-1} \qquad \text{при } L \to \infty$$

то из (1.19) нельзя определить верхнюю оценку.

Чтобы иметь возможность улучшать оценки, что важно при вычислении первых собственных размеров для заданного n и при m, соизмеримых с n, рассмотрим вариационные принципы определения собственных размеров. Рассмотрим функционал вида

$$J = \int_0^L r^2\varphi'^2 - n^2 rr''\varphi^2 dz \tag{1.20}$$

на классе функций, непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих граничным условиям какого-либо из случаев (1.14) — (1.17), если заменить там H на L. Предположим, что в каждом случае промежуток $[0, L]$ не содержит собственных размеров. Во всех случаях, за исключением (1.17), функционал принимает наименьшее значение для решения уравнения (1.6), удовлетворяющего соответствующим граничным условиям. Так как в промежутке $[0, L]$ не содержится собственных размеров, то $\varphi = 0$, и потому $\min J = 0$. Рассмотрим каждый случай отдельно.

Случай 1. Функционал J определен на множестве функций, удовлетворяющих граничным условиям: $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$. Так как $J = 0$ лишь для $\varphi = 0$, то для всех остальных φ имеем $J > 0$.

Введем функцию двух переменных $\varphi(z, \xi)$, непрерывно дифференцируемую по z и удовлетворяющую условиям: $\varphi(0, \xi) = \varphi(\xi, \xi) = 0$. Тогда функционал

$$J(\xi) = \int_0^\xi r^2(z)\,\varphi'^2(z, \xi) - n^2 r(z)\, r''(z)\, \varphi^2(z, \xi)\, dz$$

будет больше нуля при $\xi < H_1$, H_1 — первый собственный размер, т. е. то значение L, при котором для рассматриваемых граничных условий возможно решение уравнения (1.6), отличное от нуля. Приближенным значением собственного размера будет значение $\xi = H_1^*$, при котором $J(\xi) = 0$. Очевидно, что полученное таким образом приближенное значение собственного размера будет верхней оценкой точного. Так как функционал (1.20) не имеет экстремума, если промежуток содержит собственный размер [12], то всегда существует функция $\varphi(z, \xi)$ и значение ξ, для которых $J(\xi) = 0$.

Случаи 2 и 3. Функционал рассматривается на множестве функций, удовлетворяющих соответственно условиям: $\varphi(0) = \varphi'(L) = 0$ или $\varphi'(0) = \varphi(L) = 0$. Одно из граничных условий в каждом из этих случаев будет естественным: или $\varphi'(L) = 0$ или $\varphi'(0) = 0$ и функции можно выбирать, удовлетворяя только одному граничному условию, соответственно или $\varphi(0) = 0$ или $\varphi(L) = 0$. Определение собственного размера в этих случаях происходит аналогично случаю 1.

Случай 4. Функционал J определен на множестве функций, удовлетворяющих граничным условиям: $\varphi'(0) = \varphi'(L) = 0$. Для таких граничных условий решение уравнения (1.6) не единственно, и функционал не будет знакоопределенным. Поэтому сузим класс функций, вводя дополнительное условие. Интегрируя уравнение (1.6), получим с учетом граничных условий, что решение должно удовлетворять условию

$$\int_0^L rr''\varphi dz = 0$$

Тогда на классе функций, дополнительно удовлетворяющих этому условию, функционал принимает экстремальное значение. Покажем, что если φ не будет решением уравнения (1.6), то функционал больше нуля. Это достаточно установить для достаточно малых L, так как в силу наличия экстремума функционал равен нулю лишь для решения уравнения. В силу неравенства Буняковского имеем

$$\int_0^L rr''\varphi^2 dz = -\int_0^L \varphi' \int_0^z rr''\varphi dz \leqslant \left[\int_0^L r^2\varphi'^2 dz \int_0^L \left(\frac{1}{r}\int_0^z rr''\varphi dz\right)^2 dz\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_0^L r^2\varphi'^2 dz \int_0^L \frac{1}{r^2}\left(\int_0^z rr''\varphi^2 dz \int_0^z rr'' dz\right) dz\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_0^L r^2\varphi'^2 dz \int_0^L rr''\varphi^2 dz \int_0^L \frac{1}{r^2}\int_0^z rr'' dz dz\right]^{1/2}$$

Отсюда

$$\int_0^L n^2 rr''\varphi^2 dz \leqslant n^2 \int_0^L \frac{1}{r^2}\int_0^z rr'' dz dz \int_0^L r^2\varphi'^2 dz$$

и положительность J при достаточно малых L очевидна.

В рассматриваемом случае оба граничных условия естественные и можно рассматривать класс функций, не удовлетворяющих никаким граничным условиям, и в качестве функции $\varphi(z, \xi)$ определить функцию, удовлетворяющую условию

$$\int_0^\xi r(z) r''(z) \varphi(z, \xi) dz = 0$$

Приближенное значение собственного размера определится из уравнения $J(\xi) = 0$.

Заметим, что во всех рассмотренных случаях функционал (1.20) имеет сильный экстремум, и потому функцию $\varphi(z, \xi)$ можно выбирать просто непрерывной и кусочно дифференцируемой. В частности, для упрощения вычислений иногда удобно выбирать функцию $\varphi(z, \xi)$ кусочно линейной.

Чтобы найти приближенное значение следующего собственного размера, можно рассмотреть функционал в промежутке $[H_1, L)$:

$$J(n, L) = \int_{H_1}^L r^2\varphi'^2 - n^2 rr''\varphi^2 dz$$

Здесь H_1 — первое собственное значение. Погрешность второго собственного значения будет зависеть от погрешности первого и такой способ применим лишь для определения небольшого количества собственных размеров при заданном n. С другой стороны, для вычисления больших значений собственных размеров удобнее пользоваться их асимптотическими оценками, полученными, например, при помощи теорем сравнения.

Рассмотрим примеры на определение собственных размеров.

А. Гиперболическая оболочка вращения $r = a\sqrt{b^2 + (z - c)^2}/b$. Уравнение (1.6) будет иметь вид

$$\{[b^2 + (z - c)^2]\,\varphi'\}' + \frac{n^2b^2}{b^2 + (z - c)^2}\,\varphi = 0$$

Введем замену переменной $z = c + b\,\mathrm{tg}\,\alpha$, тогда получим уравнение

$$d^2\varphi/d\alpha^2 + n^2\varphi = 0$$

решения которого суть $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$. Определим $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ согласно условиям (1.9) и, подставляя в соотношения некорректности (1.11), получим (1.21)

$$[\sqrt{b^4 + (a^2 + b^2)c^2}\,\sqrt{b^4 + (a^2 + b^2)(H - c)^2}\,k_1k_3 - a^2b^2k_2k_4]\,\sin n\,\operatorname{arctg}\frac{bH}{b^2 - c(H - c)} = 0$$

$$[\sqrt{b^4 + (a^2 + b^2)(H - c)^2}\,k_2k_3 - \sqrt{b^4 + (a^2 + b^2)c^2}\,k_4k_1]\cos n\,\operatorname{arctg}\frac{bH}{b^2 - c(H - c)} = 0$$

Отсюда видно, что решение может не существовать для всех n, т. е. для любой нагрузки, когда квадратные скобки в соотношениях равны нулю. В этом случае

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\pm ab}{[b^4 + (a^2 + b^2)c^2]^{1/2}}, \qquad \frac{k_3}{k_4} = \frac{\pm ab}{[b^4 + (a^2 + b^2)(H - c)^2]^{1/2}}$$

Если k_1, k_2 (или k_3, k_4) пропорциональны косинусам углов, которые координатные усилия T и S составляют с направлением заданного тангенциального усилия R на крае $z = 0$ (или $z = H$), то полученные условия означают, что любой размер H будет собственным, когда направление R в каждой точке края перпендикулярно направлению образующей гиперболоида в этой точке.

Рассмотрим случаи $k_2 = k_4 = 0$ или $k_1 = k_3 = 0$ и положим $c = H/2$, что соответствует симметричному расположению гиперболоида относительно осей координат. Здесь для выполнения соотношений (1.21) необходимо

$$\sin n\,\operatorname{arctg}\frac{4bH}{4b^2 - H^2} = 0$$

Решая уравнение относительно собственного размера H, получим, во-первых,

$$H_m(n) = 2b\csc\frac{m\pi}{n}\left(-\cos\frac{m\pi}{n} \pm 1\right) \qquad (m = 1, 2, 3\ldots;\ m < n)$$

Во-вторых, для нечетных n имеем $H = 2b$. Последнее означает в этих двух случаях, что размер $H = 2b$ будет собственным для всякой нагрузки заданной нечетной функцией от β.

Для случаев $k_2 = k_3 = 0$ или $k_1 = k_4 = 0$ имеем

$$\cos n\,\operatorname{arctg}\frac{4bH}{4b^2 - H^2} = 0, \qquad H_m(n) = 2b\csc\frac{(2m + 1)\pi}{2n}\left(-\cos\frac{(2m + 1)\pi}{2n} \pm 1\right)$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots;\ m < n)$$

здесь $H = 2b$ будет собственным размером для всех четных n.

Б. «Степенная» оболочка $r = A_0(z + c)^\nu$, $\nu(\nu - 1) > 0$. Уравнение (1.6) в этом случае имеет вид

$$[(z + c)^{2\nu}\varphi']' + n^2\nu(\nu - 1)(z + c)^{2\nu - 2}\varphi = 0 \qquad (1.22)$$

Его решения существуют в двух формах. В случае $\theta_n^2 = \nu(\nu-1)(n^2-1) - {}^1/_4 > 0$, имеем

$$\varphi_1 = (z+c)^{-\nu+1/2}\cos\ln(z+c)^{\theta_n}, \qquad \varphi_2 = (z+c)^{-\nu+1/2}\sin\ln(z+c)^{\theta_n}$$

Условия (1.11) здесь имеют вид

$$\left[k_1k_3\,\frac{H+c}{c^{\nu-1}A_0^2}\,A(0)\,A(H) - k_2k_4\nu(\nu-1)\right]\sin\ln\left(\frac{H+c}{c}\right)^{\theta_n} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left[\frac{k_1k_4}{c^\nu}\left(\frac{c}{H+c}\right)^{1/2}A(0) + \frac{k_3k_2}{(H+c)^\nu}\left(\frac{H+c}{c}\right)^{1/2}A(H)\right]\sin\ln\left(\frac{H+c}{c}\right)^{\theta_n} +$$

$$+\,\theta_n\left[\frac{k_1k_4}{c^\nu}\left(\frac{c}{H+c}\right)^{1/2}A(0) - \frac{k_3k_2}{(H+c)^\nu}\left(\frac{H+c}{c}\right)^{1/2}A(H)\right]\cos\ln\left(\frac{H+c}{c}\right)^{\theta_n} = 0$$

$$A(z) = \sqrt{1 + A_0^2\nu^2(z+c)^{2\nu-2}}$$

Здесь, как это видно из второго соотношения, не существует собственного размера для всех n.

Рассмотрим случай совпадения собственных размеров с нулями решения уравнения (1.6): $k_2 = k_4 = 0$, что соответствует заданию координатного усилия T. Здесь необходимо

$$\sin\ln\left(\frac{H+c}{c}\right)^{\theta_n} = 0, \qquad \ln\left(\frac{H+c}{c}\right)^{\theta_n} = m\pi \qquad (m = 1, 2\ldots)$$

Отсюда для собственных размеров получим формулу

$$H_m(n) = c\left(\exp\frac{m\pi}{\theta_n} - 1\right) \tag{1.23}$$

Сравним точные значения (1.23) с оценками, полученными при помощи теоремы сравнения. Для этого воспользуемся оценками в форме (1.19), которые в данном случае имеют вид

$$\frac{\pi m(c+L)}{\sqrt{\nu(\nu-1)(n^2-1)}} \geqslant H_m(n) \geqslant \frac{\pi mc}{\sqrt{\nu(\nu-1)(n^2-1)}}$$

Для $\nu = 2$, $n = 2$, $m = 1$ подсчитаем нижнюю оценку

$$H_1(2) \geqslant {}^1/_6\sqrt{6}\,\pi c \approx 2.5748c$$

Точное значение в этом случае

$$H_1(2) = \left(\exp\frac{2\pi}{\sqrt{23}} - 1\right)c \approx 2.7848c$$

Для оценки сверху рассмотрим минимум функционала

$$J(\xi) = A_0^2\int_0^\xi (z+c)^{2\nu}\varphi'^2(z,\xi) - n^2\nu(\nu-1)(z+c)^{2\nu-2}\varphi^2(z,\xi)\,dz$$

Функцию $\varphi(z, \xi)$ определим следующим образом:

$$\varphi(z,\xi) = \frac{\varphi(z,\xi)}{(z+c)^{\nu-1}}, \qquad \varphi_0(z,\xi) = \begin{cases} z/\eta, & 0 \leqslant z \leqslant \eta \\ (\xi - z)/(\xi - \eta), & \eta \leqslant z \leqslant \xi \end{cases}$$

Тогда получим

$$J(\xi) = A_0^2\left[-\left(1 + \frac{k-\nu}{3}\right)\xi + \frac{c^2}{\eta} + \frac{(\xi+c)^2}{\xi-\eta}\right], \qquad k = (\nu-1)\left[(n^2-1)\nu + 1\right]$$

Наименьшее значение верхней оценки определится из условия $\partial J/\partial\eta = 0$. Тогда

$$\eta = \frac{c\xi}{\xi + 2c}, \qquad J(\xi) = \left(-\frac{k-\nu}{3}\xi + 4c + \frac{4c^2}{\xi^2}\right)A_0^2$$

Собственный размер определится из условия $J(\xi) = 0$. Это дает

$$H_1(n) \leqslant 6\,\frac{1 + \sqrt{1 + (k - \nu)/3}}{k - \nu}\, c$$

В частности, при $\nu = 2$, $n = 2$, $k = 7$ получим

$$H_1(2) \leqslant {}^2/_5\,(3 + 2\sqrt{6})\, c \approx 3.1596\, c$$

2. После того как решена статическая задача деформации определяются при помощи определяющих соотношений теории оболочек [1], которые в данном случае можно представить в виде

$$\varepsilon_1 = \left(1 - \frac{\sigma r r''}{A^2}\right)\frac{T}{2Eh}, \qquad \varepsilon_2 = \left(\frac{r r''}{A^2} - \sigma\right)\frac{T}{2Eh}, \qquad \omega = \frac{1+\sigma}{Eh}\, S \quad (2.1)$$

Здесь E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона, $2h$ — толщина оболочки. Геометрическая задача безмоментной теории для оболочек вращения будет заключаться в интегрировании уравнений для перемещений [1] в данном случае вида

$$\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial A u}{\partial z} + r''\frac{\partial v}{\partial \beta}\right) = \varepsilon_1 + \frac{r r''}{A^2}\varepsilon_2, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{r}{A}\frac{\partial}{\partial z}\frac{v}{r} = \omega \qquad (2.2)$$

при следующих граничных условиях: в точках каждого края оболочки заданы тангенциальные перемещения вида

$$\begin{aligned} c_1 u(0, \beta) + c_2 v(0, \beta) &= U_0(\beta) \\ c_3 u(H, \beta) + c_4 v(H, \beta) &= U_1(\beta) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

где u, v — перемещения в направлении координатных линий z и β соответственно.

Система уравнений (2.2) имеет гиперболический характер при $r r'' > 0$. Введем функцию Φ по формулам

$$u = -\frac{r^2}{A}\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad v = r\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$$

Однородная система (2.3) сводится к уравнению (1.3) и исследование корректности геометрической задачи возможно аналогичным образом. В случае, когда H есть собственный размер и геометрическая задача является сопряженной к статической, т. е. если направление, в котором задано перемещение U в (2.3), в каждой точке края перпендикулярно направлению заданного в (1.2) усилия R, то геометрическая задача разрешима лишь при соблюдении условий, приведенных в [1].

Рассмотрим теперь чисто геометрическую задачу, когда на каждом крае оболочки заданы по два тангенциальных перемещения. Покажем, что такая задача всегда корректна. Согласно (2.1), (2.2) и с учетом однородных уравнений равновесия справедливо следующее соотношение:

$$\int_0^H\int_0^{2\pi}\left[\left(1 - 2\sigma\frac{r r''}{A^2} + \frac{(r r'')^2}{A^4}\right)\frac{T^2}{2Eh} + \frac{1+\sigma}{Eh}S^2\right] r A\, d\beta\, dz =$$

$$= \int_0^H\int_0^{2\pi}\left[\left(\varepsilon_1 + \frac{r r''}{A^2}\varepsilon_2\right)T + \omega S\right] r A\, d\beta\, dz = \int_0^H\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial A u}{\partial z} + \frac{r''}{A^2}\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)T + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{r}{A}\frac{\partial}{\partial z}\frac{v}{r}\right)S\right] r A\, d\beta\, dz = \int_0^{2\pi}(uT + vS)\, r\Big|_0^H d\beta$$

Это соотношение есть частный случай более общего соотношения, полученного в [1] для произвольных оболочек.

Задание на каждом крае двух тангенциальных граничных условий для перемещений эквивалентно заданию перемещений u и v. В случае однородной геометрической задачи $u = v = 0$ на каждом крае оболочки. Тогда интеграл на границе равен нулю. Так как $-1 < \sigma \leqslant \leqslant 1/2$, то выражение в круглых скобках первого интеграла всегда положительно и равенство нулю интеграла возможно лишь, когда $T = S = 0$. Из (2.1) следует, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \omega = 0$ и однородная геометрическая задача сводится к решению однородных уравнений (2.2). Для граничных условий: $u = v = 0$ на крае, однородные уравнения (2.2) имеют только тривиальные решения и это означает, что геометрическая задача в этом случае разрешима.

Вместе с тем нетрудно видеть, что собственные размеры не существуют, например, и в случае следующих тангенциальных граничных условий: на одном крае заданы перемещения, на другом — усилия или перемещения и усилия.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за постановку задачи и за участие в работе.

Поступила 5 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.—Л., Гостехиздат, 1953.
2. Bourgin D. G., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation. Bull. Amer. Math. Soc., 1939, vol. 45, No. 12.
3. Iohn. F. The Dirichlet problem for a hyperbolic equation. Amer. J. Math., 1941, vol. 63, No. 1.
4. Соболев С. Л. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 4, стр. 707—709.
5. Вахания Н. Н. Об одной краевой задаче с заданными на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 6.
6. Александрян Р. А. Построение полной совокупности решений однородной задачи Дирихле для уравнения колебания струны. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 2.
7. Власов В. З. К теории безмоментных оболочек вращения. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
8. Соколов А. М. К вопросу об области применимости безмоментной теории и расчету оболочек отрицательной кривизны. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
9. Гольденвейзер А. Л. Некоторые математические проблемы линейной теории упругих тонких оболочек. Усп. матем. наук, 1960, т. 15, вып. 5 (95).
10. Трикоми Ф. Дж. Дифференциальные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
11. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
12. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. М.—Л., Гостехиздат, 1938.