Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О ПРИМЕНЕНИИ ВЗРЫВНОЙ АНАЛОГИИ К РАСЧЕТУ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

О. С. Рыжов, Е. Д. Терентьев

(Москва)

После установления Цянем [1], Хейзом [2] и А. А. Ильюшиным [3] аналогии между гиперзвуковым обтеканием тонких тел и нестационарными течениями в пространстве с меньшим на единицу числом измерений внимание многих исследователей привлекал вопрос, какому установившемуся потоку соответствует движение газа, вызываемое сильным взрывом. В первых работах [4–8] считалось, что частицы газа при взрыве плоского или шнурового зарядов движутся так же, как и в течении около затупленной пластинки или полубесконечного цилиндра, если их установить под нулевым углом атаки к набегающему потоку. Толщины обтекаемых тел полагались бесконечно малыми, а влияние их затупленных носовых частей заменялось просто воздействием на окружающую среду сосредоточенной силы. Проведенная таким образом аналогия позволила выявить наиболее характерные общие черты обоих явлений, но обладала недостатком: плотность на поверхности пластинки и цилиндра оказывалась равной нулю, а энтропия бесконечности.

В последующих работах, выполненных Ченом [9], В. В. Сычевым [10,11] и Якура [12], была развита концепция высокоэнтропийного слоя, согласно которой толщина обтекаемых тел увеличивалась до бесконечности вниз по потоку, а энтропия вдоль всего контура оставалась конечной. В названных работах подчеркивалось, что течение в высокоэнтропийном слое отличается от течения в остальной области пространства, в частности, применение к расчету этого слоя гипотезы плоских сечений сопряжено с появлением относительно большой ошибки.

Результаты В. В. Сычева [10,11] и Якура [12] тщательно анализируются ниже. Показывается, каким образом они могут быть непосредственно получены из теории сильного взрыва, изложенной в работах Л. И. Седова [13,14] и Тейлора [15]. Эта возможность означает, что в рассматриваемой задаче аналогию между нестационарными течениями и гиперзвуковым обтеканием тонких тел в первом приближении можно применять во всей области за фронтом головного скачка уплотнения, в том числе и в слое, прилегающем к контуру тела. Для определения самого контура достаточно правильно выбрать значение энтропии на образующей его траектории частицы, уравнение которой находится из решения задачи о взрыве в переменных Лагранжа [16].

1. Будем считать, что движение газа обладает осевой симметрией, но основные выводы, которые будут получены ниже, справедливы также для плоскопараллельных течений. Обозначим через x и r оси цилиндрической системы координат, причем ось x направим по вектору скорости невозмущенного потока. Следуя работам [10–12], рассмотрим обратную задачу, в которой предписывается форма скачка уплотнения $r = r_s(x)$, а контур обтекаемого тела находится в процессе ее решения. При применении взрывной аналогии к расчету гиперзвуковых течений полагают

$$r_s = C\sqrt{x} \qquad (1.1)$$

где C — произвольная постоянная.

Основным результатом, полученным В. В. Сычевым [10], было определение формы тела вдали от места пересечения ударным фронтом центральной линии тока. Уравнение $r = r_b(x)$ контура тела дано в виде

$$r_b = Cx^{1/2}\left\{1 + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\int\limits_1^0 G(x, \eta)\left[1 - \frac{\varkappa C^2}{(\varkappa+1)^2}\frac{G(x,\eta)H(\eta)}{x}\right]^{-1/2} d\eta\right\}^{1/2} \quad (1.2)$$

Здесь буквой $\varkappa$ обозначен показатель адиабаты Пуассона, функция H равна отношению давления в области возмущенного течения к давлению за скачком уплотнения, а величина

$$G = \left[\frac{x}{H}\left(x\eta + \frac{C^2}{4}\right)^{-1}\right]^{1/\varkappa} \quad (1.3)$$

При небольших значениях x формула (1.2) теряет силу, так как возмущения поля скоростей оказываются конечными и не могут описываться теорией, которая опирается на аналогию с нестационарными течениями. Напротив, эта формула становится тем точнее, чем большие значения координаты x, поэтому имеет смысл упростить ее, переходя к пределу и полагая $x \to \infty$.

Для указанной цели воспользуемся связью между переменной интегрирования η и автомодельной переменной λ, введенной Л. И. Седовым [16]. Если обозначить через f отношение скорости в зоне возмущенного течения к скорости за ударным фронтом, то [10]

$$\eta = \exp\left(2\int\limits_1^\lambda \left(\lambda - \frac{2}{\varkappa+1}f\right)^{-1} d\lambda\right)$$

Введем в рассмотрение еще функцию g отношение плотности в произвольной точке между скачком уплотнения и телом к плотности, полученной в результате сильного ударного сжатия газа. Между функциями f и g и их первыми производными существует соотношение

$$\frac{1}{g}\frac{dg}{dx} + \left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right)^{-1}\left[\left(\frac{df}{d\lambda} - \frac{\varkappa+1}{2}\right) + \left(\frac{f}{\lambda} + \frac{\varkappa+1}{2}\right)\right] = 0$$

указанное в книге В. П. Коробейникова, Н. С. Мельниковой и Е. В. Рязанова [17]. Это соотношение легко преобразовать к виду

$$\frac{d}{d\lambda}\ln\left[\lambda g\left(\frac{\varkappa+1}{2}\lambda - f\right)\right] = 2\left(\lambda - \frac{2}{\varkappa+1}f\right)^{-1}$$

Отсюда следует, что

$$\eta = \frac{2}{\varkappa-1}\lambda g\left(\frac{\varkappa+1}{2}\lambda - f\right) \quad (1.4)$$

По определению $H(\eta) = h(\lambda)$. Используя равенство (1.4), перепишем формулу (1.3) как

$$G = x^{1/\varkappa}\left\{h\left[\frac{2}{\varkappa-1}\lambda g\left(\frac{\varkappa+1}{2}\lambda - f\right)x + \frac{C^2}{4}\right]\right\}^{-1/\varkappa}$$

Заключенное в квадратные скобки выражение в правой части последнего соотношения можно упростить, если воспользоваться интегралом адиабатичности [17]

$$\frac{2}{\varkappa-1}\lambda g h\left(\frac{\varkappa+1}{2}\lambda - f\right) = g^\varkappa$$

Теперь функция G принимает окончательный вид

$$G = \left(g^{\varkappa} + \frac{C^2}{4}\frac{h}{x}\right)^{-1/\varkappa} \tag{1.5}$$

Переходя в уравнении (1.2) для контура искомого тела от переменной η к автомодельной переменной λ, имеем

$$r_b = Cx^{1/2}\left\{1 + 2\int_1^0 G(x, \lambda)\left[1 - \frac{\varkappa C^2}{(\varkappa+1)^2}\frac{G(x, \lambda)h(\lambda)}{x}\right]^{-1/2}\lambda g(\lambda)\,d\lambda\right\}^{1/2} \tag{1.6}$$

При $x \to \infty$ и конечных значениях λ функция $G \to g^{-1}$. Когда $\lambda \to 0$, то $g \to 0$, а $h \to h_0 \neq 0$, как это следует из полученных Л. И. Седовым [16] асимптотических формул. Поэтому при $\lambda \to 0$ и $x \to \infty$ второе из двух слагаемых, которые заключены в круглые скобки в правой части равенства (1.5), может оказаться больше первого, а при $\lambda = 0$ имеем

$$G = \left(\frac{4}{C^2 h_0}\right)^{1/\varkappa} x^{1/\varkappa}$$

Отсюда следует, что отношение $G / x \to 0$ при $x \to \infty$ и любых значениях λ. Воспользовавшись этим обстоятельством, напишем разложение

$$\left[1 - \frac{\varkappa C^2}{(\varkappa+1)^2}\frac{Gh}{x}\right]^{-1/2} = 1 + \frac{\varkappa C^2}{2(\varkappa+1)^2}\frac{Gh}{x} + \ldots \tag{1.7}$$

Чтобы найти асимптотическое поведение образующей контура искомого тела при больших значениях координаты x, при вычислении интеграла, стоящего в правой стороне (1.6), нужно использовать только первый член ряда (1.7). Нетрудно показать, что остальные члены этого ряда дают в рассматриваемый интеграл вклад более низкого порядка по x. Отсюда в первом приближении находим

$$r_b = Cx^{1/2}\left\{1 + 2\int_1^0 \left(g^{\varkappa} + \frac{C^2}{4}\frac{h}{x}\right)^{-1/\varkappa}\lambda g\,d\lambda\right\}^{1/2} \tag{1.8}$$

Здесь прямое разложение в ряд подынтегрального выражения становится уже невозможным для больших значений x. Поэтому имеем

$$\int_0^1 \left(g^{\varkappa} + \frac{C^2}{4}\frac{h}{x}\right)^{-1/\varkappa}\lambda g\,d\lambda = \left(\int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1\right)\left[\left(g^{\varkappa} + \frac{C^2}{4}\frac{h}{x}\right)^{-1/\varkappa}\lambda g\,d\lambda\right] = J_1 + J_2$$

причем параметр ε выбираем так, чтобы с одной стороны

$$g^{\varkappa}(\varepsilon) \gg \frac{C^2}{4}\frac{h(\varepsilon)}{x} \tag{1.9}$$

а с другой стороны $\varepsilon \ll 1$. Согласно условию (1.9) разложение подынтегрального выражения в J_2 допустимо. Используя его, находим

$$J_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{C^2}{4\varkappa}\frac{1}{x}\int_1^{\varepsilon}\frac{h}{g^{\varkappa}}\,d\lambda + \ldots$$

Для вычисления интеграла J_1 преобразуем предварительно выражение

$$\left(g^{\varkappa} + \frac{C^2}{4}\frac{h}{x}\right)^{-\frac{1}{\varkappa}} = g_0\lambda^{\frac{2}{\varkappa-1}} g^{-1}\mu^{-\frac{1}{\varkappa}}(1+m)^{-\frac{1}{\varkappa}}$$

$$m = \frac{C^2}{\mu g^{\varkappa} x}\left(g_0^{\varkappa}\lambda^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}h - g^{\varkappa}h_0\right), \quad \mu = g_0^{\varkappa}\lambda^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} + \frac{C^2}{4}\frac{h_0}{x} \tag{1.10}$$

Здесь постоянные g_0 и h_0 коэффициенты при первых членах асимптотических разложений функций

$$g=\lambda^{\frac{2}{\varkappa-1}}\left(g_0+g_1\lambda^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}+\ldots\right), \quad h=h_0+h_1\lambda^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}+\ldots \tag{1.11}$$

при малых значениях λ. Используя асимптотические представления (1.11), легко показать, что при больших значениях x и $0\leqslant\lambda\leqslant\varepsilon$ величина $m\ll 1$.

Учитывая это неравенство, находим в первом приближении

$$J_1=g_0\int\limits_0^{\varepsilon}\lambda^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\mu^{-\frac{1}{\varkappa}}\,d\lambda$$

Переходя от интегрирования по λ к интегрированию по μ в соответствии с формулой (1.10), можно вычислить значение J_1 в конечном виде. Удерживая в нем только главные члены, имеем

$$J_1=-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{1}{2}2^{-\frac{2(\varkappa-1)}{\varkappa}}g_0^{1-\varkappa}h_0^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}C^{\frac{2(\varkappa-1)}{\varkappa}}x^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}+\ldots$$

Соберем теперь полученные результаты и подставим их в равенство (1.8). В итоге поведение образующей контура обтекаемого тела при $x\to\infty$ будет даваться соотношением

$$r_b=2^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}g_0^{\frac{1-\varkappa}{2}}h_0^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}C^{\frac{2\varkappa-1}{\varkappa}}x^{\frac{1}{2\varkappa}} \tag{1.12}$$

Для сопоставления формулы (1.12) с аналогичной формулой из теории Якура [12] целесообразно перейти к безразмерным переменным, отнеся значения координат к радиусу r_* ударного фронта в точке его пересечения с осью симметрии. Из уравнения (1.1), задающего форму скачка уплотнения, следует

$$r_s/r_*=\sqrt{2x/r_*}\quad (C=\sqrt{2r_*}) \tag{1.13}$$

Учитывая еще равенства [16,17]

$$g_0=2^{-\frac{2}{(\varkappa-1)(2-\varkappa)}}\varkappa^{\frac{3\varkappa-4}{(\varkappa-1)(2-\varkappa)}}(\varkappa+1)^{\frac{2}{\varkappa-1}},\quad h_0=2^{-\frac{2}{2-\varkappa}}\varkappa^{\frac{2(\varkappa-1)}{2-\varkappa}}(\varkappa+1) \tag{1.14}$$

для коэффициентов g_0 и h_0 придадим формуле (1.12) окончательный вид

$$\frac{r_b}{r_*}=2^{\frac{4-\varkappa}{2\varkappa(2-\varkappa)}}\varkappa^{\frac{2-\varkappa^2}{2\varkappa(2-\varkappa)}}(\varkappa+1)^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\left(\frac{x}{r_*}\right)^{\frac{1}{2\varkappa}} \tag{1.15}$$

2. Обратимся к работе Якура [12]. Для отыскания формы тела, соответствующего ударной волне (1.13), решение уравнений газовой динамики в ней строилось по хорошо разработанному в настоящее время методу сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений; существо этого метода обстоятельно изложено в книге Ван Дайка [18]. Внешняя область течения подчинялась решению Л. И. Седова [13,14] и Тейлора [15] задачи о сильном взрыве, внутреннее разложение давало поле скоростей в слое, прилегающем к обтекаемому телу и обладающем высокой энтропией Считалось, что теория возмущений [1-3], основанная на гипотезе плоских сечений и аналогии с нестационарными течениями, не может быть непосредственно применена к изучению течения в высокоэнтропийном слое.

Анализ формул внутреннего разложения [12] начнем с уравнения

$$\frac{r_b}{r_*}=\left(\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{h_0}\right)^{\frac{1}{2\varkappa}}\left(\frac{x}{r_*}\right)^{\frac{1}{2\varkappa}} \tag{2.1}$$

образующей контура искомого тела. Если воспользоваться вторым из выражений (1.14), то легко видеть, что написанное уравнение тождественно уравнению (1.15), которое вытекает из соотношения (2.1). Таким образом, форма обтекаемого тела, соответствующего скачку (1.13), получается согласно В. В. Сычеву и Якура в первом приближении одинаковой, хотя лежащие в основе их работ методы исследования рассматриваемой задачи были совершенно разными. Этим объясняется хорошее качественное совпадение результатов, полученных прямым вычислением фигурирующего в (1.2) интеграла, с результатами, следующими из формулы (2.1). Некоторое расхождение между ними связано лишь с тем, что значения x/r_* в работах [10,12] выбирались не очень большими. Как видно из изложенного выше, никаких более глубоких причин [19] для такого расхождения нет.

Формулы внутреннего разложения Якура [12] позволяют определить не только контур обтекаемого тела, но и структуру прилегающего к нему высокоэнтропийного слоя. В качестве независимых переменных в них приняты продольная координата x и функция тока ψ, а поперечная координата r задается при помощи равенства

$$\frac{r}{r_*}=\left(\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{h_0}\right)^{\frac{1}{2\varkappa}}\left(\frac{2\psi}{\rho_\infty V_\infty r_*^2}+1\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\left(\frac{x}{r_*}\right)^{\frac{1}{2\varkappa}} \tag{2.2}$$

Здесь через ρ_∞ и v_∞ обозначены плотность и скорость в набегающем потоке. При $\Psi = 0$ из соотношения (2.2) следует (2.1). Воспользовавшись этим соотношением, можно выразить функцию тока через x и r, а затем получить явные выражения для поперечной составляющей v_r скорости частиц, давления p и плотности ρ в зависимости от цилиндрических координат. Подставляя еще вместо коэффициента h_0 его значение (1.14), на основании работы [12] находим

$$\frac{v_r}{V_\infty}=\frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{x}{r_*}\right)^{-1}\frac{r}{r_*},\qquad \frac{p}{\rho_\infty V_\infty^2}=2^{-\frac{2}{2-\varkappa}}\varkappa^{\frac{2(\varkappa-1)}{2-\varkappa}}\left(\frac{x}{r_*}\right)^{-1} \tag{2.3}$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty}=2^{-\frac{4-\varkappa}{(\varkappa-1)(2-\varkappa)}}\varkappa^{\frac{3\varkappa-4}{(\varkappa-1)(2-\varkappa)}}(\varkappa-1)^{-1}(\varkappa+1)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\left(\frac{x}{r_*}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}\left(\frac{r}{r_*}\right)^{\frac{2}{\varkappa-1}}$$

Что касается продольной составляющей v_x скорости частиц, то ее отклонение от скорости набегающего потока будет

$$\frac{v_x}{V_\infty}-1=-2^{\frac{3}{\varkappa-1}}\varkappa^{\frac{2-\varkappa}{\varkappa-1}}(\varkappa+1)^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\left(\frac{x}{r_*}\right)^{\frac{2-\varkappa}{\varkappa-1}}\left(\frac{r}{r_*}\right)^{-\frac{2}{\varkappa-1}} \tag{2.4}$$

Приведем еще выражение для энтропии

$$\frac{p/(\rho_\infty V_\infty^2)}{(\rho/\rho_\infty)^\varkappa}=2(\varkappa-1)^\varkappa(\varkappa+1)^{-(\varkappa+1)}\frac{1}{2\Psi/(\rho_\infty U_\infty r_*^2)+1} \tag{2.5}$$

которая, естественно, зависит только от функции тока Ψ. Максимальное значение энтропии получается при $\Psi = 0$, оно соответствует сжатию газа на прямом скачке уплотнения.

3. Перейдем к рассмотрению зависимостей из теории сильного взрыва, разработанной Л. И. Седовым [13,14] и Тейлором [15]. Обозначим через t время и через E величину, которая пропорциональна энергии, выделяющейся при взрыве шнурового заряда единичной длины. Тогда координата скачка уплотнения

$$r_s=\left(\frac{E}{\rho_\infty}\right)^{1/4}\sqrt{t} \tag{3.1}$$

При применении аналогии к расчету гиперзвуковых течений величину E отождествляют с постоянной F_x, пропорциональной силе, а время t связывают с продольной координатой x при помощи соотношения [4—8]

$$t = x \mathbin{/} U_\infty \tag{3.2}$$

Его подстановка в формулу (3.1) даст

$$\frac{r_s}{r_*} = C_{x1}^{1/4}\left(\frac{x}{r_*}\right)^{1/2} \qquad \left(C_{x1} = \frac{F_x}{\rho_\infty U_\infty{}^2 r_*{}^2}\right) \tag{3.3}$$

Чтобы равенство (3.3) совпало с (1.13), необходимо положить коэффициент сопротивления $C_{x_1} = 4$, это условие будет считаться в дальнейшем выполненным. Как показал Л. И. Седов [16], вблизи центра взрыва справедливы асимптотические разложения

$$v_r = \frac{1}{2\varkappa}\frac{r}{t}, \quad p = k_2\rho_\infty\left(\frac{E}{\rho_\infty}\right)^{1/2}\frac{1}{t}, \quad \rho = k_1\rho_\infty\left(\frac{E}{\rho_\infty}\right)^{-\frac{1}{2(\varkappa-1)}} t^{-\frac{1}{\varkappa-1}} r^{\frac{2}{\varkappa-1}} \tag{3.4}$$

в которых коэффициенты k_1 и k_2 связаны с показателем адиабаты Пуассона следующим образом:

$$k_1 = 2^{-\frac{2}{(\varkappa-1)(2-\varkappa)}}\varkappa^{\frac{3\varkappa-4}{(\varkappa-1)(2-\varkappa)}}(\varkappa-1)^{-1}(\varkappa+1)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}, \qquad k_2 = 2^{-\frac{4-\varkappa}{2-\varkappa}}\varkappa^{\frac{2(\varkappa-1)}{2-\varkappa}}$$

Переходя в разложениях (3.4) от времени t к координате x согласно (3.2) и учитывая два последних равенства, можно убедиться, что указанные разложения в точности совпадают с формулами (2.3), выведенными Якура. Но такое совпадение означает справедливость гипотезы плоских сечений [1-3] и в применении к высокоэнтропийному слою, непосредственно прилегающему к поверхности обтекаемого тела. Действительно, в качестве внутреннего разложения в работе Якура [12] фактически найдена асимптотика решения задачи о сильном взрыве при $r \to 0$, а затем найденная асимптотика склеена с полным решением этой же задачи. Иными словами, аналогию между нестационарными течениями и гиперзвуковым обтеканием тонких тел можно использовать для расчета всей области, расположенной между фронтом скачка уплотнения и поверхностью тела.

Остается рассмотреть еще вопрос о форме самого тела. Как уже ясно, его контур должен образоваться траекторией одной из частиц, приведенных в движение взрывной волной. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся решением задачи о взрыве в переменных Лагранжа, которое приведено в монографии Л. И. Седова [16]. Названное решение записывается в параметрическом виде, причем в качестве параметра выбирается безразмерная скорость $V = tv_r/r$. Оси симметрии течения отвечает значение $V = 1/(2\varkappa)$. Обозначим через r_0 начальную координату частицы, которую она имела до прохождения ударной волны, и положим

$$V = \frac{1}{2\varkappa}(1 + \Delta)$$

Как легко проверить, при малых значениях Δ решение [16] задачи о сильном взрыве в переменных Лагранжа обладает следующей асимптотикой:

$$\frac{r}{r_s} = 2\varkappa^{1/2}(\varkappa - 1)^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}(\varkappa + 1)^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\Delta^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}$$

$$\frac{r_0}{r_s} = 2^{-\frac{\varkappa-1}{2-\varkappa}}\varkappa^{\frac{1}{2-\varkappa}}(\varkappa - 1)^{-1/2}\Delta^{1/2}$$

Исключив отсюда параметр Δ и воспользовавшись выражением (3.3) для координаты r_s скачка уплотнения, находим

$$\frac{r}{r_*} = 2^{\frac{4-\varkappa}{2\varkappa(2-\varkappa)}}\varkappa^{\frac{2-\varkappa^2}{2\varkappa(2-\varkappa)}}(\varkappa + 1)^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\left(\frac{r_0}{r_*}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\left(\frac{x}{r_*}\right)^{\frac{1}{2\varkappa}} \tag{3.5}$$

При $r_0 = r_*$ формула (3.5) полностью совпадает с (1.15), откуда следует, что контур обтекаемого тела образуется траекторией частицы, приведенной в движение взрывной волной. Найденное значение координаты r_0 связано с надлежащим выбором энтропии вдоль траектории — контура. Действительно, в задаче о сильном взрыве [16]

$$\frac{p}{\rho^\varkappa} = \frac{1}{2}(\varkappa - 1)^\varkappa(\varkappa + 1)^{-(\varkappa+1)}\frac{E}{\rho_\infty{}^\varkappa}\frac{1}{r_0{}^2} \tag{3.6}$$

Переходя к безразмерным переменным, имеем

$$\frac{p/(\rho_\infty U_\infty{}^2)}{(\rho/\rho_\infty)^\varkappa} = 2(\varkappa - 1)^\varkappa(\varkappa + 1)^{-(\varkappa+1)}\left(\frac{r_*}{r_0}\right)^2 \tag{3.7}$$

Сравним полученное значение энтропии с задаваемым формулой (2.5), в которой обтекаемому телу соответствует величина $\Psi = 0$. Оба значения оказываются равными при $r_0 = r_*$. Таким образом, при прямом применении теории взрыва к расчету гиперзвуковых течений для определения контура обтекаемого тела нужно лишь правильно задать значение энтропии на образующей его траектории частиц. Это значение энтропии получается при ударном сжатии газа на фронте прямого скачка уплотнения в гиперзвуковом потоке. Оно будет максимально допустимым, так как в установившемся течении энтропия за косым скачком уплотнения должна иметь меньшую величину. Напротив, согласно решению задачи о сильном взрыве энтропия в частицах может беспредельно увеличиваться при приближении к оси симметрии. Максимально допустимое значение энтропии

$$\left[\frac{p/(\rho_\infty U_\infty{}^2)}{(\rho/\rho_\infty)^\varkappa}\right]_{\max} = 2(\varkappa - 1)^\varkappa(\varkappa + 1)^{-(\varkappa+1)}$$

в согласии с соотношением (2.5). Оно выделяет ту область нестационарного течения, которую можно использовать для расчета гиперзвукового потока. В остальной части нестационарного течения, вызываемого сильным взрывом шнурового заряда, значения энтропии в частицах слишком высоки, чтобы они могли реализоваться в гиперзвуковом установившемся потоке.

Вблизи контура тела линии тока нормируются соотношением

$$\frac{2\Psi}{\rho_\infty U_\infty r_*^2} = \left(\frac{r_0}{r_*}\right)^2 - 1 \tag{3.8}$$

вытекающим из сопоставления формул (2.5) и (3.7). При выполнении условия (3.8) уравнение (3.5) для траектории произвольной частицы переходит в соотношение (2.2), входящее в полученное Якура внутреннее разложение.

Поправка (2.4) к продольной составляющей вектора скорости также легко находится на основании теории сильного взрыва. Для этой цели достаточно подставить формулы (3.4), приведенные к виду (2.3), в интеграл Бернулли

$$\frac{1}{2}(v_x^2 + v_r^2) + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}U_\infty^2$$

Отметим еще, что согласно теории малых возмущений, траектория частицы должна определяться решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dr}{dt} = v_r(t, r)|_{r\to 0} = \frac{1}{2\varkappa}\frac{r}{t}$$

Его интегрирование дает

$$r = At^{\frac{1}{2\varkappa}} \tag{3.9}$$

Чтобы надлежащим образом определить произвольную постоянную A, подставим асимптотические разложения (3.4) для давления и плотности в левую часть уравнения (3.6). Учет связи (3.9) между цилиндрической координатой и временем позволяет вычислить A через начальное положение частицы r_0. Легко проверить, что после перехода от t к x согласно (3.2) вновь получается формула (3.5). Таким образом, условие сохранения энтропии в частице дает возможность установить правильное значение постоянной в асимптотическом разложении для ее траектории при $t \to \infty$.

4. В заключение остановимся на результатах работы [11]. В ней также ставилась задача об отыскании формы тела, порождающего в стационарном гиперзвуковом потоке скачок вида (1.1) и (1.13). Для решения названной задачи применялся метод деформированных координат Пуанкаре — Лайтхилла — Го, заключенный в книге Ван Дайка [18]. В качестве масштаба, к которому относились значения цилиндрических координат, выбирался диаметр d затупления тела. Уравнение ударного фронта записывалось как

$$r_s/d = \varkappa_1 C_{x_2}^{1/4}\,(x/d)^{1/2}$$

Эту формулу можно отождествить с использовавшейся ранее формулой (1.13), если положить

$$\varkappa_1^4 C_{x2} = C_{x1} = 4 \tag{4.1}$$

Тогда масштабный множитель d ничем не будет отличаться от радиуса r_* кривизны скачка уплотнения в точке его пересечения с осью симметрии потока. Уравнение контура искомого тела, согласно работе [11], гласит

$$\frac{r_b}{d} = 2^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\varkappa^{\frac{1}{2}}(\varkappa+1)^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\varkappa_1^2\varkappa_2^{-\frac{1}{2\varkappa}}C_{x2}^{\frac{2\varkappa-1}{4\varkappa}}\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{1}{2\varkappa}}$$

причем постоянная $\varkappa_2$ выражается через $\varkappa_1$ и использовавшийся ранее коэффициент h_0 посредством формулы

$$\varkappa_x = \frac{h_0\varkappa_1^2}{\varkappa + 1}$$

Используя ее, находим сразу

$$\frac{r_b}{d} = 2^{\frac{\varkappa^2-3\varkappa+3}{\varkappa(2-\varkappa)}} \varkappa^{\frac{2-\varkappa^2}{2\varkappa(2-\varkappa)}} (\varkappa+1)^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \left(\varkappa_1 C_{x2}^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2\varkappa-1}{\varkappa}} \left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{1}{2\varkappa}} \qquad (4.2)$$

Если теперь учесть равенство (4.1) для коэффициента сопротивления C_{x2}, то соотношение (4.2) перейдет в (1.15) с $d = r_*$.

Как видно из изложенного, применение методов асимптотических разложений и деформирования координат при решении обратной задачи об определении формы тела по порождаемой им ударной волне (1.13) дает один и тот же рецепт: результатами теории сильного взрыва можно пользоваться без каких-либо изменений во всей области между ударным фронтом и телом, контур которого образуется траекторией частицы с энтропией, соответствующей сжатию газа в стационарном гиперзвуковом потоке на прямом скачке уплотнения.

Авторы благодарят А. А. Дородницына и В. В. Сычева за полезные дискуссии.

Поступила 4 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsien H. S. Similarity laws of hypersonic flows. J. Math. Phys., 1946, vol. 25, No. 3.
2. Hayes W. D. On hypersonic similitude. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No. 1.
3. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
4. Cheng H. K., Pallone A. J. Inviscid leading-edge effect in hypersonic flow. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 7.
5. Lees L., Kubota T. Inviscid hypersonic flow over blunt-nosed slender bodies. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, No. 3.
6. Черный Г. Г. Влияние малого затупления передней кромки профиля на его обтекание при большой сверхзвуковой скорости. Докл. АН СССР, 1957, т. 114, № 4.
7. Черный Г. Г. Обтекание тонкого затупленного конуса при большой сверхзвуковой скорости. Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 4.
8. Черный Г. Г. Влияние малого затупления переднего конца тела на его обтекание потоком с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 4.
9. Cheng H. K. Similitude of hypersonic real gas flows over slender bodies with blunted noses. J. Aeronaut. Sci., 1959, vol. 26, No. 9.
10. Сычев В. В. К теории гиперзвуковых течений газа со скачками уплотнения степенной формы. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
11. Сычев В. В. О методе малых возмущений в задачах обтекания тонких затупленных тел гиперзвуковым потоком газа. ПМТФ, 1962, № 6.
12. Якура Дж. Теория энтропийных слоев и затупление носка в гиперзвуковом течении. В сб.: «Исследование гиперзвуковых течений», М., «Мир», 1964.
13. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
14. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
15. Taylor G. I. The formation of a blast wave by a very intense explosion. II. The atomic explosion of 1945. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1950, vol. 201, No. 1065.
16. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
17. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
18. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
19. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory New Jork — London, Acad. Press, 1966.