

## ДИФРАКЦИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА КЛИНЕ, ДВИЖУЩЕМСЯ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

К. А. Бежанов

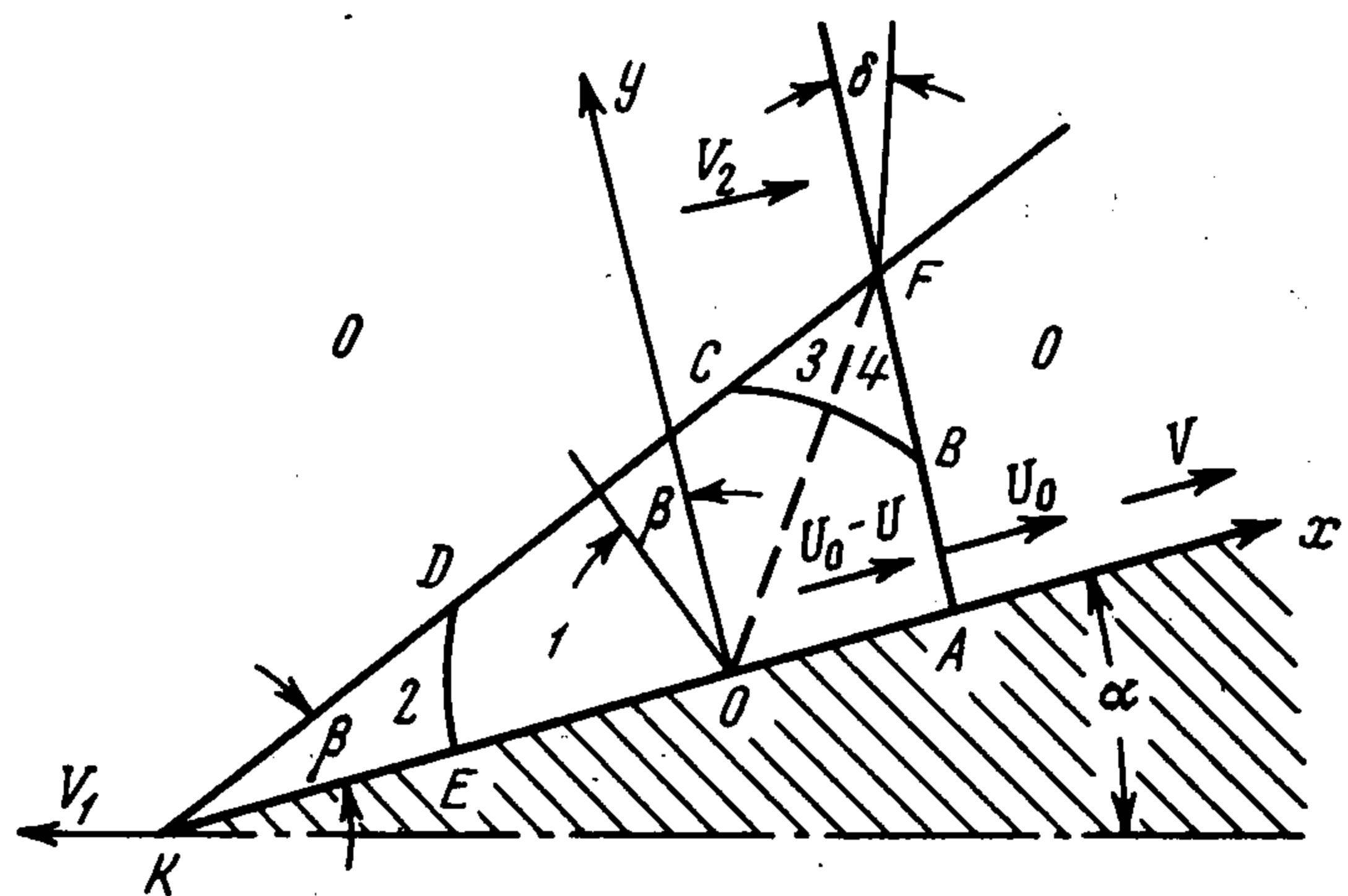
(Москва)

Исследуется дифракция ударной волны произвольной интенсивности на верхней поверхности клина, движущегося со сверхзвуковой скоростью в предположении, что интенсивности ударной волны и присоединенного скачка уплотнения, а также угол клина  $\alpha$  и угол падения ударной волны  $\delta$  мало отличаются один от другого (фиг. 1).

Случай течения у клина, движущегося со сверхзвуковой скоростью при набегающей на него плоской ударной волне, когда отсутствует дифракция, рассмотрен в [1]. В этой работе получены условия, при которых реализуется течение с постоянными параметрами в области  $AFK$ , ограниченной набегающей ударной волной, присоединенным к клину скачком уплотнения и стенкой клина.

В [2] исследовалась дифракция ударной волны произвольной интенсивности на тонком клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью, в [3] дифракция слабой волны на тонком клине, движущемся с гиперзвуковой скоростью, в [4] дифракция слабой волны на произвольном клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью.

**1. Постановка задачи.** В результате наложения возмущений на течение с постоянными параметрами получается дифракционная картина, ограниченная ударной волной  $AB$ , скачком уплотнения  $CD$ , стенкой клина  $AE$  и дугами окружности Маха  $BC$  и  $DE$ , центр которой  $O$  движется вдоль стенки клина со скоростью потока  $U_0 - U$  за ударной волной  $AF$ , где  $U_0$  — скорость ударной волны,  $U$  — скорость ударной волны относительно потока за ней. Задачу сформулируем в системе координат  $Ox'y'$ , связанной с движущимся центром возмущения  $O$ , который совпадает с



Фиг. 1

точкой пересечения биссектрисы угла  $AFK$  со стенкой клина. В этой системе координат невозмущенный газ в области  $AFK$  находится в состоянии покоя. Рассматриваемая задача автомодельна по времени  $t$ . Линеаризуем уравнения плоского нестационарного движения газа и введем безразмерные переменные

$$u = \frac{u'}{a_1}, \quad v = \frac{v'}{a_1}, \quad p = \frac{p'}{a_1^2 \rho_1}, \quad x = \frac{x'}{a_1 t}, \quad y = \frac{y'}{a_1 t}$$

<sup>1</sup> Тер-Минасянц С. М. Дифракция плоской волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью. Кандидатская диссертация, МГУ, 1967.

где  $u'$ ,  $v'$ ,  $p'$  — возмущенные составляющие скорости и возмущение давления,  $a_1$  и  $\rho_1$  — скорость звука и невозмущенная плотность в области 1.

Представим уравнение возмущенного фронта ударной волны  $AF$  в виде

$$x = k + \psi(y)$$

Соотношения на ударной волне  $AB$  примут вид при  $x = k$ .

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{(M_0 - M)^2 + 1}{(M_0 - M)^2} (\psi(y) - y\psi'(y)) + D_1 \\ v &= (k - m(M_0 - M))\psi'(y) - v_0, \quad p = \frac{4k}{\gamma+1} (\psi(y) - y\psi'(y)) + E_1 \\ &\left( M_0 = \frac{U_0}{a_0}, \quad M = \frac{V}{a_0}, \quad k = \frac{U}{a_1}, \quad m = \frac{a_0}{a_1} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $a_0$  и  $V$  — скорость звука и скорость потока в области 0,  $D_1$  и  $E_1$  — известные постоянные, зависящие от возмущенных параметров  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\rho_0$  и  $p_0$  впереди ударной волны в области 0.

Уравнения (1.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u &= A_1 p + F_1, \quad y \frac{\partial v}{\partial y} = B_1 \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{при } x = k \\ A_1 &= \frac{(M_0 - M)^2 + 1}{2k(M_0 - M)^2}, \quad B_1 = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{(M_0 - M)^2 - 1}{(\gamma - 1)(M_0 - M)^2 + 2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $F_1$  — известная постоянная,  $\gamma$  — отношение теплоемкостей.

Аналогичные соотношения можно написать на скачке уплотнения  $KF$  при  $y \cos \beta - x \sin \beta = k$ .

Течение в области 2 известно и соответствует обтеканию клина со скоростью  $V_2 - V_1$ , где  $V_1$  — скорость клина,  $V_2$  — скорость потока за набегающей ударной волной.

Течения с постоянными параметрами в областях 3 и 4 определяются полностью, если выписать соотношения (1.1) на малоотклоненных прямолинейных участках:

ударной волны  $FB$

$$x = k - (y - y_F) \operatorname{tg} \varepsilon_1$$

скачка уплотнения  $FC$

$$y \cos \beta - x \sin \beta = k + (y - y_F) \operatorname{ctg} (\beta - \varepsilon_2)$$

условие на слабом тангенциальном разрыве  $FO$  при  $y = x \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_0$

$$u_3 y_F - v_3 x_F = u_4 y_F - v_4 x$$

$$(x_F = k, \quad y_F = k \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_0, \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \pi + \beta)$$

на котором давление и производные давления постоянны [2].

Эти соотношения дают семь условий для определения семи неизвестных  $u_3$ ,  $u_4$ ,  $v_3$ ,  $v_4$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $p_3 = p_4$ , где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — малые углы отклонения ударной волны и скачка уплотнения.

2. Формулировка задачи для функции  $p$ . После линеаризации уравнений и преобразования Чаплыгина задача сводится к уравнению Лапласа для возмущения давления. Область, соответствующая области ди-

фракции, перейдет в ортогональный криволинейный пятиугольник  $ABCDE$  плоскости  $z = r \exp i \theta = \mu + iv$ , ограниченный четырьмя дугами окружности и прямой (фиг. 2).

Граничные условия выпишем для нормальной и касательной составляющих производных давления [4]

$$a \frac{\partial p}{\partial n} + b \frac{\partial p}{\partial s} = 0$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= \vartheta(\theta, 0), & b &= 1 & \text{на } AB \\ a &= 0, & b &= 1 & \text{на } BC \text{ и } DE \\ a &= \vartheta(\theta, \theta_0), & b &= 1 & \text{на } CD \\ a &= 1, & b &= 0 & \text{на } AE \end{aligned}$$

где

$$\vartheta(\theta, 0) = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sec^2 \theta}}{kA_1 \operatorname{tg} \theta - B_1 \operatorname{ctg} \theta}, \quad \vartheta(\theta, \theta_0) = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sec^2(\theta - \theta_0)}}{kA_1 \operatorname{tg}(\theta - \theta_0) - B_1 \operatorname{ctg}(\theta - \theta_0)}$$

а уравнения дуг окружностей  $AB$  и  $CD$  соответственно имеют вид

$$k(1 + r^2) = 2r \cos \theta, \quad k(1 + r^2) = 2r \cos(\theta - \theta_0)$$

Коэффициент  $a$  при  $\partial p / \partial n$  обращается в бесконечность в точках  $N \in AB$ ,  $L$  и  $Q \in CD$  при

$$\theta_N = \operatorname{arctg} \sqrt{B_1 / kA_1}, \quad \theta_{L, Q} = \theta_0 \mp \operatorname{arctg} \sqrt{B_1 / kA_1}$$

Интегрируя второе из условий (1.2) вдоль ударной волны  $AB$  и учитывая, что при  $x = k$ ,  $y = k \operatorname{tg} \theta$ , получим

$$k^{-1} B_1 \int_{AB} \operatorname{ctg} \theta dp = v_B - v_A \quad (2.1)$$

Условия, которые должны выполняться вдоль скачка уплотнения  $CD$ , имеют вид

$$\begin{aligned} k^{-1} B_1 \int_{CD} \operatorname{ctg}(\theta - \theta_0) dp &= (u_C - u_D) \cos \beta + (v_C - v_D) \sin \beta \\ \int_{CD} dp &= p_2 - p_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Полученную краевую задачу решим, отобразив криволинейный пятиугольник  $ABCDE$  на верхнюю полуплоскость.

3. Построение функции, отображающей [криволинейный пятиугольник на верхнюю полуплоскость. С помощью дробнолинейного преобразования

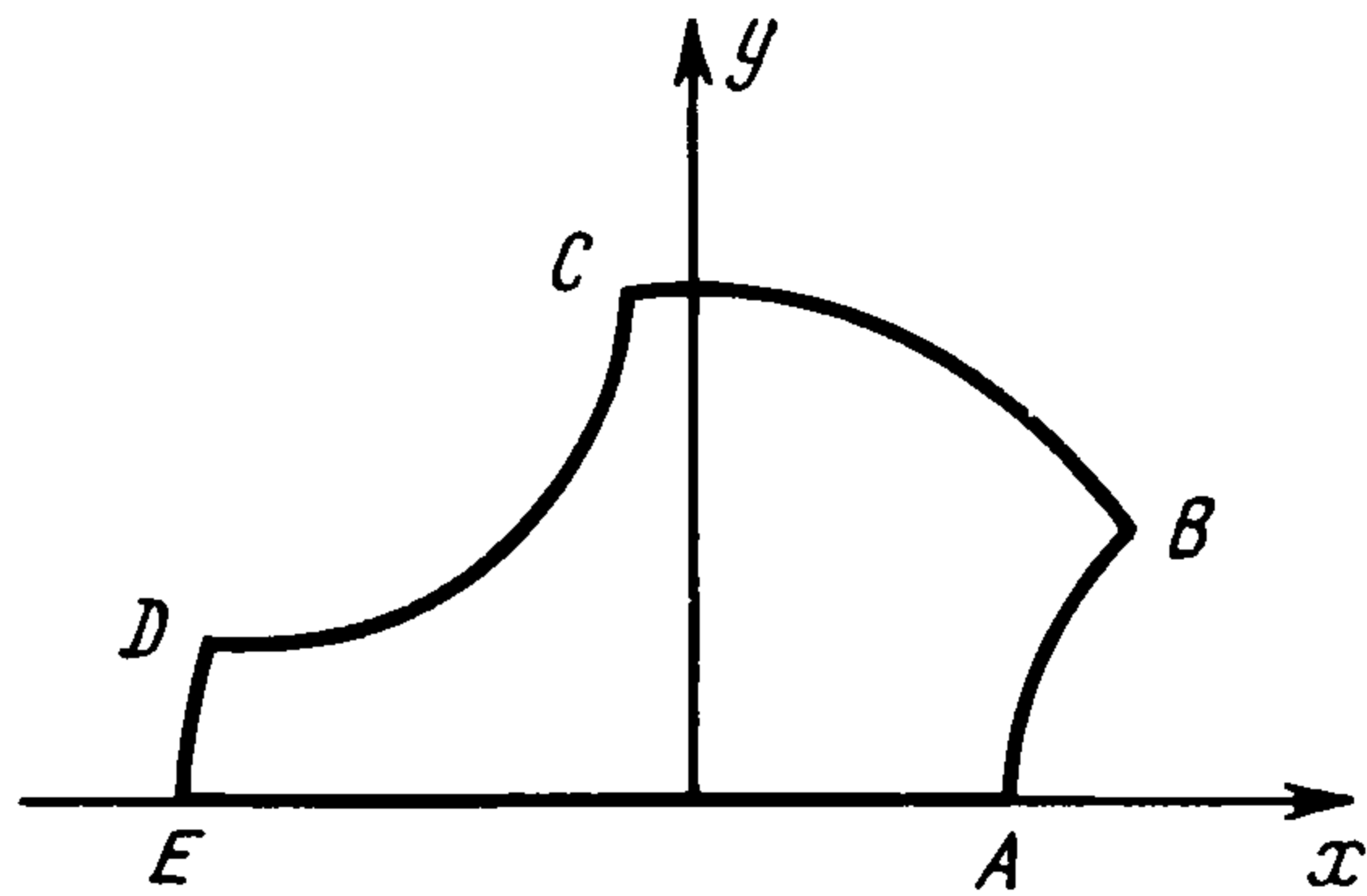
$$\zeta = \frac{1 - (k + ik_1)z}{z - k - ik_1}, \quad k_1 = \sqrt{1 - k^2}$$

криволинейный пятиугольник  $ABCDE$  отображается на второй квадрант без четверти единичной окружности с центром в начале координат и без

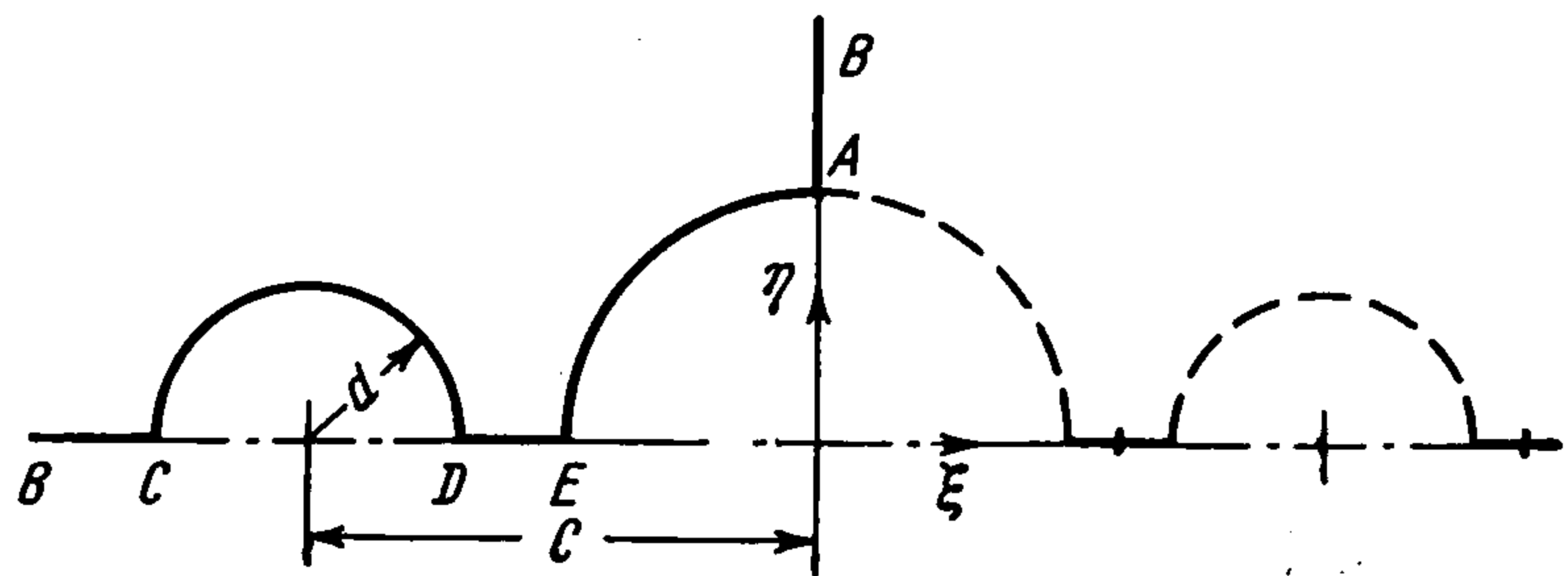
половины окружности радиуса  $d$  с центром на действительной оси, отстоящим на расстоянии  $-c$  от начала координат (фиг. 3)

$$d = \frac{k_1}{k + k \sin \beta - k_1 \cos \beta}, \quad c = \frac{k^2 + \sin \beta}{k + k \sin \beta - k_1 \cos \beta}$$

Для отображения полученной области на верхнюю полуплоскость продолжим ее по принципу симметрии на первый квадрант. Функция, осуществляющая конформное отображение на верхнюю полуплоскость, будет] авто-



Фиг. 2



Фиг. 3

морфной функцией, аналитическое изображение которой имеет вид [5,6]

$$\omega = \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n} - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right) \quad (3.1)$$

Следовательно,  $\omega$  есть автоморфная функция, группу которой образуют дробно-линейные подстановки. Эти подстановки определяются из всевозможных произведений основных подстановок

$$\left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cc} c & d^2 - c^2 \\ 1 & -c \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cc} -c & d^2 - c^2 \\ 1 & c \end{array} \right\|$$

Общий вид отображающей функции (3.1) можно представить также в виде

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) + \frac{d^2 \xi}{\xi^2 - c^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n \xi}{\xi^2 - \xi_n^2} \quad (3.2)$$

$$\xi_n = \frac{\delta_n}{\gamma_n}, \quad \mu_n = \frac{\beta_n \gamma_n - \alpha_n \delta_n}{\gamma_n^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Найдем коэффициенты  $\mu_n$  и  $\xi_n$ , вычислив ряд всевозможных произведений основных подстановок

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{c}, & \xi_{2n} &= \frac{1}{\xi_{2n-1}}, & \mu_0 &= -\frac{d^2}{c^2}, & \mu_{2n} &= -\frac{\mu_{2n-1}}{\xi_{2n-1}^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \xi_1 &= c - \frac{d^2}{c}, & \xi_3 &= c - \frac{d^2}{2c}, & \xi_{5,7} &= c - \frac{d^2}{c \pm \xi_0} \\ \xi_9 &= c - \frac{d^2}{c + \xi_1}, & \xi_{11,13} &= c - \frac{d^2}{c \pm \xi_2}, & \xi_{15} &= c - \frac{d^2}{c + \xi_3} \\ \xi_{17,19} &= c - \frac{d^2}{c \pm \xi_4}, & \xi_{21} &= c - \frac{d^2}{c + \xi_5}, & \xi_{23,25} &= c - \frac{d^2}{c \pm \xi_6} \\ \xi_{27} &= c - \frac{d^2}{c + \xi_7}, & \xi_{29,31} &= c - \frac{d^2}{c \pm \xi_8}, & \xi_{33} &= c - \frac{d^2}{c + \xi_9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{d^2}{c^2}, & \mu_3 &= -\frac{d^4}{4c^2}, & \frac{\mu_{5,7}}{\mu_0} &= \frac{-d^2}{(c + \xi_1)^2} \\ \frac{\mu_9}{\mu_1} &= \frac{-d^2}{(c + \xi_1)^2}, & \frac{\mu_{11,13}}{\mu_2} &= \frac{-d^2}{(c \pm \xi_2)^2}, & \frac{\mu_{15}}{\mu_3} &= \frac{-d^2}{(c + \xi_3)^2} \\ \frac{\mu_{17,19}}{\mu_4} &= \frac{-d^2}{(c \pm \xi_4)^2}, & \frac{\mu_{21}}{\mu_5} &= \frac{-d^2}{(c + \xi_5)^2}, & \frac{\mu_{23,25}}{\mu_3} &= \frac{-d^2}{(c \pm \xi_6)^2} \\ \frac{\mu_{27}}{\mu_7} &= \frac{-d^2}{(c + \xi_7)^2}, & \frac{\mu_{29,31}}{\mu_8} &= \frac{-d^2}{(c \pm \xi_8)^2}, & \frac{\mu_{33}}{\mu_9} &= \frac{-d^2}{(c + \xi_9)^2} \end{aligned}$$

и т. д.; закон образования коэффициентов очевиден. Ряд сходится тем быстрее, чем меньше значение параметра  $d/c$ , содержащегося в (3.2).

Здесь одновременно решена задача об обтекании трех цилиндров радиусов  $d$ ,  $1$  и  $d$ . Функция  $\omega(\xi)$  — комплексный потенциал скоростей,  $\mu_n$  — мощность дублета,  $\xi_n$  — координата, в которую он помещен. Интенсивность изображений дублетов уменьшается и притом очень быстро с уменьшением  $d/c$ . Если в выражениях для  $\mu_n$  квадраты заменить на кубы, то получим потенциал обтекания трех сфер. Частный случай этой задачи — обтекание двух сфер был решен еще Стоксом методом последовательных приближений, при котором помещались дублеты заданной мощности  $\mu_n$  в точках инверсии  $\xi_n$  относительно двух сфер [7].

Окончательное выражение для функции, отображающей исходный криволинейный пятиугольник на верхнюю полуплоскость, имеет вид

$$w = f(z) = -\omega^2 \left( \frac{1 - (k + ik_1)z}{z - k - ik_1} \right)$$

#### 4. Формулировка и решение задачи Гильберта. Введем функцию

$$P(w) = \frac{\partial p}{\partial \sigma} + i \frac{\partial p}{\partial \tau}$$

регулярную в верхней полуплоскости  $w = \tau + i\sigma$  и удовлетворяющую на действительной оси условию

$$a(\tau) \frac{\partial p}{\partial \sigma} + b(\tau) \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= 0, & b &= 1, & -\infty < \tau < -(c + d)^2 \\ a &= \vartheta(\theta, \theta_0), & b &= 1, & -(c + d)^2 < \tau < -(c - d)^2 \\ a &= 0, & b &= 1, & -(c - d)^2 < \tau < -1 \\ a &= 1, & b &= 0, & -1 < \tau < 0 \\ a &= \vartheta(\theta, 0), & b &= 1, & 0 < \tau < \infty \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{Im} f^{-1}(\tau)}{\operatorname{Re} f^{-1}(\tau)} = \lambda(\tau), \quad z = f^{-1}(w)$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  имеют разрывы первого рода в точках  $\tau = -1$  и  $\tau = 0$ , а коэффициент  $a$  имеет еще разрывы второго] рода в точках  $\tau_1 \in (0, \infty)$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3 \in (-(c + d)^2, -(c - d)^2)$ , точки  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  соответствуют точкам  $N$ ,  $L$  и  $Q$  плоскости  $z$ .

## Замена функции

$$P(w) = \frac{1}{\sqrt{w(w+1)}} P_1(w)$$

где  $\sqrt{w(w+1)}$  — любая ветвь, регулярная в плоскости с разрезом на действительной оси, устраняет разрывы первого рода в точках  $\tau = -1$  и  $\tau = 0$  (см., например, [4]). Задача Гильберта решается сведением к задаче Римана и точки  $\tau_1, \tau_2$ , и  $\tau_3$  будут особенными точками [8,9]. Тогда индекс задачи  $\kappa = 3$  и решение задачи Гильберта, имеющее нуль второго порядка на бесконечности, имеет вид

$$P(w) = \frac{c_0 + c_1 w + c_2 w^2}{(w+i)^3 \sqrt{w(w+1)}} \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ \left( \frac{s+i}{s-i} \right)^{\kappa} G(s) \right] \frac{ds}{s-w}$$

Здесь

$$\begin{aligned} G(\tau) &= 1, & -\infty < \tau < -(c+d)^2 \\ G(\tau) &= \Theta(\theta, \theta_0), & -(c+d)^2 < \tau < -(c-d)^2 \\ G(\tau) &= 1, & -(c-d)^2 < \tau < 0 \\ G(\tau) &= \Theta(\theta, 0), & 0 < \tau < \infty \\ \Theta(\theta, 0) &= \frac{1 - i\theta(\theta, 0)}{1 + i\theta(\theta, 0)}, & \Theta(\theta, \theta_0) &= \frac{1 - i\theta(\theta, \theta_0)}{1 + i\theta(\theta, \theta_0)}, \quad \operatorname{tg} \theta = \lambda(\tau) \\ & & \ln \left( \frac{\tau+i}{\tau-i} \right)^{\kappa} G(\tau) &= \kappa \ln \frac{\tau+i}{\tau-i} + \ln G(\tau) \end{aligned}$$

где под  $\ln(\tau+i)(\tau-i)^{-1}$  подразумевается ветвь, непрерывно изменяющаяся на действительной оси (включая бесконечно удаленную точку), за исключением некоторой точки  $\tau_0 \in (-\infty, \infty)$ , не совпадающей ни с одной из точек разрыва коэффициентов  $a$  и  $b$ , а  $\ln G(\tau)$  определяется согласно следующему правилу:

$$\operatorname{arg} \frac{G(\tau_n - 0)}{G(\tau_n + 0)} = 0 \quad (n = 1, 2, 3)$$

Действительные постоянные  $c_0, c_1$  и  $c_2$  определяются из условий (2.1) и (2.2).

Решение в плоскости  $z$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial v} + i \frac{\partial p}{\partial \mu} &= \left( \frac{\partial p}{\partial \sigma} + i \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) f'(z) = \frac{c_0 + c_1 f(z) + c_2 f^2(z)}{(f(z)+i)^3 \sqrt{f(z)(f(z)+1)}} \times \\ &\times f'(z) \left( \exp \frac{3}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln \frac{f(s)+i}{f(s)-i} \frac{f'(s) ds}{f(s)-f(z)} + \right. \\ &\left. + \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \ln \Theta(\theta, 0) \frac{f'(s) ds}{f(s)-f(z)} + \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{CD} \ln \Theta(\theta, \theta_0) \frac{f'(s) ds}{f(s)-f(z)} \right) \end{aligned}$$

$\Gamma$  — контур  $ABCDE$

на  $AB$  ( $0 < \theta < \theta_1, \theta_1 = \arccos k$ )

$$r \exp i\theta = k^{-1} (\cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - k^2}) \exp i\theta$$

на  $CD$  ( $\theta_0 - \theta_1 < \theta < \theta_0 + \theta_1$ )

$$r \exp i\theta = k^{-1} (\cos(\theta - \theta_0) - \sqrt{\cos^2(\theta - \theta_0) - k^2}) \exp i\theta$$

Давление вычисляется по формуле

$$p = \operatorname{Im} \int_{-1}^z \left( \frac{\partial p}{\partial v} + i \frac{\partial p}{\partial \mu} \right) dz + p_2 = \operatorname{Im} \int_{-1}^w \left( \frac{\partial p}{\partial \sigma} + i \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) dw + p_2$$

Определив давление, все остальные неизвестные функции можно найти также] в замкнутом виде. Например, форма дифрагированной ударной волны  $AB$  вычисляется из (1.1) по формуле

$$\psi(y) = \frac{(\gamma + 1)(y - k_1)}{4kk_1} E_1 + \frac{\psi(k_1)}{k_1} y - \frac{\gamma + 1}{4k} y \int_{k_1}^y s^{-2} p(s) ds$$

причем  $\psi(k_1)$  известно из решения задачи в области 4.

Поступила 28 III 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л у б и н с к и й А. И. Набегание ударной волны на клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
2. S m y r l J. L. The impact of a shock-wave on a thin two-dimensional aerofoil moving at supersonic speed. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, p. 2.
3. I n g e r G. R. Blast wave impingement on a slender wedge moving at hypersonic speeds. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 3. (Рус. перев.: Ингер Г. Р. Взаимодействие ударной волны с тонким клином, движущимся с гиперзвуковой скоростью. Ракетн. техн. и космонавтика, 1966, № 3).
4. Б е ж а н о в К. А. К теории дифракции ударных волн. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
5. Г о л у б е в В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
6. Г о л у б е в В. В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М., Физматгиз, 1961.
7. Л а м б Х. Гидродинамика. М.—Л., Гостехтеориздат, 1947.
8. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
9. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М., «Наука», 1968.