Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В АКТИВНЫХ СРЕДАХ

С. С. Калмыкова, В. И. Курилко

(Харьков)

Как известно, наиболее эффективные методы генерирования и усиления электромагнитных волн основаны на взаимодействии пучков заряженных частиц с замедляющими средами. При этом существенно используется то обстоятельство, что введение потока заряженных частиц коренным образом меняет свойства среды: из пассивной, поглощающей излучение, она превращается в активную, усиливающую электромагнитное поле. Принципиальный характер отличия пассивной среды от активной подтверждается, в частности, неприменимостью в последней флуктуационно-диссипативных теорем, справедливых для поглощающих сред. Поэтому следует ожидать, что и дифракция электромагнитных волн в активных средах будет происходить иначе.

Действительно, нарастание амплитуды электромагнитной волны в активной среде ограничивается либо нелинейными эффектами, либо конечной длиной активного участка системы. В последнем случае изменение диэлектрических свойств среды на границе активного участка должно сопровождаться трансформацией усиливаемой волны в другие типы волн. В частности, проблема вывода электромагнитной энергии из системы пучок — замедляющая среда по существу сводится к задаче дифракции на согласующем элементе. Поэтому изучение теории дифракции в активных средах представляет не только теоретический, но и прикладной интерес.

Ниже рассматривается одна из задач указанного типа: согласование плазменного волновода, в котором электромагнитные волны усиливаются пучком заряженных частиц с коаксиальной линией. По сравнению с обычно используемой для вывода энергии спиралью коаксиал должен оказаться более эффективным, особенно в случае больших энергий пучка, когда фазовые скорости возбуждаемых пучком волн близки к скорости света в вакууме.

1. Будем предполагать, что плазменный волновод имеет вид цилиндра ($0 \leqslant r \leqslant a,\ -\infty < z < +\infty$), заполненного однородной плазмой с плотностью n_p и помещенного в сильное магнитное поле H_0, параллельное оси цилиндра ($\omega_H \gg \omega_p, \omega$, где $\omega_H \equiv eH_0/mc$ — гирочастота электрона, e и m-го заряд и масса, $\omega_p \equiv (4\pi e^2 n_p/m)^{1/2}$— плазменная частота; ω — рабочая частота, c — скорость света). Пучок частиц с плотностью n_b и скоростью V_b проходит через плазменный волновод в направлении $z > 0$[1]. Коаксиальный волновод образован бесконечно тонким полуограниченным ($z > 0$) проводящим цилиндром радиуса a и общим для обоих волноводов проводящим кожухом ($r = b,\ -\infty < z < +\infty,\ b > a$).

Требуется определить поля, возникающие при рассеянии в рассматриваемой системе одной из усиливаемых волн плазменного волновода.

---

[1] Здесь и ниже индексы p и b относятся к параметрам плазмы и пучка соответственно.

Зависимость волнового числа $k_=$ от частоты ω в плазменном волноводе ($z < 0$) определяется дисперсионным уравнением этого волновода, которое в случае аксиально-симметричных волн имеет следующий вид [1]:

$$D(k_=) \equiv \frac{\Delta_1(a)}{\Delta_0(a)} - \frac{k_\perp}{v} \frac{J_1(k_\perp a)}{J_0(k_\perp a)} = 0 \tag{1.1}$$

где

$$v(k_=) \equiv (k_=^2 - k^2)^{1/2}, k_\perp^2 \equiv -\varepsilon_= (k_=, \omega) v^2$$

$$k \equiv \frac{\omega}{c}, \quad \operatorname{Im} \omega > 0, \quad \operatorname{Re} v(k_=) > 0$$

$$\Delta_n(r) \equiv K_n(vr) I_0(vb) - (-1)^n I_n(vr) K_0(vb)$$

а $\varepsilon_= (k_=, \omega)$ — продольная компонента тензора диэлектрической проницаемости системы плазма — пучок. В частном случае слабой пространственной дисперсии, когда тепловым движением частиц пучка можно пренебречь, имеем [2]

$$\varepsilon_= (k_=, \omega) \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_= V_b)^2} \qquad \left(\omega_b^2 \equiv \frac{4\pi n_b e^2}{m}\right) \tag{1.2}$$

Легко видеть, что решения (1.1) имеют вид

$$k_\perp a = \lambda_n \tag{1.3}$$

где медленно меняющиеся функции параметров системы λ_n определяются путем подстановки (1.3) в (1.1). В частности, при $kb < 1$ уравнение для λ_n имеет вид [1]

$$J_0(\lambda_n) = \lambda_n J_1(\lambda_n) \eta, \qquad \eta \equiv \ln(b/a) \tag{1.4}$$

Для $\eta = 1$, $\lambda_1 = 1{,}25$, $\lambda_2 = 4{,}08$ и т. д.

Подставляя корни b (1.4) в (1.3), можно убедиться в том, что при слабых токах пучка, когда $n_b \ll n_p$, решения γ_n уравнения (1.1), обусловленные наличием пучка, могут быть представлены в следующем виде:

$$\gamma_n = \frac{\omega}{V_b} \pm \frac{\omega_b}{V_b \sqrt{\varepsilon_p^{(n)}}}, \qquad \varepsilon_p^{(n)} \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\lambda_n^2 V_b^2}{\omega^2 a^2} \tag{1.5}$$

Эти волны, называемые также волнами плотности заряда, усиливаются в плазме только при $\operatorname{Re} \varepsilon_p^{(n)} < 0$. При $|\varepsilon_p^{(n)}| \to 0$, когда скорость пучка V_b близка к фазовой скорости V_φ одной из волн плазменного волновода без пучка, решение дисперсионного уравнения (1.3) имеет вид

$$\left(\gamma_n - \frac{\omega}{V_b}\right)^3 = -\frac{\omega_b^2 \lambda_n^2}{2V_b \cdot \omega a^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-2} \tag{1.6}$$

$$V_\varphi^{(n)} \equiv c \left[1 + \frac{\lambda_n^2 c^2}{(\omega_p^2 - \omega^2) a^2}\right]^{-1/2} = V_b$$

Дисперсионное уравнение плазменного цилиндра, заполняющего внутренний проводник коаксиала, может быть получено из (1.1) при помощи предельного перехода $b \to a$, и решения его имеют вид (1.3) — (1.6) при условии, что константы λ_n должны быть заменены корнями η_n уравнения $J_0(\eta_n) = 0$.

При фиксированных параметрах системы условие усиления продольных волн $\operatorname{Re} \varepsilon_p^{(\tilde{n})} < 0$ может быть выполнено лишь для конечного числа волн левого и правого волноводов, содержащих плазму. При этом из очевидного неравенства

$$\lambda_n < \eta_n < \lambda_{n+1} < \eta_{n+1} \tag{1.7}$$

следует, что число n усиливаемых волн в левом волноводе всегда больше или равно числу m усиливаемых волн правого волновода ($m \leqslant n \leqslant \leqslant m+1$). Методы решения задачи в каждом из этих случаев различны, поэтому они рассматриваются раздельно.

2. Пусть выполнено условие

$$\lambda_1^2 < \frac{(\omega_p^2 - \omega^2)\, a^2}{V_b^2} < \eta_1^2 \tag{2.1}$$

при котором внутри коаксиала усиление отсутствует, а в левом волноводе имеется лишь одна усиливаемая волна, которая характеризуется поперечным волновым числом λ_1/a и продольным волновым числом γ_1 ($\operatorname{Im} \gamma_1 < 0$)

$$E_{z1}(r, z) = E_1 J_0(\lambda_1 r/a) \exp(i\gamma_1 z) \tag{2.2}$$

Будем считать амплитуду E_1 этой волны заданной и найдем поля, возникающие в результате рассеяния ее на входе в коаксиал.

Задача сводится к нахождению решения волнового уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{r} r \frac{\partial E_z}{r} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \varepsilon_= * E_z = 0 \tag{2.3}$$

Здесь звездочка означает умножение компоненты Фурье поля на соответствующее значение функции $\varepsilon_=(k_=, \omega)$, определяемой выражением (1.2). Граничные условия заключаются в требовании непрерывности E_z и E_z' на поверхности плазмы ($r = a$, $z < 0$). Кроме того, на поверхности проводников ($r = b$, $-\infty < z < +\infty$ и $r = a$, $z > 0$) должно быть выполнено условие $E_z = 0$.

Вблизи края внутреннего проводника коаксиала

$$\rho \equiv [(r-a)^2 + z^2]^{1/2} \to 0$$

энергия поля должна быть конечной, так как предполагается, что в этой области нет источников излучения [3]. При выполнении условия (2.1) все поля в рассматриваемой системе убывают на больших расстояниях от неоднородности и решение уравнения (2.3) можно искать в виде суперпозиции плоских волн в каждой из областей, где диэлектрические свойства системы остаются непрерывными

$$
\begin{aligned}
&E_z(r, z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e_1(t) J_0[k_\perp(t) r] \exp(itz)\, dt \\
&H_\varphi(r, z) = ik \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_\perp(t) v^{-2}(t) e_1(t) J_1[k_\perp(t) r] \exp(itz)\, dt \\
&0 \leqslant r \leqslant a, \quad -\infty < z < +\infty \\
&E_z(r, z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e_2(t) \Delta_0(r, t) \exp(itz)\, dt \\
&H_\varphi(r, z) = ik \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^{-1}(t) e_2(t) \Delta_1(r, t) \exp(itz) dt \\
&a < r < b, \quad -\infty < z < +\infty \\
&v(t) \equiv (t^2 - k^2)^{1/2}, \; Re v(t) > 0, \; k_\perp^2(t) \equiv -\varepsilon_=(k_=, \omega)\, v^2(t)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Здесь $e_1(t)$ и $e_2(t)$ — неизвестные амплитуды Фурье-полей, которые должны быть определены из граничных условий; функции $\Delta_m(r, t)$ определены в (1.1).

Подставим поля (2.4) в граничные условия

$$
\begin{aligned}
E_z(r = a - 0, z < 0) &= E_z(r = a + 0, z < 0) \\
H_\varphi(r = a - 0, z < 0) &= H_\varphi(r = a + 0, z < 0) \\
E_z(r = a - 0, z < 0) &= E_z(r = a + 0, z < 0) = 0
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

При помощи леммы Винера — Пэли — Рапопорта [4,5] получаемую таким путем систему парных интегральных уравнений можно свести к следующей системе граничных задач Гильберта [6,7] на оси $\operatorname{Im} t = 0$:

$$\varphi^+(t) - \psi^+(t) = \xi^-(t) \tag{2.6}$$

$$\frac{ik}{v}\left[\frac{\Delta_1(a, t)}{\Delta_0(a, t)} \psi^+(t) - \frac{k_\perp(t)}{v} \frac{J_1(k_\perp a)}{J_0(k_\perp a)} \varphi^+(t)\right] = \varkappa^-(t) \tag{2.7}$$

Решение (2.6), (2.7) позволяет найти амплитуды $e_1(t)$ и $e_2(t)$ при помощи следующих соотношений:

$$e_1(t) = \frac{\varphi^+(t)}{J_0(k_\perp a)}, \qquad e_2(t) = \frac{\psi^+(t)}{\Delta_0(a, t)} \tag{2.8}$$

Из условия ограниченности энергии поля вблизи края внутреннего проводника коаксиала [3] следует, что полином $P(t)$ в общем решении (2.6)

$$\varphi^+(t) - \psi^+(t) = P(t) = \xi^-(t)$$

равен нулю. Тогда граничная задача (2.7) принимает вид

$$\Phi_1^+(t) = G_0(t)\, \Phi_1^-(t) \tag{2.9}$$

где введены следующие обозначения:

$$\Phi_1^+(t) \equiv \frac{ik(1+in_{\shortparallel})}{(t+k)^{1/2}}\varphi^+(t), \quad \Phi_1^-(t) \equiv \varkappa^-(t)(t-k)^{1/2}$$

$$G_0(t) \equiv (1+in_=)D^{-1}(t), \quad n_= \equiv \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1\right)^{1/2}, \ \operatorname{Re} n_= > 0 \tag{2.10}$$

Решение однородной граничной задачи (2.9), исчезающее на бесконечности, однозначно определяется ее индексом [6,7], который существенно зависит от того, есть ли усиление в левом волноводе. Если поглощение велико, а плотность пучка мала, то усиление отсутствует ($\operatorname{Im} \gamma_1 < 0$). В этом случае индекс задачи (2.9) равен нулю (см. приложение), так что решение ее единственно и тождественно равно нулю. Это означает, что при отсутствии усиления рассеянные поля не могут возникнуть в системе без внешнего вынуждающего поля, которым может быть любая суперпозиция приходящих из бесконечности собственных волн рассматриваемых волноводов.

В случае, когда поглощение мало, а плотность пучка достаточно велика, усиление имеет место ($\operatorname{Im} \gamma_1 < 0$). При этом индекс задачи равен единице (см. приложение), так что решение ее, исчезающее на бесконечности, существует и оказывается зависящим от одной постоянной

$$\Phi_1^+(t) = \frac{X_1^+(t)\,C}{t-\Gamma_+}, \qquad \Phi_1^-(t) = \frac{X_1^-(t)\,C}{t-\Gamma_-} \tag{2.11}$$

Здесь $\Gamma_\pm$ — произвольные константы, удовлетворяющие условиям $\operatorname{Sgn} \operatorname{Im} \Gamma_\pm = \pm 1$, а функции $X_1^\pm(t)$ — ограниченные на бесконечности решения однородной задачи сопряжения

$$X_1^+(t) = G_1(t)\ X_1^-(t)$$

$$G_1(t) \equiv G_0(t)\frac{t-\Gamma_-}{t-\Gamma_+} \tag{2.12}$$

Постоянная C в решении (2.11) однозначно определяется из требования, чтобы амплитуда усиливаемой волны (предэкспоненциальный множитель в (2.4)) была равна известной величине E_1 (см. (2.2)). Подставляя $e_1(t)$ из (2.8) и (2.11) в (2.4), найдем

$$C = -\frac{k}{2\pi}E_1\frac{J_0(\lambda_1)}{X_1^-(\gamma_1)}, \qquad D'(\gamma_1)\frac{\gamma_1-\Gamma_+}{(\gamma_1+k)^{1/2}} \tag{2.13}$$

$$\Gamma_- = \gamma_1, \qquad D' \equiv \frac{d}{dt}D(t)$$

При помощи (2.8) — (2.13) получаем окончательное выражение для компонент Фурье рассеянных полей

$$e_1(t) = \frac{(t+k)^{1/2}}{ik(1+in_=)}\frac{C}{J_0(k_\perp a)}\frac{X_1^+(t)}{t-\gamma_1} \tag{2.14}$$

$$e_2(t) = \frac{J_0(k_\perp a)}{\Delta_0(a,t)}e_1(t)$$

3. Рассмотрим решения в условиях, когда выполнено неравенство

$$\eta_1^2 < \frac{(\omega_p^2 - \omega^2)\, a^2}{V_b^2} < \lambda_2^2 \tag{3.1}$$

так что усиление имеет место и внутри коаксиала (при этом в обеих частях плазменного волновода могут усиливаться лишь первые радиальные гармоники с наименьшими радиальными волновыми числами). В этом случае в области $0 \leqslant r \leqslant a$, $z > 0$ поле не убывает с ростом расстояния от неоднородности, так что представление (2.4) неприменимо. Однако можно выделить из поля правого волновода усиливаемую волну, тогда остальное поле может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн

$$E_z(r, z) = A_1 J_0(\eta_1 r/a) \exp(i\varkappa_1 z) + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, J_0[k_\perp(t)\, r] \exp(itz)\, dt \tag{3.2}$$

$$0 \leqslant r \leqslant a, \quad -\infty < z < +\infty$$

$$E_z(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\, \Delta_0(r, t) \exp(itz)\, dt \tag{3.3}$$

$$a \leqslant r \leqslant b, \qquad -\infty < z < +\infty$$

Здесь $\eta_1 = 2{,}405, \ldots$, $\varkappa_1$ определяется выражениями (1.5) или (1.6) (с заменой $\gamma_1 \to \varkappa_1$, $\lambda_1 \to \eta_1$), а постоянная A_1, как и неизвестные амплитуды $f_1(t)$ и $f_2(t)$, должна быть определена из граничных условий (2.5).

Подставляя поля E_z из (3.2), (3.3) и определяемые соотношением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) H_\varphi = ik \frac{\partial E_z}{\partial r}$$

поля H_φ в граничные условия (2.5), получим неоднородную граничную задачу типа (2.9)

$$\Phi_0^+(t) = G_0(t)\, \Phi_0^-(t) + \frac{A}{2\pi i} G_0(t) \frac{(t-k)^{1/2}}{t - \varkappa_\perp}$$

$$A \equiv A_1 \frac{ik\eta_1 J_1(\eta_1)}{(\varkappa_1^2 - k^2)\, a} \tag{3.4}$$

где функция $G_0(t)$ по-прежнему определяется выражением (2.10), а амплитуды Фурье $f_1(t)$ и $f_2(t)$ искомых полей выражаются через решение (3.4 при помощи следующих соотношений:

$$f_1(t) \equiv \frac{(t+k)^{1/2}\, \Phi_0^+(t)}{ikJ_0(k_\perp a)\,(1 + in_=)}, \quad f_2(t) \equiv \frac{J_0(k_\perp a)}{\Delta_0(a, t)} f_1(t) \tag{3.5}$$

Можно показать (см. приложение), что индекс задачи (3.4) в рассматриваемом случае равен нулю, поэтому решение ее, исчезающее на бесконечности, существует и единственно. При этом постоянная A_1, которая считалась до сих пор известной, однозначно определяется, как и в предыдущем случае, требованием, чтобы амплитуда поля E_z усиливаемой волны при $z \to -\infty$ была равна известной величине E_1 согласно (2.2)

$$A_1 = \frac{(\varkappa_1 - \gamma_1)(\varkappa_1^2 - k^2)\, a}{\eta_1 [(\gamma_1 + k)(\varkappa_1 - k)]^{1/2}} \frac{X_0^-(\varkappa_1)}{X_0^-(\gamma_1)} E_1 \tag{3.6}$$

где $X_0^{\pm}(t)$ — ограниченные на бесконечности решения однородной задачи сопряжения $X_0^+ = G_0X_0^-$. Таким образом, решение задачи в случае (3.1) однозначно определяется выражениями (3.4) — (3.6).

4. Изложенный выше метод решения может быть обобщен на случай произвольного числа волн, усиливаемых в левом (n) и правом (m) волноводах ($1 \leqslant m \leqslant n \leqslant m+1$).

При этом поле в области $0 \leqslant r \leqslant a$, $z > 0$ необходимо искать в следующем виде (ср. (3.2))

$$E_z = \sum_{l=1}^{m} A_l J_0(\eta_l r / a) \exp(i\varkappa_l z) + E_\infty \tag{4.1}$$

где сумма соответствует волнам, усиливаемым в коаксиале, а E_∞ — полям, убывающим на больших расстояниях от неоднородности, которые могут быть представлены в виде суперпозиции плоских волн.

Неизвестные постоянные A_l при $n = m$, когда индекс граничной задачи типа (3.4) равен нулю, определяется по известным амплитудам E_e усиливаемых волн левого волновода

$$E_{zl} = E_l J_0(\lambda_l r / a) \exp(i\gamma_l z) \tag{4.2}$$

аналогично A_1 в (3.6).

При $n = m + 1$ число известных постоянных в (4.2), а следовательно, и число уравнений для определения неизвестных A_l равно $m + 1$, т. е. на единицу больше числа неизвестных A_l. Однако в этом случае однородная задача типа (2.9) имеет отличное от нуля решение, содержащее, как и (2.11), еще одну неизвестную постоянную, так что число уравнений по-прежнему остается равным числу неизвестных.

5. Подобным образом можно рассмотреть задачу о выводе энергии в коаксиал при слабом магнитном поле ($\omega_H \ll \omega$, ω_p, $\omega - k_= V_b$). В этом случае дисперсионное уравнение плазменного волновода с пучком, аналогичное (1.1), имеет вид

$$\varepsilon_=(k_=, \omega)\frac{I_1(k_\perp a)}{k_\perp a I_0(k_\perp a)} = \frac{\Delta_1(a)}{v\Delta_0(a)} \tag{5.1}$$

$$k_\perp^2 \equiv -\frac{\varepsilon_=(k_=, \omega)[k_=^2 + (\omega_p^2 + \omega_b^2 - \omega^2)c^{-2}]}{\varepsilon_=(k_=, \omega) + \beta^2\varepsilon_p[\varepsilon_p - \varepsilon_=(k_=, \omega)]}$$

$$\beta \equiv V_b / c, \qquad \varepsilon_p \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Исследование этого уравнения показывает, что в отсутствие пучка ($n_b = 0$) в плазменном волноводе может распространиться лишь одна медленная ($V_ф < c$) поверхностная волна ($k_\perp^2 < 0$) в области частот $0 < \omega < 2^{-1/2}\omega_p$. При введении пучка в таком волноводе появляются объемные ($k_\perp^2 > 0$) медленные волны [1], продольные волновые числа которых

[1] Эти волны называются волнами плотности заряда, или продольными волнами.

при $n_b \ll n_p$ определяются соотношениями

$$\gamma_n V_b = \omega \pm \frac{\omega_b}{\sqrt{\varepsilon_p}} \left\{1 + \beta^2 \lambda_n^2 \varepsilon_p \left[\frac{\omega^2 a^2}{V_b^2} + \lambda_n^2 + (\omega_b^2 + \omega_p^2 - \omega^2) \frac{a^2}{c^2}\right]^{-1}\right\}^{1/2} \quad (5.2)$$

где константы λ_n (или $\varkappa_n$) могут быть найдены после подстановки (5.2) в (5.1). Как видно из (5.2), в рассматриваемом случае слабого магнитного поля условие усиления $\omega < \omega_p$ не зависит от радиального волнового числа. Поэтому при $\omega < \omega_p$ усиливаются все волны плотности заряда правого волновода. Легко видеть, что метод нахождения рассеянных полей в этом случае аналогичен изложенному выше (п. 4) для конечного числа усиливаемых волн в волноводе с сильным продольным магнитным полем. Различие заключается в том, что в сумме (4.1) в этом случае нужно положить $m = \infty$. Соответственно система уравнений для определения констант A_l должна содержать бесконечное число уравнений, так как число усиливаемых волн в левом волноводе, амплитуды которых (E_l в (4.2)) известны, равно числу усиливаемых волн правого волновода. Индекс соответствующей однородной задачи равен нулю при $2^{-1/2}\omega_p < \omega < \omega_p$, когда поверхностная волна не усиливается, и плюс единице при $\omega < 2^{-1/2}\omega_p$, когда поверхностная волна усиливается (см. приложение). В последнем случае число неизвестных и соответственно число уравнений оказывается на единицу большим.

6. Зная компоненты Фурье рассеянных полей, например (2.14) и (3.5), можно при помощи (2.4), (3.2) и (3.3) найти сами поля. При этом существенный интерес представляет выяснение условий, в которых влияние пучка на дифракционные характеристики задачи оказывается наибольшим.

Прежде всего следует отметить, что волны плотности заряда, описываемые соотношением (1.5), не могут существовать в волноводе без пучка, даже при $n_b \to 0$. Поэтому изложенное выше рассмотрение необходимо для изучения дифракции этих волн.

Сравнение дифракционных характеристик пассивной и активной систем возможно только в резонансном случае, когда при малой плотности пучка его скорость близка к фазовой скорости одной из собственных волн плазменного волновода без пучка (см. (1.6)). При этом коэффициенты трансформации, определяемые как отношения амплитуд магнитных полей коаксиальной ($k_= = k$, $r = a + 0$, $z > 0$) и падающей ($k_= = \gamma_1$, $r = a - 0$, $z < 0$) волн, оказываются совпадающими с точностью до величин порядка коэффициента усиления ($|\gamma_n - \omega V_b^{-1}| \ll \gamma_n$). Действительно, вычисляя при помощи (2.14) и (2.4) амплитуду коаксиальной волны, получим в случае активной системы

$$H_+^{(k)} \equiv 2\pi i \operatorname*{res}_{t=k} \frac{ike_2(t)\,\Delta_1(a,t)}{v(t)} = -\left(\frac{\gamma_1 + k}{2k}\right)^{1/2} \frac{X_1^+(k)}{X_1^-(\gamma_1)} \frac{D'(\gamma_1)(\gamma_1 - \Gamma_+)}{1 + in_=} H_1 \quad (6.1)$$

где H_1 — амплитуда магнитного поля усиливаемой волны.

Выражение для амплитуды коаксиальной волны, возбуждаемой падающей из $z = -\infty$ собственной волной плазменного волновода без пучка

($\operatorname{Im} \gamma_1 > 0$), можно найти из (3.2) — (3.6) при помощи замены $A_1 \to E_1$, $\varkappa_1 \to \gamma_1$. После несложных вычислений находим в случае пассивной системы

$$H_{-}^{(k)} = \left(\frac{\gamma_1 + k}{2k}\right)^{1/2} \frac{X_n^+(k)}{X_n^-(\gamma)} H_1, \quad \gamma \equiv \gamma_1^* \tag{6.2}$$

Здесь H_1 — амплитуда магнитного поля падающей волны, $X_n^{\pm}(t)$ — ограниченные на бесконечности решения однородной задачи сопряжения

$$X_n^+(t) = G_n(t), \ X_n^-(t), \ G_n(t) \equiv G_0(t)\,|_{n_b=0} \tag{6.3}$$

Вычисление интегралов, входящих в (6.1), показывает, что при $n_b \to 0$, когда коэффициент усиления мал

$$\alpha \equiv |\operatorname{Im} \gamma_1| \ll \operatorname{Re} \gamma_1 = \gamma_0$$

выполнены равенства

$$X_1^-(\gamma_1) = -X_n^-(\gamma)\frac{D'(\gamma_1)(\gamma_1 - \Gamma_+)}{1 + in_=}$$

так что выражения (6.1), (6.2) совпадают в этом случае с точностью до величин порядка α/γ_0.

Физически этот результат можно объяснить следующим образом. В общем случае коэффициенты трансформации определяются картиной поля вблизи неоднородности. А так как при слабом усилении картина поля в резонансном случае активного волновода отличается от картины поля для этой волны в пассивном волноводе лишь на величины порядка усиления на длине волны, то соответственно малым будет и различие дифракционных характеристик.

Таким образом, проведенное выше рассмотрение необходимо в случае больших токов пучка, когда усиление на длине волны (α/γ_0) не будет малым, а также при рассмотрении трансформации волн плотности заряда. В общем случае произвольного тока пучка коэффициент трансформации усиливаемой волны в коаксиальную определяется выражением (6.1).

Приложение. Индекс ν граничных задач (2.9) и (3.4) определяется приращением логарифма функции $G_0(t)$ на контуре $\operatorname{Im} t = 0$ [6,7]

$$\nu \equiv \frac{1}{2\pi i} \ln G_0(t)\,|_{-\infty}^{+\infty} \tag{п.1}$$

Единственными особенностями $G_0(t)$ будут простые нули и полюса. Эти особенности соответствуют собственным волнам волноводов, образующих рассматриваемую систему. При $n_b \to 0$ функция $G_0(t)$ оказывается четной, так что индекс ν равен нулю. При наличии пучка ($n_b \neq 0$) число нулей $t_m = \varkappa_m$ и полюсов $t_n = \gamma_n$ функции $G_0(t)$, соответствующих объемным волнам плазменного волновода ($k_\perp(\gamma_n a) = \lambda_n$, $k_\perp(\varkappa_m a) = \eta_m$), удваиваются за счет дополнительных корней типа (1.5), т. е. за счет волн плотности заряда в пучке. Если поглощение ($\operatorname{Im} \omega$) велико, а плотность пучка мала, то даже при выполнении условия (2.1) усиление отсутствует ($\operatorname{Im} \gamma_1 > 0$) В этом случае все полюса и нули, соответствующие волнам плотности заряда, расположены в верхней полуплоскости комплексной переменной t вблизи точки $t_0 \equiv \omega b/Vb$. При обходе каждого корня $\varkappa_m^{(\pm)}$ индекс ν возрастает, а при обходе каждого полюса $\gamma_n^{(\pm)}$ — уменьшается на $1/2$. Группируя в (п.1) слагаемые, соответствующие корням $\varkappa_m^{(\pm)}$ и полюсам $\gamma_m^{(\pm)}$ с одинаков ыми номерами m, можно убедиться в том, что индекс ν в этом случае равен нулю, так как обход вокруг каждой пары этих особых точек не дает приращения индекса.

Если же плотность пучка достаточно велика, то при выполнении условия (2.1) $\mathrm{Im}\gamma_1^{(-)} < 0$. При этом вклады в индекс (п. 1) от полюсов $\gamma_1^{(\pm)}$взаимно компенсируются. Соответствующая пара корней $\varkappa_1^{(\pm)}$, согласно правой части неравенства (2.1), остается в верхней полуплоскости, поэтому вклад от них в (п. 1) равен плюс единице. Остальные пары корней и полюсов по-прежнему не дают приращения в (п. 1). Таким образом, индекс задачи (2.9) при выполнении условий (2.2) равен плюс единице.

Если же выполнены неравенства (3.1), то и корни $\varkappa_1^{(\pm)}$ так же, как и полюса $\gamma_1^{(\pm)}$, оказываются расположенными в разных полуплоскостях. При этом индекс задачи (3.4) равен нулю, как и при отсутствии усиления.

Точно так же, группируя полюса и нули $G_0(t)$, соответствующие усиливаемым и затухающим волнам обоих волноводов, можно показать, что в общем случае произвольного числа нарастающих волн в левом (n) и правом (m) волноводах имеет место равенство

$$\nu = \begin{cases} 1 & m = n - 1 \\ 0 & m = n \end{cases} \tag{п.2}$$

Легко видеть, что это равенство остается справедливым и в резонансном случае (1.6), так как один из корней в (1.6) соответствует собственной волне плазменного волновода без пучка, а из двух других, соответствующих волнам плотности заряда, усиливаемой может быть лишь одна.

Авторы благодарны Я. Б. Файнбергу за стимулирующий интерес к работе и полезные дискуссии, а также В. А. Марченко и Л. А. Вайнштейну — за обсуждение результатов работы.

Поступила 9 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Калмыкова С. С., Курилко В. И. Возбуждение плазменного волновода коаксиальным. В сб.: «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», Киев, «Наукова думка», 1965, вып. 4, стр. 68; Эллис В., Буксбаум С., Берс А. Волны в анизотропной плазме. М., Атомиздат, 1966.
2. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.
3. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л., Гостехиздат, 1937.
4. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М., «Наука», 1964
5. Рапопорт И. М. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1948, т. 59, № 8.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.