Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О СОСТАВНЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Я. И. Секерж-Зенькович

(Москва)

Задачу о плоских установившихся волнах конечной амплитуды, вызванных давлением периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости бесконечной глубины, впервые поставил и приближенно решил Л. Н. Сретенский в 1953 г. [1]. В работах автора дано точное решение этой задачи как для потока бесконечной глубины [2,3], так и для случая потока конечной глубины [4–6].

Рассмотренные во всех этих исследованиях волны перестают существовать при обращении в нуль периодической части распределенного по поверхности давления, и течение переходит в равномерный поток. Такие волны назовем вынужденными. Волны конечной амплитуды, отвечающие постоянному по всей поверхности давлению и существующие при особых значениях скоростей потока, назовем свободными. Точное решение задачи об этих волнах впервые дано А. И. Некрасовым в 1921 г. [7].

Ниже устанавливается возможность совместного существования обоих указанных типов волн малой конечной амплитуды при особых значениях скорости потока на бесконечной глубине. Эти волны назовем составными. При обращении в нуль периодической части распределенного по поверхности давления эти волны переходят в волны свободные.

Дается общий метод расчета характеристик таких волн. До конца рассчитаны первые три приближения. Дано приближенное уравнение профиля волны.

1. Постановка задачи и вывод основного интегрального уравнения. Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, ограниченной только сверху свободной поверхностью, на которой давление $p = p_0' + p_0(x)$, при этом $p_0' = \mathrm{const}$, а $p_0(x)$ будет заданной периодической функцией от горизонтальной координаты x. Предположим, что поток движется слева направо с постоянной заданной скоростью c на бесконечной глубине. Как уже отмечено во введении, при наличии слагаемого $p_0(x)$ имеют место вынужденные волны при любых значениях скорости c. Если же $p_0(x)$ отсутствует, то имеют место свободные волны при некоторых специальных значениях c.

Предположим, что давление на свободной поверхности имеет оба слагаемые и что при этом свободная поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, движущейся справа налево с некоторой специальной скоростью. Если эти волны не пропадают при $p_0(x) \equiv 0$, то, как указано, их называем составными.

Пусть искомая составная волна и давление $p_0(x)$ обладают одинаковой симметрией относительно вертикали гребня. Совместим ось y с осью симметрии и направим ее вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси y со свободной поверхностью, а ось x направим вправо.

Плоскость течения xy примем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Введем обычные обозначения: φ — потенциал скоростей, ψ — функция тока, $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей, U, V — проекции вектора скорости $\mathbf{q}$ на оси координат. Тогда имеем

$$\frac{dw}{dz} = -U + iV, \qquad U = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad V = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Для вывода из граничного условия основного уравнения задачи сначала отобразим конформно область, занятую одной волной и представляющую собой вертикальную бесконечную полуполосу, ограниченную сверху волнообразной кривой, на полуполосу $0 \leqslant \varphi \leqslant c\lambda$, $0 \leqslant \psi \leqslant \infty$, в плоскости w, а затем эту полуполосу на внутренность единичного круга с центром в начале координат плоскости $u = u_1 + iu_2$. При этом предполагается, что длина волны λ совпадает с периодом функции $p_0(x)$.

Как известно, последнее отображение дается формулой

$$w = \frac{\lambda c}{2\pi i} \ln u \tag{1.1}$$

При этом профиль волны перейдет в окружность единичного круга с разрезом вдоль радиуса $\arg u = 0$.

Отображение круга $|u| \leqslant 1$ на область одной волны плоскости z определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i}\frac{f(u)}{u}, \qquad f(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^k \tag{1.2}$$

Коэффициенты a_k вещественны, так как волна симметрична относительно оси y и $a_0 = 1$, ибо скорость потока в бесконечности направлена по оси x и равна c.

Используя интеграл Бернулли для поверхности, из формулы (1.2) и учитывая, что на поверхности $p = p_0' + p_0(x)$, дифференцируя по θ, находим

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -g\frac{dy}{d\theta} - \frac{1}{2}\frac{dq^2}{d\theta} \qquad (u = e^{i\theta}) \tag{1.3}$$

Здесь θ — угол радиуса вектора с осью u_1, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, q — модуль вектора скорости $\mathbf{q}$.

Как обычно, вводя функцию [7]

$$\omega(u) = \Phi + i\tau = -i \ln f(u) \tag{1.4}$$

в силу (1.1) и (1.2), находим

$$\frac{dw}{dz} = -ce^{\tau - i\Phi} \tag{1.5}$$

Отсюда следует, что всюду в потоке функция Φ равна углу, образуемому вектором $\mathbf{q}$ с осью x, и что

$$q = ce^{\tau} \tag{1.6}$$

Из (1.4) и (1.2) находим, что при $u = e^{i\theta}$

$$\frac{dx}{d\theta} + i\frac{dy}{d\theta} = -\frac{\lambda}{2\pi} e^{-\tau(\theta)} (\cos\Phi + i\sin\Phi) \tag{1.7}$$

Отсюда и в силу (1.6) из уравнения (1.3) имеем

$$\frac{d}{d\theta} e^{3\tau} = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2}\left(\sin\Phi + \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx}\cos\Phi\right) \tag{1.8}$$

или после интеграции

$$e^{3\tau} = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2\mu}\left[1 + \int_0^\theta \left(\sin\Phi + \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx}\cos\Phi\right) d\eta\right] \tag{1.9}$$

где постоянное интегрирования μ^{-1}, а

$$\mu = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2} e^{-3\tau(\text{c})} \tag{1.10}$$

Параметр μ связан с p_0' — аддитивной константой у p на поверхности. Из (1.9) имеем

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\mu H[\Phi(\theta),\ Q(\theta)]}{3}\left[1 + \mu\int_0^\theta H[\Phi,\ Q]\, d\eta\right]^{-1} \tag{1.11}$$

где

$$H[\Phi(\theta),\ Q(\theta)] = \sin\Phi(\theta) + Q(\theta)\cos\Phi(\theta) \tag{1.12}$$

$$Q(\theta) = \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx}$$

Равенство (1.11) дает связь на окружности $|u| = 1$ между функциями $\tau(\theta)$ и $\Phi(\theta)$.

Так как функция $\tau(\theta)$ симметрична относительно вещественной оси, то $\tau(\theta) = \tau(2\pi - \theta)$.

Отсюда вытекает справедливость известного соотношения Дини

$$\Phi(\theta) = 3\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{d\eta} K(\eta,\theta)\, d\eta \tag{1.13}$$

Здесь опущено произвольное постоянное, так как касательная в вершине гребня горизонтальна. Ядро $K(\eta, \theta)$ представляется в виде

$$K(\eta,\theta) = -\frac{1}{6\pi}\ln\left|\frac{\sin{}^1/_2(\eta-\theta)}{\sin{}^1/_2(\eta+\theta)}\right| = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\eta \sin n\theta}{3n} \tag{1.14}$$

Из (1.14) следует, что нормированные собственные функции $\varphi_n(\theta)$ и собственные числа ν_n ядра $K(\eta, \theta)$ даются формулами

$$\varphi_n(\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}}, \qquad \nu_n = 3n \tag{1.15}$$

Из (1.11) и (1.13) имеем окончательно

$$\Phi(\theta) = \mu\int_0^{2\pi} H[\Phi(\eta),\ Q(\eta)]\left[1 + \mu\int_0^{\eta} H[\Phi,\ Q]\, d\eta_1\right]^{-1} K(\eta,\theta)\, d\eta \tag{1.16}$$

Это и есть интегральное уравнение задачи. Из него при $p = p_0' = \mathrm{const}$ получается известное уравнение А. И. Некрасова [7].

При решении задачи о составной волне будем предполагать, что

$$Q(\theta) = \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n+2} d_n \sin n\theta \tag{1.17}$$

Здесь ε — малый положительный безразмерный параметр, d_n — заданные действительные числа, причем ряд

$$\varepsilon^3 d_1 + \varepsilon^4 d_2 + \ldots + \varepsilon^n d_n + \ldots$$

сходится в круге радиуса $\varepsilon_0 > 0$; принято $d_1 < 0$ (см. замечание в п. 3).

Заметим, что в исходной задаче $p_0(x)$ — заданная периодическая функция x. Можно, однако, показать, что решение изучаемой задачи при условии (1.17) соответствует заданию ряда

$$\frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx} = -\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n+2} c_n' \sin \frac{2\pi n}{\lambda} x \qquad \left(c_n' = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m c'_{mn}\right)$$

При этом либо коэффициенты c_{0n}' можно считать заданными и по ним определить d_n, либо наоборот; коэффициенты c_{mn}' $(m = 1, 2, \ldots)$ определяются через d_n (см. (3.7) п.3).

Если же полагать $d_n = d_{0n} + d_{1n}\varepsilon + d_{2n}\varepsilon^2 + \ldots$ (здесь этого не делаем), то и c_{mn}' $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ можно считать заданными и по ним определить d_{in} $(i = 1, 2, \ldots)$, либо наоборот.

Заметим еще, что функцию $Q(\theta)$ в форме (1.17) можно задать при определении вынужденной волны в случае $\mu_0 = \nu_1$; при этом решение получится в виде ряда по целым степеням ε.

Преобразуем равенство (1.10). На окружности $|u| = 1$ функция $\tau(\theta)$ будет четной, а функция $\Phi(\theta)$ — нечетной. Поэтому примем

$$\Phi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\theta, \qquad \tau(\theta) = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\theta \tag{1.18}$$

Здесь $b_0 = 0$, так как $\omega(0) = 0$ (см. (1.2) и (1.4)).

Отсюда (1.10) принимает вид

$$\mu = \mu_0 \exp\left(3 \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right), \qquad \mu_0 = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2} \tag{1.19}$$

В форме (1.19) бралось уравнение для определения μ в задаче о вынужденной волне [2]. При этом было дано решение как в случае $\mu_0 \neq \nu_n$, так и при $\mu_0 = \nu_1$. Для свободной волны уравнение (1.19) получает вид

$$\mu = \mu_0 (1 - \varepsilon^2) \exp\left(3 \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right), \qquad \mu_0 = \nu_1 = \frac{3g\lambda}{2\pi c_*^2} \tag{1.20}$$

если принять

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_*^2}(1 - \varepsilon^2) \tag{1.21}$$

где c_* — исходное значение скорости волны.

Заметим, что А. И. Некрасов [7] задавал $\mu = \nu_1 + \mu'$ и находил решение, в том числе $1/c^2$, в форме рядов по степеням μ'. Задавая $1/c^2$ в виде (1.21), решение, в том числе μ, строится в виде рядов по ε. Для перехода от одной формы решения к другой следует параметр μ' выразить через ε или наоборот.

Рассматривая составную волну, также примем для $1/c^2$ формулу (1.21) и, следовательно, для μ (1.20). При этом ε — тот же малый параметр, что и в (1.17).

Из (1.21) видно, что ε^2 характеризует малое изменение заданной $1/c_*^2$. Можно было бы в (1.21) взять вместо $(1 - \varepsilon^2)$ множитель $(1 - \alpha^2\varepsilon^2)$. Получающееся в этом предположении решение при $\alpha = 0$ и $Q(\theta) \not\equiv 0$ перешло бы в вынужденную волну. Однако для большей простоты вычислений принято $\alpha = 1$. Положив

$$\Psi(\theta) = \left[1 + \mu \int_0^\theta H[\Phi(\eta), Q(\eta)]\, d\eta\right]^{-1} \tag{1.22}$$

где $H[\Phi, Q]$ согласно (1.12) сводим, как и в случае уравнения А. И. Некрасова [7], уравнение (1.16) к следующей эквивалентной системе из двух уравнений с неизвестными функциями $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$:

$$\Phi(\theta) = \mu \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) H[\Phi(\eta), Q(\eta)]\, \Psi(\eta)\, d\eta \tag{1.23}$$

$$\Psi(\theta) = 1 - \mu \int_0^\theta \Psi^2(\eta) H[\Phi(\eta), Q(\eta)]\, d\eta \tag{1.24}$$

Таким образом, рассматриваемая здесь задача свелась к определению функций $\Phi(\theta, \varepsilon)$, $\Psi(\theta, \varepsilon)$ и параметра $\mu(\varepsilon)$ так, чтобы удовлетворялись уравнения (1.23), (1.24) и (1.20).

2. Построение решения основной системы в виде рядов по степеням ε. Решение основной системы и параметр μ будем искать в виде следующих рядов по степеням ε: (2.1)

$$\Phi(\theta) = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon^n \Phi_n(\theta), \qquad \Psi(\theta) = \sum_{n=0}^\infty \varepsilon^n \Psi_n(\theta),\ \Psi_0 = 1, \qquad \mu = \mu_0 + \sum_{n=1}^\infty \varepsilon^n \mu_n$$

Для получения уравнений, позволяющих определить коэффициенты первых двух из этих рядов, нужно разложения (2.1) подставить в (1.23) и (1.24) и результат разложить по степеням ε; в полученных соотношениях надо сравнить коэффициенты при одинаковых ε^n.

Для этого необходимо разложить $\sin \Phi(\eta)$ и $\cos \Phi(\eta)$ по степеням ε, учитывая (2.1). Первое разложение имеет вид

$$\sin \Phi(\eta) = \sum_{m=1}^\infty A_{2m-1} \Phi^{2m-1} = \sum_{m=1}^\infty A_{2m-1} \left[\sum_{i=1}^\infty \Phi_i \varepsilon^i\right]^{2m-1} = \sum_{n=1}^\infty s_n \varepsilon^n$$

$$\left(A_{2m-1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}\right) \tag{2.2}$$

Так как $A_1 = 1$, и не подставляя значений A_{2m-1} при $m > 1$, имеем

$$s_1 = \Phi_1, \quad s_2 = \Phi_2, \quad s_3 = \Phi_3 + A_3\Phi_1^3, \quad s_4 = \Phi_4 + A_3 3\,\Phi_1^2\Phi_2$$

$$s_5 = \Phi_5 + A_3 3\Phi_1^2\Phi_2^2 + A_3 3\Phi_3\Phi_1^2 + A_5\Phi_1^5$$

. . . .

$$s_n = \sum_{m=1}^{m \leqslant {}^1/_2 (n+1)} A_{2m-1} \left(\sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{(2m-1)!}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_n!} \Phi_1^{\alpha_1} \Phi_2^{\alpha_2} \ldots \Phi_n^{\alpha_n} \right) \tag{2.3}$$

Здесь α_i — целые положительные числа, включая нуль, удовлетворяющие соотношениям

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 2m - 1, \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n \tag{2.4}$$

Второе разложение имеет вид

$$\cos \Phi(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m} \Phi^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i \varepsilon^i \right]^{2m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n \quad \left(A_{2m} = \frac{(-1)^m}{2m!} \right) \tag{2.5}$$

Так как $A_0 = 1$, и не подставляя значений A_{2m} при $m > 1$, будем иметь

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = A_2\Phi_1^2, \quad c_3 = A_2 2\Phi_1\Phi_2$$

$$c_4 = A_4\Phi_1^4 + A_2 2\Phi_1\Phi_3 + A_2\Phi_2^2$$

$$c_5 = A_4 4\Phi_1^3\Phi_2 + A_2 2\Phi_4\Phi_1 + A_2 2\Phi_2\Phi_3$$

. . . .

$$c_n = \sum_{m=1}^{m \leqslant {}^1/_2 n} A_{2m} \left(\sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{2m!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!} \Phi_1^{\alpha_1} \Phi_2^{\alpha_2} \ldots \Phi_n^{\alpha_n} \right) \tag{2.6}$$

Для α_i справедливы соотношения (2.4) с заменой в первом из них $2m - 1$ на $2m$.

Обращаемся к уравнению (1.20), служащему для определения $\mu(\varepsilon)$ в форме ряда (2.1). Считается заданным $\mu_0 = \nu_1$, а μ_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ определяются из (1.20). Укажем рекуррентные формулы для определения μ_i. Из построения функции Φ и (1.18) будет вытекать, что

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}\varepsilon^n, \quad b_2 = \sum_{n=2}^{\infty} b_{2n}\varepsilon^n, \ldots, b_k = \sum_{n=k}^{\infty} b_{kn}\varepsilon^n$$

Если считать, что $b_{ij} = 0$ при $j < i$, то имеем

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}\varepsilon^n, \quad b_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\varepsilon^n, \ldots, b_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn}\varepsilon^n$$

Поэтому

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_k + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{1n} + b_{2n} + \ldots + b_{nn})\, \varepsilon^n \tag{2.7}$$

$$\exp\,[3(b_1 + b_2 + \ldots + b_k + \ldots)] = \exp\left[3 \sum_{n=1}^{\infty} (b_{1n} + b_{2n} + \ldots + b_{nn})\, \varepsilon^n\right]$$

Пусть

$$\exp\left[3\sum_{n=1}^{\infty}(b_{1n}+b_{2n}+\ldots+b_{nn})\,\varepsilon^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n e_n \qquad (2.8)$$

Тогда, как можно показать,

$$e_n=\frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n} j\,(b_{1j}+b_{2j}+\ldots+b_{jj})\,e_{n-j} \qquad (e_0=1) \qquad (2.9)$$

Подставляя в (1.20) разложение для μ и разложение (2.8), сравнивая затем коэффициенты при ε^n, находим

$$\mu_n=\mu_0\,(e_n-e_{n-2}) \qquad (2.10)$$

Здесь надо считать, что $e_{-2}=e_{-1}=0$.

Переходим к решению систем уравнений для $\Phi_n(\theta)$, $\Psi_n(\theta)$ и μ_n. Эти уравнения получаются указанным выше способом с использованием приведенных разложений. Опуская промежуточные вычисления, берем эти уравнения в готовом виде.

2.1. *Определение* $\Phi_1(\theta)$, $\Psi_1(\theta)$ и μ_1. Для этих функций имеем систему

$$\Phi_1(\theta)=\mu_0\int_0^{2\pi}K(\eta,\theta)\,\Phi_1(\eta)\,d\eta, \qquad \Psi_1(\theta)=-\mu_0\int_0^{\theta}\Phi_1(\eta)\,d\eta \qquad (2.11)$$

Так как $\mu_0=\nu_1=3$, то решением первого уравнения, являющегося линейным интегральным однородным уравнением Фредгольма второго рода, будет

$$\Phi_1(\theta)=C_{11}\sin\theta, \qquad C_{11}=\frac{C_{11}'}{\sqrt{\pi}} \qquad (2.12)$$

Как будет показано, константа C_{11} определится из условия разрешимости уравнения для $\Phi_3(\theta)$.

Подставив $\Phi_1(\theta)$ из (2.12) во второе уравнение (2.11), находим

$$\Psi_1(\theta)=-\mu_0C_{11}\int_0^{\theta}\sin\eta\,d\eta=3C_{11}(\cos\theta-1) \qquad (2.13)$$

Для определения μ_1, так как $e_0=1$, из (2.10) имеем

$$e_1=3b_{11}e_0=3C_{11}, \qquad \mu_1=\mu_0e_1=9C_{11} \qquad (2.14)$$

2.2. *Определение* $\Phi_2(\theta)$, $\Psi_2(\theta)$ и μ_2. Эти функции найдутся из системы

$$\Phi_2(\theta)=\mu_0\int_0^{2\pi}K(\eta,\theta)\,[\Phi_2(\eta)+P_2(\eta)]\,d\eta \qquad (2.15)$$

$$\Psi_2=-\int_0^{\theta}[\mu_0\Phi_2(\eta)+\Phi_1(\eta)\,(\mu_1+2\mu_0\Psi_1(\eta))]\,d\eta \qquad (2.16)$$

где

$$P_2(\eta)={}^3/_2C_{11}^2\sin 2\eta \qquad (2.17)$$

Прибавляя $P_2(\theta)$ к обеим частям уравнения (2.15), получим эквивалентное ему уравнение. По третьей теореме Фредгольма условие разрешимости последнего, а следовательно и уравнение (2.15) имеет вид

$$\int_0^{2\pi} P_2(\eta)\frac{\sin\eta}{\sqrt{\pi}}\,d\eta = 0 \qquad (2.18)$$

Оно выполнено в силу (2.17). Поэтому решением уравнения (2.15) будет

$$\Phi_2(\theta) = C_{12}\sin\theta + \mu_0\sum_{i=2}^{\infty}\frac{a_{i2}\varphi_i(\theta)}{\nu_i-\mu_0}, \qquad C_{12} = \frac{C_{12}'}{\sqrt{\pi}}$$
$$a_{i2} = \int_0^{2\pi} P_2(\eta)\,\varphi_i(\eta)\,d\eta \qquad (2.19)$$

Константа C_{12} определится из условия разрешимости уравнения для $\Phi_4(\theta)$.

Из (2.19) в силу (2.17) находим

$$a_{i2} = 0 \quad (i = 3, 4, 5, \ldots) \qquad a_{22} = {}^3/_2\, C_{11}{}^2\sqrt{\pi} \qquad (2.20)$$

Подставив эти значения в формулу (2.19), получаем

$$\Phi_2(\theta) = C_{12}\sin\theta + C_{22}\sin 2\theta \qquad (C_{22} = {}^3/_2 C_{11}{}^2) \qquad (2.21)$$

Подставив $\Phi_2(\theta)$ из (2.21) и найденные значения остальных величин в уравнение (2.16) и произведя вычисления, находим

$$\Psi_2(\theta) = (3\,C_{12} - 9\,C_{11}{}^2)(\cos\theta - 1) + {}^{27}/_4\, C_{11}{}^2(\cos 2\theta - 1) \qquad (2.22)$$

Для определения μ_2 в (2.9) и (2.10) полагаем $n = 2$; тогда имеем

$$e_2 = {}^3/_2\,[b_{11}e_1 + 2(b_{12} + b_{22})e_0], \qquad \mu_2 = \mu_0(e_2 - e_0) \qquad (2.23)$$

Так как

$$b_{11} = C_{11}, \qquad b_{12} = C_{12}, \qquad b_{22} = C_{22} \qquad (2.24)$$

и учтя (2.14), из (2.23) получаем

$$e_2 = 3\,(3C_{11}{}^2 + C_{12}), \qquad \mu_2 = 3\,[3(3C_{11}{}^2 + C_{12}) - 1] \qquad (2.25)$$

2.3. *Определение* $\Phi_3(\theta)$, $\Psi_3(\theta)$ и μ_3. В этом случае получаем систему

$$\Phi_3(\theta) = \mu_0\int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\,[\Phi_3(\eta) + P_3(\eta)]\,d\eta \qquad (2.26)$$

$$\Psi_3(\theta) = -\int_0^{\theta}[\mu_0\Phi_3(\eta) + \mu_0 A_3\Phi_1{}^3 + \Phi_2(\mu_1 + 2\mu_0\Psi_1) +$$
$$+ \Phi_1(2\mu_1\Psi_1 + \mu_0\Psi_1{}^2 + 2\mu_0\Psi_2 + \mu_2) + d_1\mu_0\sin\eta]\,d\eta \qquad (2.27)$$

где

$$P_3(\eta) = (C_{11}{}^3 - C_{11} + d_1)\sin\eta + 3C_{11}C_{12}\sin 2\eta + {}^{17}/_3\, C_{11}{}^3\sin 3\eta \qquad (2.28)$$

Условие разрешимости уравнения (2.26), аналогичное (2.18), сводится к требованию, чтобы в выражении (2.28) отсутствовал член с $\sin\eta$; приравнивая нулю коэффициент при этом члене, имеем

$$C_{11}^3 - C_{11} + d_1 = 0 \tag{2.29}$$

По смыслу задачи, как это будет пояснено в дальнейшем (см. замечание в конце п. 3), должно быть $C_{11} > 0$. Анализ корней неполного кубического уравнения (2.29) показал, что каждому значению $d_1 < 0$ отвечает только один корень $C_{11} > 0$. Заметим, что при $d_1 = 0$ (и так как $C_{11} \neq 0$) уравнение (2.29) обратится в квадратное уравнение, определяющее C_{11} в случае свободной волны.

При выполнении условия (2.29) решение уравнения (2.26) получится по формуле, аналогичной (2.19), и будет иметь вид

$$\Phi_3(\theta) = C_{13} \sin\theta + C_{23} \sin 2\theta + C_{33} \sin 3\theta \tag{2.30}$$

где положено

$$C_{13} = C_{13}' / \sqrt{\pi}, \qquad C_{23} = 3C_{11}C_{12}, \qquad C_{33} = {}^{17}/_{6}\, C_{11}^3 \tag{2.31}$$

Подставив в (2.27) все найденные значения и произведя вычисления, получим

$$\begin{aligned}\Psi_3(\theta) = 3\,(C_{13} - C_{11} + {}^{35}/_{8}\, C_{11}^3 - 6C_{11}C_{12} + d_1)(\cos\theta - 1) +\\ + {}^{27}/_{2}\,(C_{11}C_{12} - {}^{3}/_{2}\, C_{11}^3)(\cos 2\theta - 1) + {}^{131}/_{8}\, C_{11}^3 (\cos 3\theta - 1)\end{aligned} \tag{2.32}$$

Применив (2.9) и (2.10) для $n = 3$ и произведя вычисления, получим

$$\mu_3 = {}^{159}/_{2}\, C_{11}^3 + 54C_{11}C_{12} + 9C_{13} - 9C_{11} \tag{2.33}$$

2.4. *Определение дальнейших приближений.* Дальнейших вычислений не приводим. Укажем только, что

$$C_{12} = 0 \tag{2.34}$$

$$C_{13} = -\frac{1}{9C_{11}^2 - 3}\left({}^{1859}/_{32}\, C_{11}^5 - {}^{445}/_{4}\, C_{11}^3 + {}^{9}/_{2}\, d_2C_{11} + {}^{207}/_{8}\, d_1C_{11}^2 - 3d_1\right) \tag{2.35}$$

Значение (2.34) получается из условия разрешимости уравнения для $\Phi_4(\theta)$, а (2.35) из условия разрешимости уравнения для $\Phi_5(\theta)$. При этом пришлось полностью рассчитать четвертое приближение и частично пятое.

Отметим еще, что коэффициент $C_{1n} = C_{1n}'/\sqrt{\pi}$ определится из условия разрешимости уравнения для $\Phi_{n+2}(\theta)$ и войдет в этом условии линейным множителем в слагаемом $(9C_{11}^2 - 3)\, C_{1n}$; остальные члены в этом условии будут известными.

2.5. *Приближенное выражение для* $\Phi(\theta)$. Подставив в первую формулу (2.1) значения $\Phi_1(\theta)$ из (2.12), $\Phi_2(\theta)$ из (2.21), $\Phi_3(\theta)$ из (2.30), получим

$$\Phi(\theta) = \varepsilon\, C_{11} \sin\theta + \varepsilon^2 C_{22} \sin 2\theta + \varepsilon^3 (C_{13} \sin\theta + C_{33} \sin 3\theta) \tag{2.36}$$

Здесь C_{11} — действительный положительный корень уравнения (2.29); C_{13} — дается формулой (2.35); C_{22} и C_{33} выражаются формулами (2.21) и (2.31); здесь учтено также, что $C_{12} = C_{23} = 0$ в силу (2.34) и (2.31).

3. Определение профиля волны. Отделяя в (1.7) действительные и мнимые части и произведя интеграцию, находим следующее уравнение профиля волны в параметрическом виде:

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\cos\Phi(\eta)\,d\eta, \qquad y = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta)\,d\eta \tag{3.1}$$

Получим, отсюда приближенное уравнение профиля волны, воспользовавшись формулой (2.36) для $\Phi(\eta)$, и второй формулой (1.18) для $\tau(\eta)$. Опуская промежуточные вычисления, находим

$$x = -{}^1/_2\lambda\pi^{-1}\{\theta + \varepsilon C_{11}\sin\theta + \varepsilon^2\,{}^1/_2(C_{22}+C_{11}{}^2)\sin 2\theta + {}$$
$$+\varepsilon^3[C_{13}\sin\theta + {}^1/_3(C_{33}+C_{11}C_{22}+{}^1/_6 C_{11}{}^3)\sin 3\theta]\} \tag{3.2}$$

$$y = {}^1/_2\lambda\pi^{-1}\{\varepsilon C_{11}(\cos\theta-1) + \varepsilon^2\,{}^1/_2(C_{22}+{}^1/_2 C_{11}{}^2)(\cos 2\theta-1) + {}$$
$$+\varepsilon^3[C_{13}(\cos\theta-1)+{}^1/_3(C_{33}+C_{11}C_{22}+{}^1/_6 C_{11}{}^3)(\cos 3\theta-1)]\} \tag{3.3}$$

Чтобы представить уравнение профиля волны в виде $y = y(x, \varepsilon)$, из уравнений (3.2) и (3.3) исключаем θ. Для этого из уравнения (3.2) ищем $\theta(x, \varepsilon)$, как функцию x и ε в виде ряда по степеням ε, коэффициенты которого равны

$$\theta(x, 0) = -\frac{2\pi}{\lambda}x, \qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}, \ldots, \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n\theta}{\partial\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0}$$

значения производных, очевидно, нетрудно последовательно определить.

Уравнение профиля следует искать в виде

$$y(x, \varepsilon) = y(x, 0) + \left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right)_0\varepsilon + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2y}{d\varepsilon^2}\right)_0\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3y}{d\varepsilon^3}\right)_0\varepsilon^3 + \ldots \tag{3.4}$$

Здесь положено $(d^ny/d\varepsilon^n)_0 = (d^ny/d\varepsilon^n)_{\varepsilon=0}$ и x рассматривается как параметр. Величины, входящие в правую часть (3.4), определяются из уравнения (3.3).

Дифференцируя это уравнение, как сложную функцию по ε, найдем выражения $(d^ny/d\varepsilon^n)_0$ через $\theta(x, 0) = -(2\pi/\lambda x)$ и $(\partial^n\theta/\partial\varepsilon^n)_{\varepsilon=0}$, но эти последние величины, как указано, уже определены.

Проделав все эти вычисления и подставив найденные выражения производных $y(x, \varepsilon)$ в (3.4), положив $k = 2\pi/\lambda$, получаем искомое уравнение

$$y(x, \varepsilon) = k^{-1}\ \{\varepsilon\, C_{11}(\cos\ kx - 1) + {}^1/_2\ \varepsilon^2 C_{11}{}^2\ (\cos\ 2kx - 1) + {}$$
$$+ {}^1/_6\,\varepsilon^3\ [(6C_{13} + {}^{27}/_4\ C_{11}{}^3)\ (\cos\ kx - 1) + {}^9/_4\ C_{11}{}^3\ (\cos\ 3kx - 1)]\} \tag{3.5}$$

Поступая так же, как и при составлении уравнения (3.5), находим из (1.17), используя (3.2), что

$$Q(x, \varepsilon) = -\varepsilon^3 d_1\sin kx - \varepsilon^4(d_2 - {}^1/_2 d_1 C_{11})\sin 2kx + {}$$
$$+{}^1/_2\,\varepsilon^5[({}^3/_2 d_1 C_{11}{}^2 - 2d_2C_{11})\sin kx + ({}^1/_2 d_1 C_{11}{}^2 + 2d_2C_{11} - 2d_5)\sin 3kx] \tag{3.6}$$

Эта формула подтверждает сказанное в п. 1 относительно выражения (1.17).

Замечание. По условию задачи, согласно п. 1, начало координат xOy помещено в вершине гребня волны. Поэтому при значениях x близких к нулю y должно быть отрицательным. Из (3.5) следует, что это будет выполняться только при $C_{11} > 0$. С другой стороны, в случае вынужденной волны [2] $C_{11} = - d_1^{1/3}$; таким образом, имеющее место и для нее требование $C_{11} > 0$ будет выполняться только при $d_1 < 0$. Последнее неравенство (см. п. 1) сохраняем и в случае составной волны.

4. Существование и единственность решения задачи. Применяя методы Ляпунова — Шмидта и их развитие [8], можно установить следующую теорему.

Теорема. Система уравнений (1.23), (1.24) и (1.20) при $\mu_0 = \nu_1$ имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ решение $\Phi(\theta, \varepsilon)$, $\Psi(\theta, \varepsilon)$ и $\mu(\varepsilon)$ и это решение будет аналитической функцией от ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$.

Доказательство этой теоремы здесь не приводим. Укажем только, что оно проводится аналогично тому, как это выполнено в работе [6].

Из этой теоремы следует абсолютная и равномерная сходимость рядов (2.1). Сходимость ряда для $\tau(\theta, \varepsilon)$ вытекает из той же теоремы и формулы (1.11). Сходимость рядов по степеням ε для подынтегральных функций в формулах (3.1), (3.2) вытекает из общих теорем анализа о подстановке ряда в ряд. На основании общих теорем анализа устанавливается и сходимость ряда (3.5).

Поступила 20 III 1969

Институт проблем механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Волны конечной амплитуды, возникающие от периодически распределенного давления. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 4, стр. 505—511.
2. Секерж-Зенькович Я. И. К теории установившихся волн конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости бесконечной глубины. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 2, стр. 304—307.
3. Секерж-Зенькович Я. И. Об одном виде установившихся волн. В книге М. М. Вайнберг и В. А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений, § 37, М., «Наука», 1969 г., стр. 509—517.
4. Секерж-Зенькович Я. И. К теории плоских установившихся волн конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости конечной глубины. В сб.: «Международный конгресс математиков в Москве», 1966, секц. 12. Тезисы кратк. науч. сообщ., 1966, М., стр. 50.
5. Секерж-Зенькович Я. И. Об установившихся волнах конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости конечной глубины. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 3, стр. 560—563.
6. Секерж-Зенькович Я. И. Об одном виде установившихся волн конечной амплитуды. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
7. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1951.
8. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Усп. матем. наук, 1962, т. 17, вып. 2 (104), стр. 13—75.