Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О ДВИЖЕНИИ ДВУХ СФЕР В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

О. В. Воинов

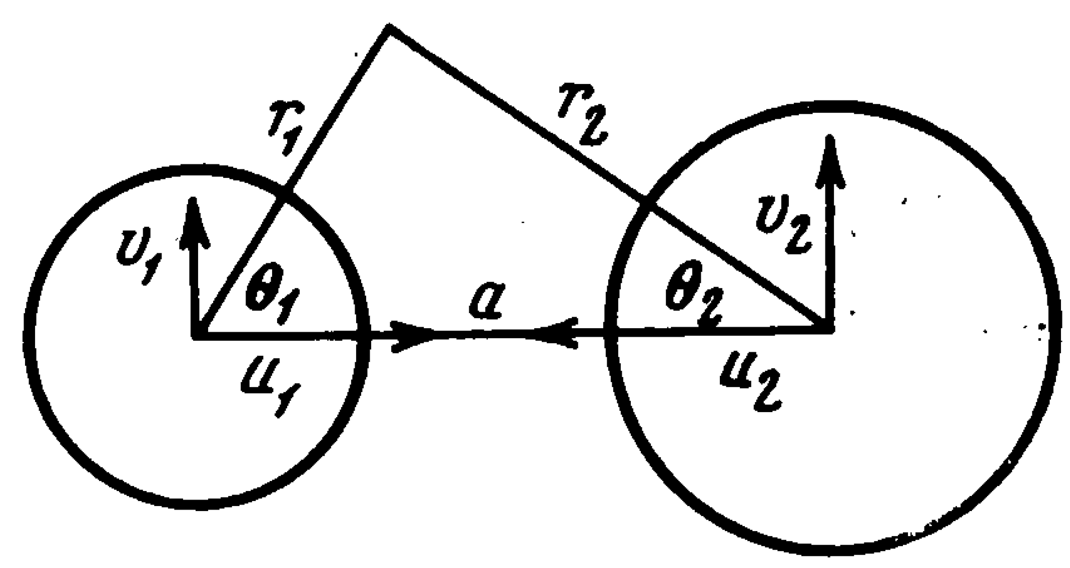
(Москва)

Рассматривается движение двух сфер в идеальной несжимаемой жидкости. Вычисляются кинетическая энергия и силы гидродинамического взаимодействия для случая, когда расстояние между сферами невелико, в частности для контакта сфер. Определяются особенности поля скоростей при контакте сфер.

Кинетическая энергия жидкости для случая движения сфер вдоль линии центров была вычислена Хиксом [1]. При движении сфер перпендикулярно линии центров кинетическая энергия известна, когда расстояние между сферами значительно превосходит их радиусы [2].

1. Потенциал скоростей. В идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, движутся две сферы. Движение жидкости предполагается потенциальным. При вычислении потенциала скоростей достаточно рассмотреть в силу линейности задачи случай, когда скорости сфер компланарны.

Выбираются сферические системы координат r_i, θ_i, φ_i с началом в центре i-й сферы ($i = 1, 2$) и с положительным направлением полярных осей в сторону к соседней сфере (фигура). Азимутальный угол φ_i отсчитывается от направления, перпендикулярного скоростям сфер. За положительное направление проекции u_i скорости на линию центров выбрано положительное направление полярной оси i-й координатной системы. Положительные направления проекций v_1 и v_2 скоростей сфер на линию, перпендикулярную линии центров, выбраны совпадающими.



Потенциал Φ скоростей жидкости должен удовлетворять уравнению Лапласа в области, внешней для двух сфер, и граничным условиям

$$\Delta\Phi = 0, \ \partial\Phi/\partial r_i|_{R_i} = u_i \cos\theta_i + v_i \sin\theta_i \sin\varphi_i$$
$$\Phi \to 0 \quad \text{при } r_i \to \infty$$

где R_i — радиус сферы. Решение этой задачи можно искать методом изображений [1-4]. Потенциал определяется последовательными приближениями и является суммой ряда из функций Φ_n^i, гармонических во внешности i-й сферы

$$\Phi = (\Phi_0^1 + \Phi_1^1 + \Phi_2^1 + \ldots) + (\Phi_0^2 + \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \ldots) \tag{1.1}$$

Причем Φ_n^i удовлетворяют следующим условиям на i-й сфере:

$$\partial\Phi_0^i / \partial r_i = u_i \cos\theta_i + v_i \sin\theta_i \sin\varphi_i \tag{1.2}$$

$$\partial\Phi_n^i / \partial r_i = -\partial\Phi_{n-1}^k / \partial r_i \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

$$\Phi_n^i \to 0 \quad \text{при } r_i \to \infty \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

Здесь и всюду ниже $k = 1, 2$, причем $k \neq i$.

Сначала можно рассмотреть движение сфер вдоль линии центров ($v_1 = v_2 = 0$). В этом случае известно [1-4], что функции Φ_n^i будут потенциалами диполей, находящихся внутри сфер на линии центров. Φ_n^i можно искать в следующей форме:

$$\Phi_n^i = \alpha_n^i (r_i \cos\theta_i - a_{in}) (r_i^2 - 2r_i a_{in} \cos\theta_i + a_{in}^2)^{-3/2} \tag{1.4}$$

Подстановка (1.4) в (1.3) позволяет найти уравнения для неизвестных координат и мощностей диполей

$$a_{in} (a - a_{kn-1}) = R_i^2, \quad a_{i0} = 0 \tag{1.5}$$

$$\alpha_n^i = \alpha_{n-1}^k (a_{in} / R_i)^3, \quad 2\alpha_0^i = -u_i R_i^3 \tag{1.6}$$

Здесь a — расстояние между центрами сфер. Эти рекуррентные соотношения наиболее просто разрешаются, если искать не координаты a_{in}, а произведения координат, аналогично тому, как это делал Мэрфи в электростатической задаче о потенциале двух заряженных сфер [5]. Вводятся новые коэффициенты A_n^i и B_n^i, определяемые по формулам

$$2\alpha_{2n}^i = -u_i (R_i / A_n^i)^3, \quad 2\alpha_{2n-1}^i = -u_k (R_k / B_n^i)^3 \tag{1.7}$$

Тогда согласно (1.6) координаты диполей равны

$$a_{i2n} = R_i B_n^k / A_n^i, \quad a_{i2n-1} = R_i A_{n-1}^k / B_n^i \tag{1.8}$$

Коэффициенты A_n^i и B_n^i определяются из (1.5) — (1.8) в следующей форме:

$$(\tau - \tau^{-1}) A_n^i = \tau^n (\tau + R_i / R_k) - \tau^{-n} (\tau^{-1} + R_i / R_k),$$

$$(\tau - \tau^{-1}) B_n^i = (\tau^n - \tau^{-n}) a / R_i \tag{1.9}$$

Здесь τ — корень уравнения

$$a^2 \tau = (\tau R_1 + R_2)(\tau R_2 + R_1) \tag{1.10}$$

Действительно, подстановка (1.8) в (1.5) дает рекуррентные соотношения

$$R_i B_n^i + R_k B_{n-1}^i = a A_{n-1}^k, \quad R_i A_n^i + R_k A_{n-1}^i = a B_n^k \tag{1.11}$$

с начальными условиями

$$A_0^i = 1, \quad A_1^i = (a^2 - R_k^2) / R_1 R_2; \quad B_0^i = 0, \quad B_1^i = a / R_i \tag{1.12}$$

Соотношения (1.11) разрешаются относительно A_n^i и B_n^i. В частности для A_n^i следует:

$$A_n^i - A_{n-1}^i (a^2 - R_1^2 - R_2^2) / R_1 R_2 + A_{n-2}^i = 0 \tag{1.13}$$

Коэффициент B_n^i удовлетворяет точно такому же уравнению. Общее решение рекуррентной цепочки (1.13) с произвольными условиями в двух номерах есть $c_1\tau^n+c_2\tau^{-n}$, где τ определяется (1.10). Постоянные c_1 и c_2 определяются из начальных условий (1.12), и в результате получаются формулы (1.9).

Сходимость ряда (1.1) с функциями (1.4) имеет место всюду, за исключением точки касания сфер $\theta_i = 0$, $r_i = R_i$, когда сферы находятся в контакте. В этом случае точка сгущения координат диполей a_{in} переходит в точку касания сфер. Последнее обстоятельство является причиной неэффективности метода разложения по сферическим функциям, используемого в [2], когда расстояние между сферами невелико по сравнению с радиусом. В области с выкинутой точкой касания ряд потенциала сходится примерно как $1 / n^3$. Если сферы не касаются одна другой, то, как следует из (1.5) и (1.6), ряд сходится примерно как геометрическая прогрессия, показатель которой быстро убывает с увеличением расстояния между сферами.

2. Касательная скорость на сферах в контакте. На сферах формулы (1.1) и (1.4) для потенциала существенно упрощаются, если учесть (1.5) и (1.6)

$$\Phi|_{R_i} = \frac{\alpha_0^i \cos\theta_i}{R_i^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^i \left(\frac{R_i^2}{a_{in}} - a_{in}\right)(R_i^2 - 2R_i a_{in}\cos\theta_i + a_{in}^2)^{-3/2} \quad (2.1)$$

Если сферы находятся в контакте, то из формулы (1.10) следует $\tau = 1$. При этом из (1.9) получается

$$B_n^i = na / R_i, \qquad A_n^i = 1 + na / R_k \quad (2.2)$$

Подстановка (2.2) в (1.8) позволяет найти координаты диполей

$$a_{i2n} = R_i / (1 + R_k / an), \qquad a_{i2n-1} = R_i (1 - R_k / an) \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (2.3)$$

В силу линейности задачи достаточно отдельно рассмотреть столкновение сфер и движение в одном направлении. Если считать согласно этому $u_1 = \pm u_2$ и ввести переменную $\xi = \operatorname{tg} {}^1/_2\theta$, то из (2.1) — (2.3) и (1.7), (1.8) можно получить выражение для касательной скорости v_θ на сфере

$$v_\theta = \frac{1}{2} u_i \sin\theta_i + \frac{3}{2} u_i \sin\theta_i (1 + \xi^2)^{5/2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n\gamma + 1}{[1 + (n\gamma + 1)^2\xi^2]^{5/2}} \pm \frac{n\gamma - 1}{[1 + (n\gamma - 1)^2\xi^2]^{5/2}} \right\}, \qquad \gamma = \frac{2(R_1 + R_2)}{R_k} \quad (2.4)$$

Знак плюс в (2.4) соответствует движению навстречу с одинаковыми скоростями, а минус соответствует движению в одном направлении.

Если выбрать знак плюс, то асимптотика ряда в (2.5) легко находится при $\xi \to 0$ $(\theta \to 0)$ при помощи формулы Эйлера — Маклорена, согласно которой получается

$$v_\theta = 2u_i R_k / (R_1 + R_2)\theta_i + O(\text{const})$$

Следовательно, в результате сближения сталкивающихся сфер до контакта образовался плоский источник, расположенный в точке касания сфер и выбрасывающий жидкость в плоскости касания.

Когда скорости контактирующих сфер направлены в одну сторону $u_1 = -u_2$, то удобно перейти к системе координат, движущейся вместе со сферами и переписать (2.4) в следующем виде:

$$v_\theta = -{}^3/_2\,(1+\xi^2)^{5/2}\; f(\xi)\; u_i \sin\theta_i \qquad (\xi = \operatorname{tg} {}^1/_2\theta) \tag{2.5}$$

$$f(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\xi, n - 1/\gamma), \qquad g(\xi, x) = \gamma x\,[1 + (x\gamma\xi)^2]^{-5/2} \tag{2.6}$$

Ниже доказывается, что при $\xi \to 0$

$$f(\xi) = -\frac{2\pi}{3}(4\pi + {}^3/_4\gamma\xi)\left(\sin\frac{2\pi}{\gamma}\right)\exp\left(-\frac{2\pi}{\gamma\xi}\right)/\gamma^{5/2}\xi^{7/2} \tag{2.7}$$

Из формул (2.5) и (2.7) следует, что касательная скорость на сфере экспоненциально убывает с уменьшением расстояния до точки контакта. Так, в случае сфер одного радиуса скорость в окрестности контакта изменяется как $\exp(-\pi/\theta)/\theta^{5/2}$. Следовательно, жидкость застаивается в окрестности контакта сфер.

Асимптотика (2.7) получается из (2.6) при помощи формулы суммирования Пуассона, которая имеет вид [6]

$$f(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\xi, n - 1/\gamma) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i l/\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i l x} g(\xi, x)\, dx \tag{2.8}$$

Интегралы в (2.8) обозначим через I_l, причем $I_l = -I_{-l}$, так как $g(\xi, x) = -g(\xi, -x)$. В интегралах делается замена переменной $x\xi\gamma = t$. При этом

$$I_l = \frac{1}{\gamma\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty} t\,(1+t^2)^{-5/2} e^{i\sigma t}\, dt \qquad \left(\sigma = -\frac{2\pi l}{\xi\gamma}\right) \tag{2.9}$$

Прежде чем переходить к новому пути интегрирования, необходимо проинтегрировать по частям (2.9), а затем полученное подынтегральное выражение подправить в точке $t = i$, если $\sigma > 0$ с тем, чтобы сделать сходящимся интеграл по мнимой оси до точки $t = i$. В результате I_l принимает вид

$$I_l = \frac{i\sigma}{3\gamma\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1+it}{(1+t^2)^{3/2}} + \frac{\sigma}{(1+t^2)^{1/2}}\right] e^{i\sigma t}\, dt \tag{2.10}$$

Для преобразования (2.10) выбирается контур, состоящий из следующих частей: от $-R$ до $+R$ вдоль $\operatorname{Im} t = 0$; часть окружности $Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, {}^1/_2\pi]$; отрезок от $iR + \varepsilon$ до $i + \varepsilon$; часть окружности $\varepsilon e^{i\theta} + i$, $\theta \in [-\pi, 0]$; отрезок от $i - \varepsilon$ до $iR - \varepsilon$; часть окружности $Re^{i\theta}$, $\theta \in [{}^1/_2\pi, \pi]$; ($R$ и ε — действительные числа). Функция $(1+t^2)^{1/2}$ принимает значение $-i\,(y^2-1)^{1/2}$ на отрезке $iy - \varepsilon$ и $i\,(y^2-1)^{1/2}$ — на отрезке $iy + \varepsilon$. При $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ на основании теоремы Коши следует:

$$I_l = \frac{2i\sigma}{3\gamma\xi^2}\int_1^{\infty}\frac{1+\sigma(y+1)}{(1+y)(y^2-1)^{1/2}} e^{-\sigma y}\, dy$$

Замена переменной $y = 1 + u^2$ и разложение полученной при этом подынтегральной функции в ряд позволяет вычислить первые члены асимптотики I_l при $\sigma \to \infty$ $(\xi \to 0)$

$$I_l = {}^1/_3 i\pi\sqrt{-l}\,({}^3/_4\xi\gamma - 4\pi l)\exp\left(\frac{2\pi l}{\xi\gamma}\right)\gamma^{-5/2}\xi^{-7/2} \tag{2.11}$$

Здесь учтено, что $\sigma = -2\pi l / \xi\gamma$. Формула (2.11) верна только для $l < 0$. Используя, что I_l — нечетная функция l, из (2.11) и (2.8), учитывая только $l = \pm 1$, можно получить формулу (2.7).

3. Кинетическая энергия жидкости. Кинетическая энергия T идеальной несжимаемой жидкости, как известно [3,4], выражается через значения потенциала на граничных поверхностях

$$\frac{2}{\rho}T = \int\limits_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \tag{3.1}$$

Движение двух сфер всегда можно представить как сумму трех движений: движения сфер вдоль линии центров и движений вдоль двух взаимно-ортогональных направлений, которые ортогональны линии центров. Кинетическая энергия жидкости при произвольном движении сфер равна сумме кинетических энергий жидкости в каждом из этих трех движений в отдельности [1,2]. Это свойство аддитивности можно доказать с помощью соображений симметрии [1,2] или, исходя из простейших свойств потенциала и тождеств Грина. Аддитивность кинетической энергии позволяет ограничиться вычислением кинетической энергии для двух случаев: движение сфер вдоль линии центров и перпендикулярно ей с компланарными скоростями.

Когда сферы движутся только вдоль линии центров, подстановка формул (1.2) и (2.1) в (3.1) после вычисления интеграла

$$\int\limits_0^\pi \frac{(R_i^2 - a_{in}^2)\cos\theta\sin\theta}{a_{in}(R_i^2 - 2R_i a_{in}\cos\theta + a_{in}^2)^{3/2}} d\theta = \frac{2}{R_i^2}$$

позволяет найти кинетическую энергию жидкости

$$\frac{1}{2\pi\rho}T = -\sum_{i=1}^{2} u_i\left(\frac{1}{3}\alpha_0^i + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^i\right) \tag{3.2}$$

Эта задача была решена Хиксом в несколько иной форме [1,2]. Здесь α_n^i известны из (1.7) и (1.9) как функции τ. Связь τ и a дается формулой (1.10).

Кинетическая энергия есть квадратичная форма по скоростям

$$\frac{1}{\pi\rho}T = A_1 u_1^2 + 2Bu_1u_2 + A_2u_2^2 \tag{3.3}$$

Коэффициенты A_i, B можно записать согласно (1.7) и (3.3) в форме

$$\frac{A_i}{R_i^3} = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(A_n^i)^3}, \qquad \frac{B}{R_k^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(B_n^i)^3} \tag{3.4}$$

где A_n^i и B_n^i известны из (1.9).

Когда сферы находятся в контакте, коэффициенты A_i, B принимают особенно простой вид, если учесть (2.2)

$$\frac{A_i}{R_i^3} = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + n\frac{R_1+R_2}{R_k}\right)^{-3}, \qquad B = \zeta(3)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^{-3}$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана. В частности, если радиусы сфер равны, нетрудно вычислить

$$A = R^3(7/8\,\zeta(3) - 2/3) \approx 0.385\,R^3, \qquad B = 0.125\zeta(3)R^3 \approx 0.150\,R^3$$

Это совпадает с аналогичным результатом [1].

4. Силы гидродинамического взаимодействия двух сфер на малых расстояниях. Движение сфер в идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнениями Лагранжа [3,4], поэтому $\partial T / \partial a$ будет силой гидродинамического взаимодействия двух сфер. Хикс установил [1], что ряды, определяющие коэффициенты квадратичной формы $\partial T / \partial a$, расходятся, если одна сфера касается другой. Два старших члена асимптотики сумм рядов можно получить следующим способом. Обозначая общий член одного из рядов для dA_i / da или dB / da, определяемых почленным дифференцированием формулы (3.4) через $f(n, \tau)$, можно отметить, что функции

$$\sum_{n=E[1/(\tau-1)]}^{\infty} f(n, \tau), \qquad \sum_{n=1}^{E[1/(\tau-1)]} [f(n, \tau) - f(n, 1)]$$

где $E(1 / (\tau - 1)$ — целая часть $(\tau - 1)^{-1}$, ограничены при $\tau \to 1$. Кроме того, разность $f(n, \tau) - f(n, 1)$ стремится к нулю равномерно по n при $\tau \to 1$ благодаря тому, что $f(n, \tau)$ равномерно по τ стремится к нулю при $n \to \infty$. Это выполняется несмотря на то, что функция $f(n, \tau)$ не будет равномерно непрерывной функцией аргумента τ. В силу сделанных замечаний в тождестве

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n, \tau) = \sum_{n=1}^{E[1/(\tau-1)]} f(n, 1) + \sum_{n=1}^{E[1/(\tau-1)]} [f(n, \tau) - f(n, 1)] + \sum_{n=E[1/(\tau-1)]}^{\infty} f(n, \tau)$$

два последних ряда можно заменить интегралами. Следовательно, верна формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n, \tau) = \sum_{n=1}^{E[1/(\tau-1)]} f(n, 1) - \int_{1}^{1/(\tau-1)} f(x, 1)\, dx + \int_{1}^{\infty} f(x, \tau)\, dx + O(\tau - 1) \tag{4.1}$$

При применении последней формулы к рядам (3.4), определяющим коэффициенты $\partial T / \partial a$, ряд в правой части (4.1) довольно просто разбивается на расходящуюся часть и константу. Интегралы, входящие в (4.1), вычисляются, и в полученных выражениях оставляются величины двух старших порядков по $(\tau - 1)$. В итоге вычислений после несколько громоздких выкладок получается

$$p = R_1 R_2 / (R_1 + R_2), \qquad d = {}^2/_3 - {}^1/_2 \ln 2 - c, \qquad \delta = a - R_1 - R_2$$

$$\frac{1}{p^2} \frac{dA_i}{da} = d + \frac{1}{2} \ln \frac{\delta}{p} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(n+1)(n-1+3p/R_i)}{(n+p/R_i)^4} - \frac{1}{n} \right] \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{p^2} \frac{dB}{da} = d + \frac{1}{2} \ln \frac{\delta}{p} + (1 - 3p^2/R_1 R_2)\, \zeta(3)$$

где c — постоянная Эйлера. В случае сфер одного радиуса, движущихся навстречу с одинаковыми скоростями, на малых расстояниях согласно (4.2), (3.3), (3.4)

$$\partial T / \partial a \approx [{}^1/_2 \ln (a / R - 2) - 0.0948]\, \pi \rho u^2 R^2 \tag{4.3}$$

Из формул (4.2) видно, что разность $dA_i / da - dB / da$ остается конечной при $a \to R_1 + R_2$, когда сферы сближаются до контакта. Можно показать, что эта разность всегда положительна, т. е. сферы, движущиеся в одном направлении, расталкиваются при любых соотношениях радиусов. Из (3.3), (3.4), (4.2) следует, что сферы равных радиусов, движущиеся в контакте в одном направлении, расталкиваются силами, равными

$$\partial T / \partial a = ({}^3/_4\zeta(3) - \ln 2)\, \pi\rho u^2 R^2 \approx 0.2084 \pi\rho u^2 R^2 \tag{4.4}$$

5. Потенциал скоростей при движении сфер перпендикулярно линии центров. Когда сферы движутся перпендикулярно линии центров ($u_1 = u_2 = 0$), нулевое приближение для потенциала, удовлетворяющее (1.2), имеет следующий вид в i-й системе координат:

$$\Phi_0^i = -\frac{R_i^3}{2r_i^2} v_i \sin\theta_i \sin\varphi_i, \quad \Phi_0^k = -R_k^3 v_k \frac{r_i \sin\theta_i \sin\varphi_i}{2(r_i^2 - 2ar_i\cos\theta_i + a^2)^{3/2}} \tag{5.1}$$

Известно [1,2], что потенциал определяется некоторой совокупностью диполей, расположенных внутри сфер на линии центров и ортогональных этой линии. Задача заключается в том, чтобы отыскать всю эту совокупность. Для построения решения удобно ввести координаты диполей, зависящие от безразмерных переменных x_n. Координата диполя $b_{in} = b_{in}(a, x_1, \ldots, x_n)$ определяется аналогично (1.5)

$$b_{in} = R_i^2 x_n (a - b_{kn-1})^{-1}, \quad b_{i0} = 0, \quad x_n \in [0,1] \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.2}$$

Легко видеть, что всегда $b_{in} \leqslant a_{in}$, причем $b_{in} = a_{in}$, только если $x_1 = 1, \ldots, x_n = 1$. Диполь, находящийся в i-й сфере и имеющий координату b_{in}, записывается в виде

$$Q_n^{i]} = r_i \sin\theta_i \sin\varphi_i (r_i^2 - 2r_i b_{in}\cos\theta_i + b_{in}^2)^{-3/2} \tag{5.3}$$

Можно показать, что при фиксированном n уравнению (1.3) удовлетворяют функции

$$\Phi_{n-1}^k = Q_{n-1}^k, \qquad \Phi_n^i = \left(\frac{b_{in}}{R_i}\right)^3 \left(Q_n^i - \int_0^1 Q_n^i x_n\, dx_n\right) \tag{5.4}$$

Здесь в функциях, стоящих вне знака интеграла, $x_n = 1$. Легко видеть, что любую Φ_n^i, входящую в (1.3), можно построить n-кратным применением формул (5.4) к функциям нулевого приближения (5.1). Но чтобы записать выражение для функции Φ_n^i, следует ввести коэффициенты $\beta_n^i = \beta_n^i(a, x_1, \ldots, x_{n-1})$, являющиеся обобщением коэффициентов α_n^i, возникших при решении задачи о движении сфер вдоль линии центров [1]

$$2\beta_{2n}^i = v_i R_i^{3-3n} R_k^{-3n} (a_{k1} b_{i2} b_{k3} \ldots b_{i2n})^3 \tag{5.5}$$

$$2\beta_{2n-1}^i = v_k R_i^{-3n} R_k^{6-3n} (a_{i1} b_{k2} b_{i3} \ldots b_{i2n-1})^3$$

[1] Здесь в каждом b_{im} ($m = 1, 2, \ldots$) — аргумент $x_m = 1$.

Можно отметить, что $|\beta_n^i| \leqslant |\alpha_n^i|$, причем знак равенства достигается, когда $x_1 = 1, \ldots, x_{n-1} = 1$. Кроме новых коэффициентов, следует ввести оператор L_n, определяемый следующим образом:

$$L_n f(x_n) = f(1) - \int_0^1 f(x_n)\, x_n\, dx_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.6}$$

Теперь при помощи (5.1) и (5.4)—(5.6) можно записать Φ_n^i в компактной аналитической форме

$$\Phi_0^i = -{}^1/_2 v_i R_i^3 Q_0^i, \qquad \Phi_n^i = -L_1 \ldots L_{n-1} \beta_n^i L_n Q_n^i \tag{5.7}$$

Тем самым задача нахождения потенциала скоростей решена.

Для вычисления кинетической энергии жидкости достаточно знать потенциал Φ на сферах. Выражение для потенциала на сфере упрощается, если учесть, что

$$Q_{n-1}^k = (b_{in} / R_i)^3 Q_n^i \quad \text{при } r_i = R_i$$

и, следовательно, $\Phi_{n-1}^k = -L_1 \ldots L_{n-1} \beta_n^{i'} Q_n^i$. Тогда согласно (1.3) и (5.7) потенциал на сфере равен

$$\Phi|_{R_i} = -\frac{1}{2} v_i R_i^3 Q_0^i|_{R_i} - \sum_{n=1}^{\infty} L_1 \ldots L_{n-1} \beta_n^i \left(2Q_n^i - \int_0^1 Q_n^i x_n\, dx_n\right)\Big|_{R_i} \tag{5.8}$$

6. Кинетическая энергия жидкости при движении сфер перпендикулярно линии центров. Когда сферы движутся перпендикулярно линии центров с компланарными скоростями ($u_1 = u_2 = 0$), кинетическая энергия вычисляется из формул (1.2), (3.1), (5.3) и (5.8). При этом достаточно учесть, что

$$\int_{S_i} \left(2Q_n^i - \int_0^1 Q_n^i x_n\, dx_n\right) \sin\theta_i \sin\varphi_i\, ds = 2\pi$$

и кинетическая энергия записывается в следующем виде:

$$\frac{1}{\pi\rho} T = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{3} v_i^2 R_i^3 + \sum_{n=1}^{\infty} L_1 \ldots L_{n-1} \beta_n^i v_i\right) \tag{6.1}$$

где оператор L_n определяется формулами (5.6), коэффициент β_n^i известен из (5.5), оператор L_0 равен единичному.

Можно доказать, что ряд в правой части (6.1) сходится быстрее, чем аналогичный ряд в правой части (3.2), который сходится примерно, как $1 / n^3$. Для этого прежде всего показывается, что цепная дробь b_{in}, определяемая согласно (5.2), разлагается в сходящийся $(n-1)$-мерный степенной ряд по $x_1, \ldots, x_{n-1}$ с неотрицательными коэффициентами. В этом нетрудно убедиться, если последовательно разлагать в ряд цепные дроби $b_{i1}, b_{i2}, \ldots$, используя формулу (5.2). Из того, что все b_{in} разлагаются в сходящиеся степенные ряды с неотрицательными коэффициентами в $(n-1)$-мерном кубе $x_1 \in [0,1], \ldots, x_{n-1} \in [0,1]$, следует, что и $|\beta_n^i|$, определяемый по формуле (5.5), также разлагается в сходящийся степенной ряд с неотрицательными коэффициентами в этом же кубе

$$|\beta_n^i| = \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}} C^i_{m_1,\ldots,m_{n-1}} x_1^{m_1} \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}}, \qquad C^i_{m_1,\ldots,m_{n-1}} \geqslant 0 \tag{6.2}$$

Несложные вычисления на основе (5.6) и (5.2) дают

$$0 < |L_1 \ldots L_{n-1}\beta_n^i| = \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}} C^i_{m_1,\ldots,m_{n-1}} \frac{(m_1+1)\ldots(m_{n-1}+1)}{(m_1+2)\ldots(m_{n-1}+2)} <$$

$$< \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}} C^i_{m_1,\ldots,m_{n-1}} = |\alpha_n^i|$$

где α_n^i определяется формулой (1.6) при $u_i = v_i$. Из полученных неравенств видно, что при любых расстояниях между сферами ряд кинетической энергии (6.1) мажорируется рядом кинетической энергии (3.2), если положить $u_i = v_i$. Таким образом, ряд кинетической энергии при движении сфер перпендикулярно линии центров сходится быстрее, чем ряд кинетической энергии при движении сфер вдоль линии центров.

Формулы (5.5), (5.6), (6.1) позволяют найти коэффициенты A_i' и B' кинетической энергии $T = A_1'v_1^2 + 2B'v_1v_2 + A_2'v_2^2$. Так для сфер равных радиусов в случае контакта согласно этим формулам получается

$$A' = 0.347\pi\rho R^3, \qquad B' = 0.067\pi\rho R^3$$

Кинетическая энергия жидкости при движении двух одинаковых сфер в контакте с равными скоростями перпендикулярно линии центров оказывается равной $T = 0.828\pi\rho u^2 R^3$.

Автор благодарит В. Г. Левича, А. М. Головина и А. Г. Петрова за обсуждение результатов работы.

Поступила 12 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Hicks W. M. On the motion of two spheres in a fluid. Phil. Trans., 1880, vol. 171, pp. 455—492.
2. Basset A. B. A treatise on Hydrodynamics, vol. 1, Inc., New Iork, George Bell and sons, 1888.
3. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
4. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
5. Kottler F. Electrostatik der Leiter. Handbuch der Physik. Bd 12, Berlin, Verlag von I. Springer, 1927.
6. Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. Изд-во иностр. лит., 1961.