Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ВЫПУЧИВАНИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК ИЗ ПОЛУЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ АФФИННОЙ НАЧАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Л. М. Зубов

(Ленинград)

Строятся приближенные двумерные уравнения, описывающие выпучивание тонких нелинейно-упругих пластинок при аффинной начальной деформации. Принимается схема полулинейного материала [1], являющаяся обобщением закона Гука на случай конечных деформаций. Сначала дается вариационная формулировка задачи о бифуркации равновесия для полулинейного материала. Для случая аффинной начальной деформации формулируется смешанный вариационный принцип, из которого путем аппроксимации изменения по толщине неизвестных функций выводятся двумерные уравнения нейтрального равновесия. На примере выпучивания круглой пластинки, сжатой по контуру равномерным давлением, проведено сравнение результатов с классической линейной теорией выпучивания пластинок, а также с точным решением для круглого цилиндра, полученным Сенсенигом. Обозначения векторных и тензорных величин, описывающих нелинейно-упругую среду, заимствованы из работы [1].

1. Энергетический критерий бифуркации равновесия для полулинейного материала. Потенциальная энергия упругого тела при отсутствии объемных сил и «мертвой» поверхностной нагрузке записывается в виде

$$\Pi = \iiint\limits_v W\,d\tau - \iint\limits_o \mathbf{F}^\circ\cdot\mathbf{u}\,do$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещения, а интегрирование ведется по объему v и поверхности o тела в недеформированном состоянии. Для «полулинейного» материала

$$W = {}^1/_2\lambda s_1{}^2 + \mu s_2$$

$$s_1 = I_1\,(\mathrm{G}^{\times 1/2}) - 3, \qquad s_2 = I_1\,(\mathrm{G}^\times) - 2I_1\,(\mathrm{G}^{\times 1/2}) + 3 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathrm{G}^\times$ — мера деформации Коши, $I_1\,(\mathrm{G}^\times)$ — ее первый инвариант, λ, μ — постоянные.

Рассмотрим некоторое начальное деформированное состояние тела с радиусом-вектором точки упругого тела $\mathbf{R}^\circ$ и соседнее с ним, задаваемое вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^\circ + \eta\mathbf{w}$$

где η — малый параметр.

Для получения вариационной формулировки задачи о бифуркации равновесия необходимо [2] вычислить приращение потенциальной энергии при сообщении точкам тела дополнительного перемещения $\eta\mathbf{w}$ с точностью до членов второго порядка малости

$$\Pi = \Pi_0 + \eta\Pi_1 + \eta^2\Pi_2 + \ldots \qquad (\Pi_0 = \Pi\,(\mathbf{R}^\circ))$$

Из (1.1) получаем

$$W - W_0 = (\lambda s_1^\circ - 2\mu) I_1 (G^{\times 1/2} - G^{\times \circ 1/2}) + \\ + {}^1/{}_2 \lambda I_1^2 (G^{\times 1/2} - G^{\times \circ 1/2}) + \mu I_1 (G^\times - G^{\times \circ}) \tag{1.2}$$

Так как $G^\times = \nabla\mathbf{R} \cdot \nabla\mathbf{R}^T$, то

$$G^\times - G^{\times\circ} = \eta (\nabla\mathbf{R}^\circ \cdot \nabla\mathbf{w}^T + \nabla\mathbf{w} \cdot \nabla\mathbf{R}^{\circ T}) + \eta^2 \nabla\mathbf{w} \cdot \nabla\mathbf{w}^T$$

Сославшись на формулу [1]

$$\nabla\mathbf{R} = \sqrt{G_k}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k'$$

где G_k — главные значения тензора $G^\times$, а $\mathbf{e}_k$ и $\mathbf{e}_k'$ — орты главных направлений соответственно меры деформации Коши и меры деформации Альманзи, имеем

$$I_1 (G^\times - G^{\times\circ}) = 2\eta \sqrt{G_k^\circ}\, \mathbf{e}_k^\circ \cdot \nabla\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_k^{\circ\prime} + \eta^2 \nabla\mathbf{w} \cdot\cdot \nabla\mathbf{w}^T \tag{1.3}$$

Для вычисления величины $I_1 (G^{\times 1/2} - G^{\times\circ 1/2})$ представим тензор $G^{\times 1/2}$ в виде

$$G^{\times 1/2} = G^{\times\circ 1/2} + \eta \left(\frac{d}{d\eta} G^{\times 1/2}\right)_{\eta=0} + \frac{1}{2}\eta^2 \left(\frac{d^2}{d\eta^2} G^{\times 1/2}\right)_{\eta=0} + \ldots$$

Далее запишем тождество $\nabla\mathbf{R} \cdot \mathrm{A}^T = G^{\times 1/2}$, в котором $\mathrm{A} = \mathbf{e}_s\mathbf{e}_s'$ есть тензор поворота главных осей деформации, и продифференцируем его по параметру η

$$\nabla\mathbf{w} \cdot \mathrm{A}^T + \nabla\mathbf{R} \cdot (\mathrm{A}^\cdot)^T = (G^{\times 1/2})^\cdot$$

Приходим к тождеству

$$I_1^\cdot (G^{\times 1/2}) = \nabla\mathbf{w} \cdot\cdot \mathrm{A}^T + \nabla\mathbf{R} \cdot\cdot (\mathbf{A}^\cdot)^T$$

При помощи формулы [1]

$$(\mathrm{A}^\cdot)^T = \frac{\mathbf{e}_k \cdot \nabla\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s'}{\sqrt{G_k} + \sqrt{G_s}} (\mathbf{e}_s'\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k'\mathbf{e}_s) \tag{1.4}$$

легко доказать, что $\nabla R \cdot\cdot (\mathrm{A}^\cdot)^T \equiv 0$. В самом деле

$$\nabla\mathbf{R} \cdot\cdot (\mathrm{A}^\cdot)^T = \sqrt{G_m}\mathbf{e}_m' \quad (\mathbf{e}_s'\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k'\mathbf{e}_s) \cdot \mathbf{e}_m \frac{\mathbf{e}_k \cdot \nabla\mathbf{w} . \mathbf{e}_s'}{\sqrt{G_s} + \sqrt{G_k}} =$$

$$= \sqrt{G_m} (\delta_{sm}\delta_{km} - \delta_{km}\delta_{sm}) \frac{\mathbf{e}_k \cdot \nabla w . \mathbf{e}_s'}{\sqrt{G_s} + \sqrt{G_k}}$$

Здесь δ_{sm} — символ Кронекера. Таким образом

$$I_1^\cdot (G^{\times 1/2}) = \nabla\mathbf{w} \cdot\cdot \mathrm{A}^T = \mathbf{e}_s \cdot \nabla\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s'$$

и далее по (1.4)

$$I_1^{\cdot\cdot} (G^{\times 1/2}) = \nabla\mathbf{w} \cdot\cdot (\mathrm{A}^\cdot)^T = \frac{\mathbf{e}_k \cdot \nabla\mathbf{w} . \mathbf{e}_s'}{\sqrt{G_s} + \sqrt{G_k}} (\mathbf{e}_k \cdot \nabla\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s' - \mathbf{e}_s \cdot \nabla\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_k')$$

Итак, получаем с точностью до малых второго порядка

$$I_1 (G^{\times 1/2} - G^{\times\circ 1/2}) = \eta \mathbf{e}_s^\circ \cdot \nabla\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s^{\circ\prime} + \\ + \frac{1}{2}\eta^2 \frac{\mathbf{e}_k^\circ \cdot \nabla\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s^{\circ\prime}}{\sqrt{G_s^\circ} + \sqrt{G_k^\circ}} (\mathbf{e}_k^\circ \cdot \nabla\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s^{\circ\prime} - \mathbf{e}_s^\circ \cdot \nabla\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_k^{\circ\prime}) \tag{1.5}$$

Подставляя (1.3) и (1.5) в (1.2), приходим к соотношениям

$$\Pi_1 = \iiint\limits_v \{\nabla \mathbf{w}^T \cdot\cdot [2\mu \nabla \mathbf{R}^\circ + (\lambda s_1{}^\circ - 2\mu) \mathrm{A}^\circ]\} \, d\tau - \iint\limits_{o_1} \mathbf{F}^\circ \cdot \mathbf{w} \, do$$

$$\Pi_2 = \iiint\limits_v \Big[\frac{1}{2} \lambda (\nabla \mathbf{w} \cdot\cdot \mathrm{A}^{\circ T})^2 + \mu \nabla \mathbf{w} \cdot\cdot \nabla \mathbf{w}^T + \tag{1.6}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_s{}^\circ} + \sqrt{G_k{}^\circ}} \mathbf{e}_k{}^\circ \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s{}^{\circ\prime} (\mathbf{e}_k{}^\circ \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s{}^{\circ\prime} - \mathbf{e}_s{}^\circ \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_k{}^{\circ\prime})\Big] \, d\tau$$

Здесь o_1 — часть поверхности, на которой заданы внешние силы (на $o_2 \mathbf{w} = 0$). Упругому потенциалу (1.1) соответствует следующий закон состояния [1]:

$$\mathrm{D} = (\lambda s_1 - 2\mu) \mathrm{A} + 2\mu \nabla \mathbf{R} \tag{1.7}$$

где D — тензор напряжений Пиола. Поэтому Π_1 принимает форму

$$\Pi_1 = \iiint\limits_v \mathrm{D}^{\circ T} \cdot\cdot \nabla \mathbf{w} \, d\tau - \iint\limits_{o_1} \mathbf{F}^\circ \cdot \mathbf{w} \, do$$

Применив легко проверяемое тождество

$$\mathrm{P} \cdot\cdot \nabla \mathbf{a} = \nabla \cdot (\mathrm{P}^T \cdot \mathbf{a}) - (\nabla \cdot \mathrm{P}^T) \cdot \mathbf{a} \tag{1.8}$$

и интегрируя по частям, получим

$$\Pi_1 = \iiint\limits_v - (\nabla \cdot \mathrm{D}^\circ) \cdot \mathbf{w} d\tau + \iint\limits_{o_1} (\mathbf{n} \cdot \mathrm{D}^\circ - \mathbf{F}^\circ) \cdot \mathbf{w} \, do \equiv 0$$

так как начальное напряженное состояние будет равновесным и удовлетворяет уравнениям $\nabla \cdot \mathrm{D}^\circ = 0$ в объеме v, $\mathbf{n} \cdot \mathrm{D}^\circ = \mathbf{F}^\circ$ на поверхности o_1.

Следовательно, приращение потенциальной энергии деформации, вычисленное с точностью до малых второго порядка малости, будет однородным квадратичным функционалом над вектором $\mathbf{w}$.

Далее покажем, что условие стационарности этого функционала эквивалентно дифференциальным уравнениям нейтрального равновесия с соответствующими граничными условиями.

Составим вариацию функционала Π_2

$$\delta \Pi_2 = \iiint\limits_v [\lambda \nabla \delta \mathbf{w} \cdot\cdot \mathrm{A}^{\circ T} \nabla \mathbf{w} \cdot\cdot \mathrm{A}^{\circ T} + 2\mu \nabla \mathbf{w} \cdot\cdot \nabla \delta \mathbf{w} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_s{}^\circ} + \sqrt{G_k{}^\circ}} \nabla \delta \mathbf{w} \cdot\cdot (\mathbf{e}_s{}^{\circ\prime} \mathbf{e}_k{}^\circ - \mathbf{e}_k{}^{\circ\prime} \mathbf{e}_s{}^\circ) \mathbf{e}_k{}^\circ \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s{}^{\circ\prime} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_s{}^\circ} + \sqrt{G_k{}^\circ}} \nabla \delta \mathbf{w} \cdot\cdot \mathbf{e}_s{}^{\circ\prime} \mathbf{e}_k{}^\circ (\mathbf{e}_k{}^\circ \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s{}^{\circ\prime} - \mathbf{e}_s \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_k{}^{\circ\prime})\Big] \, d\tau$$

Интегрируя по частям при помощи (1.8) далее получаем

$$\delta \Pi_2 = \iint\limits_o \Big\{\lambda \nabla \mathbf{w}^T \cdot\cdot \mathrm{A}^\circ \mathbf{n} \cdot \mathrm{A}^\circ \cdot \delta \mathbf{w} + 2\mu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{w} \cdot \delta \mathbf{w} +$$

$$+ \mathbf{n} \Big[\frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_s{}^\circ} + \sqrt{G_k{}^\circ}} \nabla \mathbf{w} \cdot\cdot \mathbf{e}_s{}^{\circ\prime} \mathbf{e}_k{}^\circ (\mathbf{e}_k{}^\circ \mathbf{e}_s{}^{\circ\prime} - \mathbf{e}_s{}^\circ \mathbf{e}_k{}^{\circ\prime})\Big] \cdot \delta \mathbf{w}\Big\} \, do -$$

$$- \iiint\limits_v \nabla \cdot \{\lambda \nabla \mathbf{w}^T \cdot\cdot \mathrm{A}^\circ \mathrm{A}^\circ + 2\mu \nabla \mathbf{w} + \frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_s{}^\circ} + \sqrt{G_k{}^\circ}} \nabla \mathbf{w} \cdot\cdot \mathbf{e}_s{}^{\circ\prime} \mathbf{e}_k{}^\circ (\mathbf{e}_k{}^\circ \mathbf{e}_s{}^{\circ\prime} -$$

$$- \mathbf{e}_s{}^\circ \mathbf{e}_k{}^{\circ\prime})\} \cdot \delta \mathbf{w} d\tau$$

Требование $\delta\Pi_2 = 0$ приводит к дифференциальным уравнениям нейтрального равновесия и граничным условиям [1]

$$\nabla\cdot D^{\cdot} = 0 \quad \text{в объеме } v \quad n\cdot D^{\cdot} = 0 \quad \text{на поверхности } o_1 \tag{1.9}$$

$$D^{\cdot} = \frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_s{}^\circ} + \sqrt{G_k{}^\circ}} e_k{}^\circ\cdot\nabla w\cdot e_s{}^{\circ\prime}(e_k{}^\circ e_s{}^{\circ\prime} - e_s{}^\circ e_k{}^{\circ\prime}) + \lambda A^\circ e_k{}^\circ\cdot\nabla w\cdot e_k{}^{\circ\prime} + 2\mu\nabla w \tag{1.10}$$

Заметим, что $w = \delta w = 0$ на o_2. Очевидно и обратное утверждение при выполнении этих уравнений $\delta\Pi_2 = 0$.

Теперь, имея в виду формулу (1.6), функционал Π_2 можно записать в виде

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\iiint\limits_v D^{\cdot}\cdot\cdot\nabla w^T d\tau \tag{1.11}$$

2. Случай аффинной начальной деформации. В этом случае все величины, относящиеся к начальному деформированному состоянию, постоянны и уравнения нейтрального равновесия (1.9), (1.10) могут быть упрощены. Учитывая, что

$$e_s{}^{\circ\prime} = e_s{}^\circ\cdot A^\circ = A^{\circ T}\cdot e_s{}^\circ$$

перепишем (1.10) так

$$D'^{\cdot} = \frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_s{}^\circ} + \sqrt{G_k{}^\circ}} e_k{}^\circ\cdot\nabla w'\cdot e_s{}^\circ(e_k{}^\circ e_s{}^\circ - e_s{}^\circ e_k{}^\circ) + \lambda E e_k{}^\circ\cdot\nabla w'\cdot e_k{}^\circ + 2\mu\nabla w' \tag{2.1}$$

$$D'^{\cdot} = (D^{\cdot})\cdot A^{\circ T},$$

Здесь $w' = w\cdot A^{\circ T}$ — повернутый вектор перемещения. Очевидно, что уравнения (1.9) эквивалентны уравнениям

$$\nabla\cdot D'^{\cdot} = 0 \text{ в } v, \; n\cdot D'^{\cdot} = 0 \text{ на } o_1 \tag{2.2}$$

Преобразованиями, аналогичными проделанным в работе [1], можно привести (2.1) к виду

$$D'^{\cdot} = T(w') - 2\mu E \times (C\cdot\omega') \tag{2.3}$$

где

$$T(w') = \lambda E\nabla\cdot w' + 2\mu\varepsilon', \quad \varepsilon' = {}^1/_2(\nabla w' + \nabla w'^T), \quad \omega' = {}^1/_2\nabla\times w' \tag{2.4}$$

$$C = E + \frac{1}{\mu}\frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_3{}^\circ} + \sqrt{G_2{}^\circ}} e_1{}^\circ e_1{}^\circ + \frac{1}{\mu}\frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_3{}^\circ} + \sqrt{G_1{}^\circ}} e_2{}^\circ e_2{}^\circ +$$

$$+ \frac{1}{\mu}\frac{\lambda s_1{}^\circ - 2\mu}{\sqrt{G_1{}^\circ} + \sqrt{G_2{}^\circ}} \times e_3{}^\circ e_3{}^\circ$$

Таким образом, показано, что уравнения (2.2), (2.3), полученные в [1] для случая трехосного равномерного растяжения, пригодны для любого аффинного преобразования, только вместо истинного вектора перемещений под w надо понимать повернутый вектор перемещений.

Функционал (1.1) также представим через повернутый вектор w'

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\iiint\limits_v (D'^{\cdot})\cdot\cdot\nabla w'^T d\tau$$

В дальнейшем, чтобы не загромождать записи, будем опускать штрих над вектором w и тензором $D^{\cdot}$, условившись понимать под w и $D^{\cdot}$ соответственно $w\cdot A^{\circ T}$ и $(D^{\cdot})\cdot A^{\circ T}$.

Приращение потенциальной энергии Π_2 можно выразить через компоненты тензора $D^{\cdot}$. Для этого представим тензор $D^{\cdot}$ в виде разложения на симметричную и антисимметричную части

$$D^{\cdot} = T - E \times \mathbf{q}$$

где $\mathbf{q}$ — вектор, сопутствующий тензору $D^{\cdot}$. Сравнивая с (2.3), получаем

$$2\mu\nabla\mathbf{w} = T - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma E - E\times(C^{-1}\cdot\mathbf{q}),\quad \sigma = I_1(T),\quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

И далее с использованием тождества

$$I_1(\mathbf{a}\times E\times\mathbf{b}) = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

приходим к искомому выражению

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}\iiint\limits_v (D^{\cdot})\cdot\cdot\nabla\mathbf{w}^T d\tau = \iiint\limits_v \frac{1}{4\mu}\left[T\cdot\cdot T - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma^2 + 2\mathbf{q}\cdot C^{-1}\cdot\mathbf{q}\right] d\tau$$

Вариационному принципу, установленному в п.1, можно придать формулировку смешанного принципа, аналогичного принципу Э. Рейсснера в классической теории упругости. А именно, рассмотрим выражение

$$\Phi = \iiint\limits_v \left[(D^{\cdot})\cdot\cdot\nabla\mathbf{w}^T - \frac{1}{4\mu}\left(T\cdot\cdot T - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma^2 + 2\mathbf{q}\cdot C^{-1}\cdot\mathbf{q}\right)\right] d\tau \qquad (2.5)$$

причем Φ есть функционал над вектором $\mathbf{w}$ и тензором $D^{\cdot}$, которые рассматриваются как независимые функции координат. Численное значение Φ равно Π_2. Легко проверить, что требование стационарности этого функционала приводит к уравнениям нейтрального равновесия и граничным условиям на o_1, записанным в компонентах тензора $D^{\cdot}$ (к сравнению допускаются векторы $\mathbf{w}$, удовлетворяющие условию $\mathbf{w} = 0$ на o_2) и уравнениям, связывающим тензор $\nabla\mathbf{w}$ с тензором $D^{\cdot}$

$$\nabla\cdot D = 0 \ \text{ в } v, \qquad \mathbf{n}\cdot D^{\cdot} = 0 \ \text{ на } o_1$$
$$2\mu\varepsilon = T - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma E, \qquad 2\mu\omega = C^{-1}\cdot\mathbf{q}$$

3. Вывод двумерных уравнений выпучивания пластинок. Предположим, что тонкая пластинка подвергнута аффинному преобразованию в своей плоскости, сопровождаемому равномерным растяжением по оси z. Такая начальная деформация реализуется, например, в прямоугольной пластинке при загружении ее боковых граней силами, лежащими в плоскости пластинки и имеющими постоянную интенсивность вдоль каждой пары противоположных сторон. При описанной деформации ось z будет главной осью деформации, т. е. $\mathbf{e}_3^\circ = \mathbf{e}_3^{\circ\prime} = \mathbf{i}_3$, а в этом случае формы бифуркации равновесия пластинки, согласно (2.2), (2.3), распадаются на два независимых типа: симметричные относительно срединной плоскости $z = 0$ и антисимметричные. Если компоненты перемещения по осям x, y, z обозначим u_1, u_2, w, то для антисимметричных, т. е. изгибных форм, компонента w будет четной функцией z, а u_1, u_2 — нечетными функциями z.

Компоненты $\partial_{13}^{\cdot}$, $\partial_{23}^{\cdot}$, $\partial_{31}^{\cdot}$, $\partial_{32}^{\cdot}$ тензора $D^{\cdot}$ будут четными функциями z, а остальные компоненты — нечетными функциями z.

Аналогично тому, как в работе [3] из принципа Э. Рейсснера выводятся уравнения теории оболочек, мы из смешанного вариационного принципа, сформулированного в п. 2, получим приближенные двумерные уравнения, описывающие изгибные формы бифуркации пластинки.

Для изгибных форм бифуркации тонкой пластинки зададимся следующей аппроксимацией вектора перемещения $\mathbf{w}$ и тензора $\mathbf{D}^\cdot$ от координаты z:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 z + w_0 \mathbf{i}_3, \qquad \mathbf{w}_1 = u_1\mathbf{i}_1 + u_2\mathbf{i}_2 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{D}^\cdot = \frac{12}{h^3}\mathbf{M}z + \frac{3}{4h}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]\mathbf{V}_1\mathbf{i}_3 + \frac{1}{2h}\mathbf{V}_3\mathbf{i}_3 + \frac{3}{2h}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]\mathbf{i}_3\mathbf{V}_2$$

Здесь $\mathbf{M}$ — двумерный тензор, а $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ — двумерные векторы. Компонентом $\partial_{33}^\cdot$ пренебрегаем, так как при $z = \pm {}^1\!/_2 h$ $\partial_{33}^\cdot = 0$ и, кроме того, $\partial_{33}^\cdot$ нечетная функция z. При принятой аппроксимации (3.1) условие $\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}^\cdot = 0$ при $z = \pm {}^1\!/_2 h$ удовлетворяется. Интегральный смысл введенных величин определяется равенствами

$$\mathbf{M} = \int\limits_{-{}^1\!/_2 h}^{{}^1\!/_2 h} \partial_{sk}^\cdot \mathbf{i}_s\mathbf{i}_k z\,dz, \quad {}^1\!/_2(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_3) = \int\limits_{-{}^1\!/_2 h}^{{}^1\!/_2 h} \partial_{s3}^\cdot \mathbf{i}_s\,dz, \quad \mathbf{V}_2 = \int\limits_{-{}^1\!/_2 h}^{{}^1\!/_2 h} \partial_{3s}^\cdot \mathbf{i}_s\,dz \qquad (s, k = 1,2)$$

Подставив выражения (3.1) в (2.5) после преобразований и интегрирования по z, получим

$$\Phi = \iint\limits_S \Big\{\mathbf{M}_c\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\right)\cdot(\nabla w_0+\mathbf{w}_1) + \frac{1}{4}\mathbf{V}_3\cdot(\nabla w_0+\mathbf{w}_1) + 2\boldsymbol{\omega}_1\cdot$$
$$\cdot\,\mathbf{q}_M + {}^1\!/_2({}^1\!/_2\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2)\cdot(\nabla w_0-\mathbf{w}_1) + {}^1\!/_4\mathbf{V}_3\cdot(\nabla w_0-\mathbf{w}_1) - \frac{1}{4\mu}\Big[\frac{12}{h^3}\mathbf{M}_c\cdot\cdot\,\mathbf{M}_c +$$
$$+\frac{3}{5h}\left(\frac{1}{2}\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\right) + \frac{1}{8h}\mathbf{V}_3\cdot\mathbf{V}_3 + \frac{1}{2h}({}^1\!/_2\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2)\cdot\mathbf{V}_3 -$$
$$-\frac{\nu}{1+\nu}\frac{12}{h^3}\sigma_M^2 + \frac{24}{h^3}\mathbf{q}_M\cdot\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{q}_M + \frac{3}{5h}\left(\frac{1}{2}\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2\right)\cdot\mathbf{C}_1^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2\right) +$$
$$+\frac{1}{8h}\mathbf{V}_3\cdot\mathbf{C}_1^{-1}\cdot\mathbf{V}_3 + \frac{1}{2h}\left(\frac{1}{2}\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2\right)\cdot\mathbf{C}_1^{-1}\cdot\mathbf{V}_3\Big]\Big\}\,do$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_c - \mathbf{E}_2\times\mathbf{q}_M$$

$$\sigma_M = I_1(\mathbf{M}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = {}^1\!/_2(\nabla\mathbf{w}_1 + \nabla\mathbf{w}_1^T), \quad \boldsymbol{\omega}_1 = {}^1\!/_2\nabla\times\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{C}_1 = C_2\mathbf{e}_1{}^\circ\mathbf{e}_1{}^\circ + C_1\mathbf{e}_2{}^\circ\mathbf{e}_2{}^\circ = (\mathbf{e}_1{}^\circ\mathbf{e}_2{}^\circ + \mathbf{e}_2{}^\circ\mathbf{e}_1{}^\circ)\cdot\mathbf{C}\cdot(\mathbf{e}_1{}^\circ\mathbf{e}_2{}^\circ + \mathbf{e}_2{}^\circ\mathbf{e}_1{}^\circ)$$

Здесь S — срединная плоскость пластинки; под символом ∇ понимается уже двумерный набла-оператор; $\mathbf{M}_c$ — симметричная часть тензора $\mathbf{M}$; C_1, C_2, C_3 — главные компоненты тензора $\mathbf{C}$.

Вычисление вариации $\delta\Phi$ с интегрированием по частям дает

$$\delta\Phi = \iint\limits_S \{\delta w_0[-{}^1\!/_2\nabla\cdot\mathbf{V}_1 - {}^1\!/_2\nabla\cdot\mathbf{V}_3] + \delta\mathbf{w}_1\cdot[-\nabla\cdot\mathbf{M}_c + \nabla\times\mathbf{q}_M + \mathbf{V}_2] +$$
$$+\delta\mathbf{M}_c\cdot\cdot\left[\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \frac{1}{2\mu}\left(\frac{12}{h^3}\mathbf{M}_c - \frac{\nu}{1+\nu}\frac{12}{h^3}\sigma_M\mathbf{E}_2\right)\right] + \delta\mathbf{q}_M\cdot\left[2\boldsymbol{\omega}_1 - \frac{12}{h^3\mu}\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{q}_M\right] +$$
$$+\delta\mathbf{V}_1\cdot[{}^1\!/_2\nabla w_0 - \frac{1}{4\mu}\left\{\frac{3}{5h}({}^1\!/_2\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2) + \frac{1}{4h}\mathbf{V}_3 + \frac{3}{5h}\mathbf{C}_1^{-1}\cdot({}^1\!/_2\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2) +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4h}\mathbf{C}_1^{-1}\cdot\mathbf{V}_3\right\}] + \delta\mathbf{V}_2\cdot\left[\mathbf{w}_1 - \frac{1}{4\mu}\left\{\frac{6}{5h}({}^1\!/_2\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2) + \frac{1}{2h}\mathbf{V}_3 + \frac{6}{5h}\mathbf{C}_1^{-1}\cdot(\mathbf{V}_2 -\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{V}_1\Big)-\frac{1}{2h}\mathbf{C}_1^{-1}\cdot\mathbf{V}_3\}]+\delta\mathbf{V}_3\cdot[{}^1/_2\nabla w_0-\frac{1}{4\mu}\Big\{\frac{1}{4h}\mathbf{V}_3+\frac{1}{2h}\Big(\frac{1}{2}\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\Big)+$$
$$+\frac{1}{4h}\mathbf{C}_1^{-1}\cdot\mathbf{V}_3+\frac{1}{2h}\Big(\frac{1}{2}\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2\Big)\cdot\mathbf{C}_1^{-1}\Big\}\Big]\Big\}do+\oint_\gamma[\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_c\cdot\delta\mathbf{w}_1-(\mathbf{n}\times\mathbf{q}_M)\cdot\delta\mathbf{w}_1+$$
$$+{}^1/_2\mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_3)\,\delta w_0]\,ds \tag{3.2}$$

Здесь γ — контур, ограничивающий срединную плоскость пластинки; $\mathbf{n}$ — нормаль к нему. Отсюда по условию независимости вариаций приходим к уравнениям равновесия

$$\nabla\cdot\mathbf{M}=\mathbf{V}_2,\qquad \nabla\cdot(\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_3)=0 \tag{3.3}$$

и соотношениям, связывающим $\mathbf{M}$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ с кинематическими величинами

$$\begin{gathered}\mathbf{M}=\frac{2\mu h^3}{12}\Big[\varepsilon_1+\frac{\nu}{1-\nu}\nabla\cdot\mathbf{w}_1\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_2\times(\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega}_1)\Big]\\ \mathbf{V}_1={}^5/_3\mu h(\mathbf{E}_2-\mathbf{C}_1)\cdot[\mathbf{w}_1+\nabla w_0\cdot(\mathbf{E}_2-\mathbf{C}_1)\cdot(\mathbf{E}_2+\mathbf{C}_1)^{-1}]\\ \mathbf{V}_2={}^5/_6\mu h[\nabla w_0\cdot(\mathbf{E}_2-\mathbf{C}_1)+\mathbf{w}_1\cdot(\mathbf{E}_2+\mathbf{C}_1)]\\ \mathbf{V}_3=8\mu h\nabla w_0\cdot\mathbf{C}_1\cdot(\mathbf{E}_2+\mathbf{C}_1)^{-1}\end{gathered} \tag{3.4}$$

Различные варианты граничных условий ясны из структуры контурного интеграла в (3.2). При отсутствии начального напряженного состояния, т. е. при $\mathbf{C}=0$, соотношения (3.3), (3.4) переходят в известные уравнения теории пластинок Э. Рейсснера в случае отсутствия поперечной нагрузки на пластинку [4]. Подставив (3.4) в (3.3), получим уравнения в перемещениях, описывающие выпучивание пластинки

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}_2-\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{w}_1+\nabla\cdot(\mathbf{E}_2+\mathbf{C}_1)^{-1}\cdot(\mathbf{E}_2+{}^{14}/_5\mathbf{C}_1+\mathbf{C}_1^2)\cdot\nabla w_0=0 \tag{3.5}$$
$${}^1/_5h^2\Big[\Big(\frac{\nu}{1-\nu}+\frac{1-\mathbf{C}_3}{2}\Big)\nabla\nabla\cdot\mathbf{w}_1+\frac{1+\mathbf{C}_3}{2}\nabla^2\mathbf{w}_1\Big]=\nabla w_0\cdot(\mathbf{E}_2-\mathbf{C}_1)+\mathbf{w}_1\cdot$$
$$\cdot(\mathbf{E}_2+\mathbf{C}_1)$$

4. *Пример.* В качестве простейшего примера рассмотрим осесимметричные формы выпучивания круглой пластинки, сжатой по контуру равномерно распределенным нормальным давлением. Край пластинки может свободно перемещаться по оси z, но закреплен от поворота.

Введем в недеформированной пластинке цилиндрические координаты r, θ, z и соответствующие базисные векторы $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{i}_3$. Радиус-вектор точки после деформации зададим в виде

$$\mathbf{R}^\circ=\beta r\mathbf{e}_r+\alpha z\mathbf{i}_3$$

Определим по (1.7) соответствующий этой деформации тензор напряжений Пиола

$$\mathbf{D}^\circ=[\lambda(2\beta+\alpha-3)-2\mu]\,\mathbf{E}+2\mu\,[\beta\mathbf{E}_2+\alpha\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3]$$

Из условий $\partial_{rr}{}^\circ=-p_1$, $\partial_{33}{}^\circ=0$ подберем α и β

$$\beta=1-\frac{1-\nu}{1+\nu}p_1^*,\quad \alpha=1+\frac{2\nu}{1+\nu}p_1^*,\quad p_1^*=\frac{p_1}{2\mu},\quad 0\leqslant p_1^*<\frac{1+\nu}{1-\nu}$$

Здесь p_1 — давление, рассчитанное на единицу площади недеформированного тела. Истинное давление, т. е. рассчитанное на единицу площади деформированного тела, равно

$$\frac{p}{2\mu}=p^*=\frac{p_1^*}{\alpha\beta}=p_1^*\Big[\Big(1-\frac{1-\nu}{1+\nu}p_1^*\Big)\Big(1+\frac{2\nu}{1+\nu}p_1^*\Big)\Big]^{-1} \tag{4.1}$$

Легко видеть, что p есть монотонная функция от p_1, так что минимуму p_1 соответствует минимум p; согласно (2.4) будем иметь

$$C = \frac{-p_1^*}{2 - p_1^*(1-3\nu)/(1+\nu)} E_2 - \frac{p_1^*}{1 - p_1^*(1-\nu)/(1+\nu)} \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 = C_1 E_2 + C_3 \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3$$

В рассматриваемом примере система (3.5) принимает форму

$$\begin{gathered}(1 - C_1)\left(u' + \frac{u}{r}\right) + \frac{1 + {}^{14}/_5 C_1 + C_1^2}{1 + C_1}\left(w_0'' + \frac{w_0'}{r}\right) = 0 \\ \frac{h^2}{5(1-\nu)}\left(u' + \frac{u}{r}\right)' = (1 - C_1) w_0' + (1 + C_1) u \quad (u = \mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_r)\end{gathered} \tag{4.2}$$

Система (4.2) имеет следующее решение:

$$u = \frac{A}{k} J_1(kr), \quad w_0 = -\frac{A(1-C_1)h^2}{24C_1(1-\nu)} J_0(kr) + B$$

где

$$h^2k^2 = \frac{-24C_1(1+C_1)(1-\nu)}{1 + {}^{14}/_5 C_1 + C_1^2} =$$

$$= 48(1-\nu)\, p_1^*\left(1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} p_1^*\right)\left[4 - \frac{16}{5}\frac{3-2\nu}{1+\nu} p_1^* + \frac{8}{5}\frac{3 - 6\nu + \nu^2}{(1+\nu)^2} p_1^{*2}\right]^{-1}$$

Для нетривиального решения из краевого условия $u = 0$ при $r = a$ приходим к трансцендентному уравнению $J_1(ka) = 0$ и для критических значений внешнего давления получается уравнение

$$\left[\frac{8}{5}\frac{3-6\nu+\nu^2}{(1+\nu)^2}\frac{h^2}{a^2}\gamma_n^2 + \frac{48(1-\nu)^2}{1+\nu}\right] p_1^{*2} - $$

$$-\left[\frac{16}{5}\frac{3-2\nu}{1+\nu}\frac{h^2}{a^2}\gamma_n^2 + 48(1-\nu)\right] p_1^* +$$

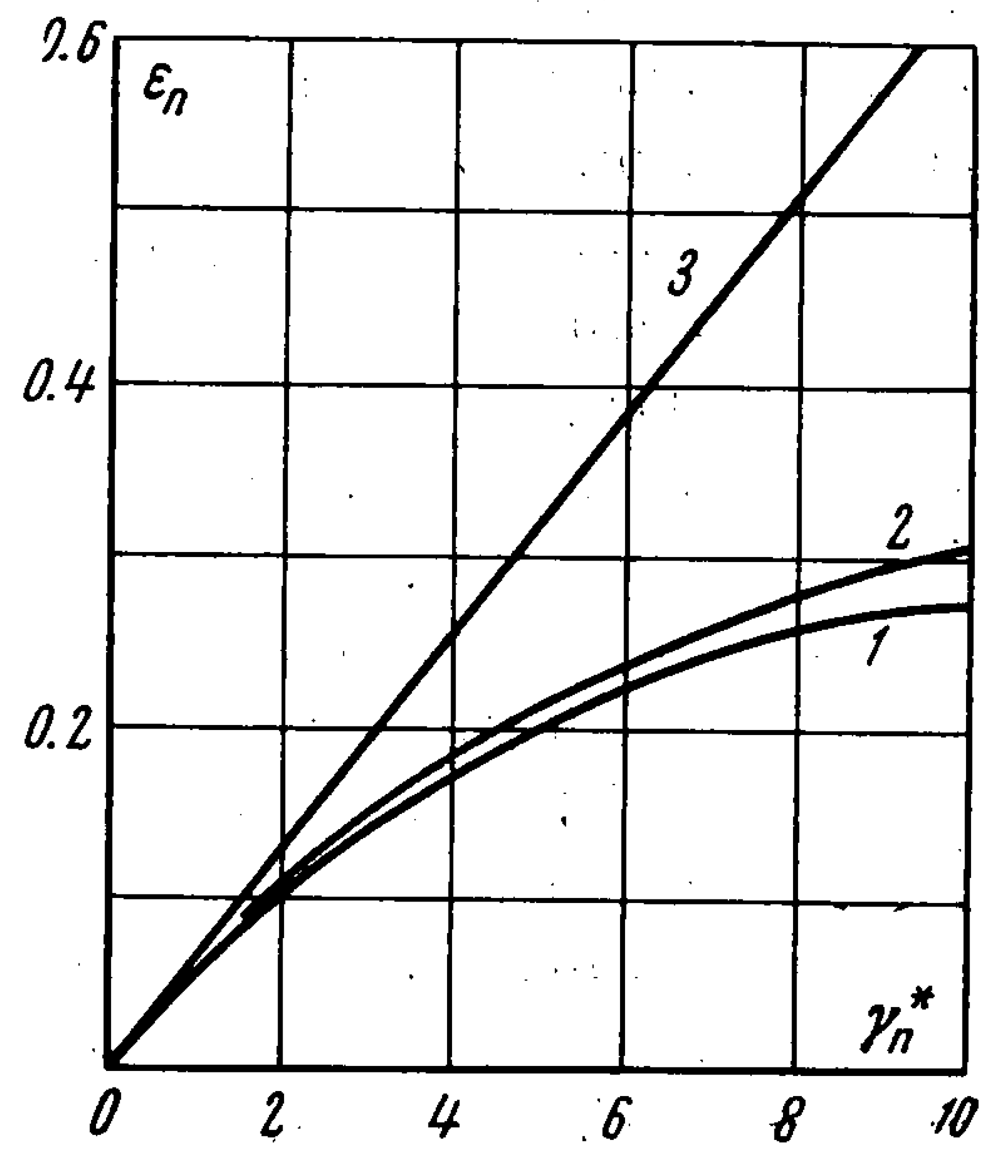
$$+ 4\frac{h^2}{a^2}\gamma_n^2 = 0$$

где γ_n — нули бесселевой функции: $J_1(\gamma_n) = 0$

При этом второе краевое условие

$$\mathbf{e}_r\cdot(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3) = 0 \quad \text{при } r = a$$

также выполняется.



На фигуре, кривой *1* представлена зависимость $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\gamma_n^*)$ для $\nu = 0.3$ критического относительного сокращения радиуса пластинки

$$\varepsilon_n = 1 - \beta_n = \frac{1-\nu}{1+\nu} p_{1n}^*, \quad \gamma_n^* = \gamma_n^2 \frac{h^2}{a^2}$$

Кривая *2* соответствует точному решению об осесимметричной бифуркации равновесия круглого цилиндра, сжатого по боковой поверхности равномерным давлением, полученному в работе [5].

Прямая линия *3* соответствует классической линейной теории выпучивания пластинок.

Поступила 13 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Теория упругости для полулинейного материала. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
2. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. Naghdi P. M. On the theory of thin elastic shells. Quart. J. appl. math., 1957, vol. 14, No. 4.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
5. Sensenig C. B. Instability of thick elastic solids Communs Pure and Appl. Math., 1964, vol. 17, No. 4.