

МЕТОД АНАЛИЗА ФРОНТОВЫХ РАЗРЫВОВ, ВОЗБУЖДЕННЫХ ВОЛНОЙ ДАВЛЕНИЯ В МЕМБРАНАХ И ОБОЛОЧКАХ

М. Э. Кутсер, У. К. Нигул

(Таллин)

На базе метода преобразования Лапласа предлагается асимптотический метод выявления месторасположения и интенсивности фронтовых разрывов решения линейного одномерного гиперболического уравнения второго порядка или системы таких уравнений в задачах, при которых правая часть уравнения или системы имеет характер волны давления, распространяющейся с убывающей скоростью, которая в некотором начальном этапе движения превышает скорость распространения волн, описываемых соответствующим однородным уравнением или системой однородных уравнений. Метод в начале статьи изложен на примере уравнения второго порядка (плоская деформация мембраны), а затем обобщен для системы уравнений шестого порядка, которая с точностью теории типа Тимошенко описывает плоские и осесимметричные волновые процессы деформации упругих оболочек. Обратное влияние деформации на волну давления метод не учитывает.

Подобно основополагающей работе Н. А. Алумяэ [1], посвященной частному случаю сферической оболочки под воздействием плоской волны давления, предлагаемый метод использует это обстоятельство, что поперечные сечения, в которых убывающая скорость волны давления становится равной скорости (или одной из скоростей) распространения волн деформации, являются седловыми точками для интегралов, подлежащих вычислению в пространстве преобразования Лапласа. Однако, если асимптотика типа работы [1] обоснована достаточно далеко от поперечных сечений, определяющих седловые точки, то предлагаемая асимптотика преимущественно предназначена для окрестности этих поперечных сечений и одновременно дает приемлимые результаты также довольно далеко от них. Существуют частные случаи, при которых предлагаемый метод дает точное решение для всего волнового процесса.

Предлагаемые асимптотические формулы имеют структуру, удобную для построения частных решений, переносящих наиболее сильные разрывы решения, причем оставшая часть решения может быть найдена численно методом сеток, подобно тому, как в [2-5] были изучены волновые процессы деформации плит и оболочек под воздействием краевой нагрузки. Асимптотические формулы типа работы [1] для этой цели не пригодны.

1. Асимптотический метод и его применение в случае одномерного волнового уравнения. Пусть штрих обозначает дифференцирование по безразмерной координате ξ и точка — по безразмерному времени τ . Рассмотрим выявление месторасположения и интенсивности разрывов решения уравнения

$$u'' - \dot{u}'' = q \quad (1.1)$$

при следующих дополнительных условиях:

(а) при $\tau = 0$ заданы нулевые начальные условия,

(б) при $\xi = 0$ задано краевое условие или условие симметрии, а при $\xi \rightarrow \infty$ условие $u \rightarrow 0$,

(в) функция $q(\xi, \tau)$ симметрична относительно точки $\xi = 0$ и представляет собой воздействие типа волны давления, фронт которой (фиг. 1) задан уравнением

$$\tau = p(\xi) \quad (1.2)$$

где $p(\xi)$ удовлетворяет условиям

$$p(0) = 0, \quad p'(\xi) \begin{cases} < 1 & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_1, \\ = 1 & \text{при } \xi = \xi_1, \\ > 1 & \text{при } \xi > \xi_1, \end{cases} \quad p''(\xi) > 0 \quad (1.3)$$

В силу указанных условий достаточно ограничиться рассмотрением области $\xi \geq 0$.

Поставленная математическая задача может быть физически интерпретирована как задача анализа плоского волнового процесса деформации мембраны под воздействием волны давления или же как соответствующим образом сформулированная задача для стержня.

Определим преобразование Лапласа по формулам

$$F(\xi, s) = \int_0^{\infty} f(\xi, \tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$f(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(\xi, s) e^{s\tau} ds \quad (1.4)$$

Используя условие (а), из (1.1) получим

$$U'' - s^2 U = Q \quad (1.5)$$

Решение этого уравнения будем искать в форме

$$U = \sum_{j=1}^2 A_j e^{\lambda_j \xi} + \sum_{j=1}^2 D_j J_j \quad (\lambda_1 = -s, \lambda_2 = s) \quad (1.6)$$

$$J_j(\xi) = e^{\lambda_j \xi} I_j(\xi), \quad I_j(\xi) = \int_0^{\xi} e^{-\lambda_j x} Q(x) dx \quad (1.7)$$

В (1.6) первая сумма представляет собой общее решение однородного уравнения (1.5), а вторая сумма — частное решение неоднородного уравнения (1.5). Подставляя частное решение и учитывая формулы дифференцирования

$$J_j' = \lambda_j J_j + Q, \quad J_j'' = \lambda_j^2 J_j + \lambda_j Q + Q' \quad (1.8)$$

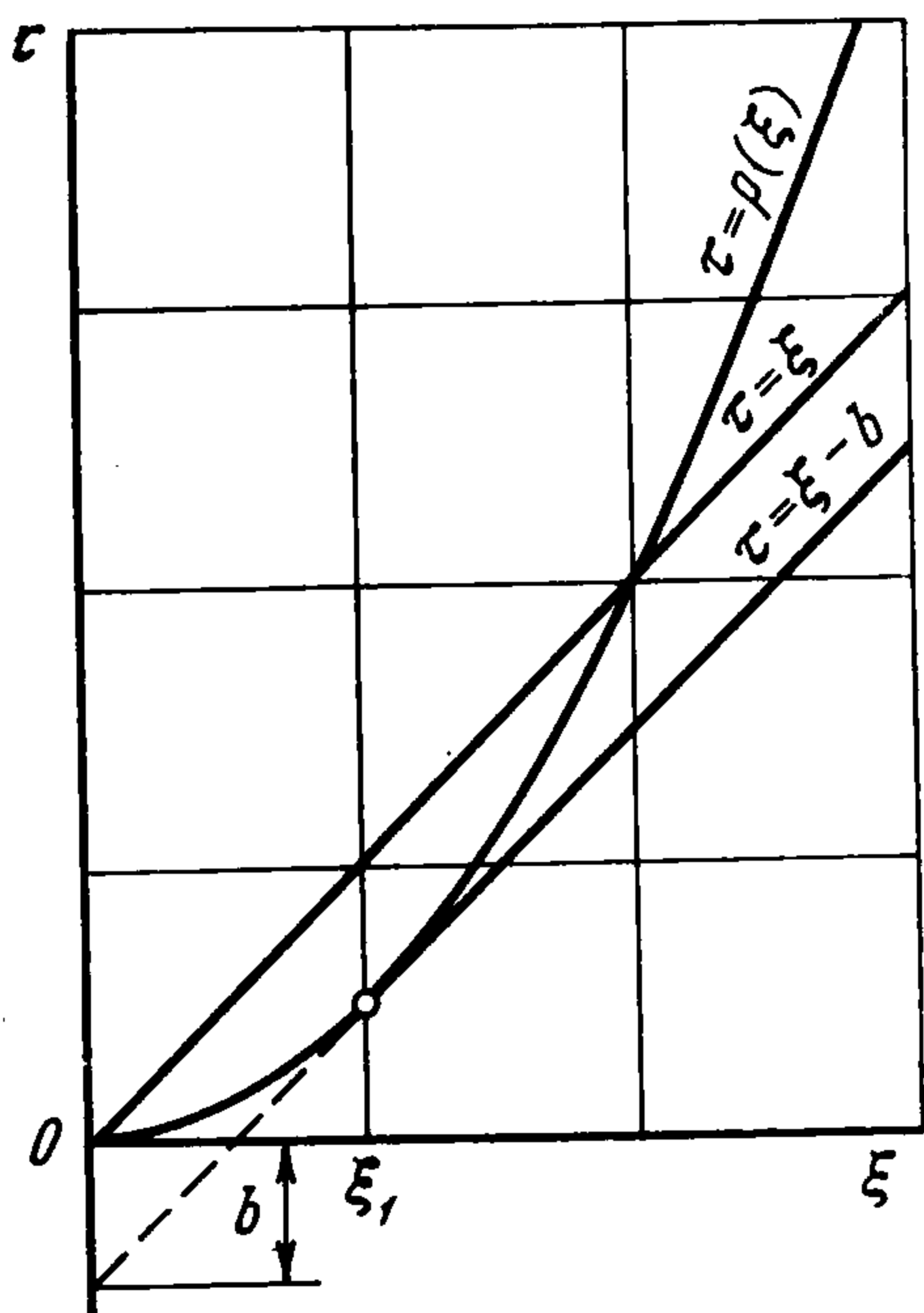
имеем

$$D_1 = -D_2 = -\frac{1}{2s} \quad (1.9)$$

Используя второе из условий (б), получим

$$A_2(s) = -D_2(s) I_2(\infty) \quad (1.10)$$

Рассмотрим вычисление $A_1(s)$ в двух случаях первого условия (б).



Фиг. 1

Задача 1. Пусть $u(0, \tau) = 0$, тогда $U(0, s) = 0$, откуда следует

$$-A_1(s) = A_2(s) = -\frac{1}{2s} I_2(\infty) \quad (1.11)$$

Задача 2. Пусть $u'(0, \tau) = 0$, тогда $U'(0, s) = 0$, откуда следует

$$A_1(s) = A_2(s) = -\frac{1}{2s} I_2(\infty) \quad (1.12)$$

Для выявления месторасположения и интенсивности разрывов u будем искать асимптотическое при $s \rightarrow \infty$ приближение U . В качестве первого шага вычисляем асимптотические при $s \rightarrow \infty$ значения интегралов $I_j(\xi)$. При этом предполагаем, что Q имеет структуру

$$Q = s^{-1/2n} G(\xi) e^{-sp(\xi)} \quad (n=2, 3, 4, \dots) \quad (1.13)$$

и формально распространяем $G(\xi)$, $p(\xi)$ симметрично в области $\xi \leq 0$ так, что

$$G(-\xi) = G(\xi), \quad p(-\xi) = p(\xi) \quad (1.14)$$

Представим интегралы $I_j(\xi)$ в виде

$$I_j(\xi) = e^{bs} s^{-1/2n} \int_0^\xi G(x) e^{-sp_j(x)} dx, \quad \varphi_j(\xi) = p(\xi) + \xi \lambda_j s^{-1} + b \geq 0 \quad (1.15)$$

Здесь постоянная b выбирается так, что выполняется условие

$$\varphi_j(\xi_j) = 0 \quad (\text{идентичное при } j=1, 2) \quad (1.16)$$

При этом величины $\xi_1 = -\xi_2$, $\xi_1 > 0$ определяются из условий

$$\varphi_j'(\xi_j) = 0 \quad (j=1, 2) \quad (1.17)$$

так что

$$\xi = \xi_1, \text{ если } p'(\xi) = 1; \quad \xi = \xi_2, \text{ если } p'(\xi) = -1 \quad (1.18)$$

Подынтегральные экспоненциальные функции в (1.15) имеют стационарное значение соответственно в седловых точках $\xi = \xi_j$. Поэтому для вычисления $I_j(\xi)$ при $s \rightarrow \infty$ естественно частично использовать идею метода перевала.

Представим интегралы (1.15) в случае, когда седловая точка находится вне интервала интегрирования, в виде суммы двух интегралов по интервалам, содержащим седловую точку, и введем в случае $j=1, j=2$ соответственно новую переменную интегрирования

$$z = z(x) = \sqrt{s\varphi_j(x)} \operatorname{sign}(x - \xi_j) \quad (1.19)$$

тогда нетрудно обосновать следующую формулу:

$$I_j(\xi) = e^{bs} s^{-\frac{n+1}{2}} \int_{z(0)}^{z(\xi)} \frac{G(\xi) e^{-z^2}}{(\sqrt{\varphi_j(\xi)})^j} dz \quad (j=1, 2) \quad (1.20)$$

Здесь радикалы берутся со знаком плюс

$$\varphi_j(0) = p(0) + b = b \quad (1.21)$$

Используя идею метода перевала в подынтегральном выражении (1.20), примем

$$G(\xi) \approx G(\xi_j) \\ (\sqrt{\varphi_j(\xi)})' \approx (\sqrt{\varphi_j(\xi_j) + (\xi - \xi_j)\varphi_j'(\xi_j) + 1/2(\xi - \xi_j)^2\varphi_j''(\xi_j)})' = 1/2\sqrt{2p''(\xi_j)} \quad (1.22)$$

В результате имеем

$$I_j(\xi) \approx N \{ \Phi[\sqrt{s\varphi_j(\xi)} \operatorname{sign}(\xi - \xi_j)] + \Phi[\sqrt{sb} \operatorname{sign}(\xi_j)] \} \quad (1.23)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности, а

$$N = M e^{bs} s^{-1/2(n+1)}, \quad M_j \approx G(\xi_1) \sqrt{1/2\pi / p''(\xi_1)} \quad (1.24)$$

Учитывая соотношения

$$1 - \Phi(x) = \operatorname{erfc}(x), \quad \operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc}(x)$$

представим (1.23) в развернутом виде

$$I_1(\xi) \approx N \{ \operatorname{erfc}[\sqrt{s\varphi_1(\xi)}] - \operatorname{erfc}[\sqrt{sb}] \} \quad \text{при } 0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ I_1(\xi) \approx N \{ 2 - \operatorname{erfc}[\sqrt{s\varphi_1(\xi)}] - \operatorname{erfc}[\sqrt{sb}] \} \quad \text{при } \xi \geq \xi_1 \\ I_2(\xi) \approx N \{ \operatorname{erfc}[\sqrt{sb}] - \operatorname{erfc}[\sqrt{s\varphi_2(\xi)}] \} \quad \text{при } 0 \leq \xi \quad (1.25)$$

С такой же точностью вычисления в (1.11) и (1.12)

$$I_2(\infty) \approx N \operatorname{erfc}[\sqrt{sb}] \quad (1.26)$$

С учетом указанного имеем для задач 1 и 2 следующие изображения решения:

$$U = 1/2 M s^{-1/2(n+2)} \{ 2T e^{-s\xi} E(sb) - e^{-sp(\xi)} [E(s\varphi_1) + E(s\varphi_2)] \} \quad \text{при } \xi \leq \xi_1 \quad (1.27) \\ U = 1/2 M s^{-1/2(n+2)} \{ 2T e^{-s\xi} E(sb) + e^{-sp(\xi)} [E(s\varphi_1) - E(s\varphi_2)] - 2s^{-1/2} e^{(b-\xi)s} \} \quad \text{при } \xi \geq \xi_1 \\ E(sy) = s^{-1/2} e^{sy} \operatorname{erfc}(\sqrt{sy})$$

Здесь $T = 1$ в случае задачи 1, $T = 0$ в случае задачи 2.

Известны следующие формулы обращения [6]:

$$e^{-sy} E(sy) \rightarrow \frac{H(\tau - \gamma)}{\sqrt{\pi(\tau + y - \gamma)}} \quad (1.28)$$

$$s^{-1/2(m+3)} e^{s(b-\xi)} \rightarrow r(\tau - \xi + b)^{1/2(m+1)} H(\tau - \xi + b) \quad (1.29)$$

$$s^{-1/2(m+3)} e^{-sy} E(sy) \rightarrow r H(\tau - \gamma) \int_0^{\tau - \gamma} \frac{(\tau - \gamma - t)^{1/2(m+1)}}{\sqrt{\pi(t + y)}} dt \quad (1.30)$$

$$r = \frac{1}{[1/2(m+1)]!} \quad \text{при } m = 1, 3, 5, \dots$$

$$r = \frac{2^{m+2}}{(m+2)! \sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{m+2}{2} \right) \right]! \quad \text{при } m+2 = 0, 2, 4, \dots$$

позволяющие по асимптотическим при $s \rightarrow \infty$ формулам (1.27) найти разрывы искомого решения.

Замечание 1.1. В силу (1.22) формулы (1.23) — (1.27) в общем случае являются приближенными. Однако, если $G(\xi) = \text{const}$ и $p(\xi)$ является квадратичным полиномом, то они будут точными. ▮

Замечание 1.2. Если $G(\xi)$ и $p(\xi)$ таковы, что в областях $|\xi - \xi_j| \gg 1$ упрощения (1.22) становятся грубо приближенными, то в указанных областях может оказаться целесообразным применить следующие стандартные формулы метода перевала [7];

$$I_1(\xi) = S_1(\xi) \quad \text{при } 0 < \xi < \xi_1$$

$$I_1(\xi) = S_1(\xi) + \sqrt{2\pi/p''(\xi_1)} G(\xi_1) e^{bs} s^{-1/2(n+1)} \quad \text{при } \xi > \xi_1 \quad (1.31)$$

$$I_2(\xi) = S_2(\xi) \quad \text{при } 0 < \xi$$

$$S_j = \left\{ \frac{G(0)}{p'(0) + (-1)^j} - \frac{G(\xi)}{p'(\xi) + (-1)^j} e^{-s[p(\xi) + (-1)^j \xi]} \right\} s^{-1/2(n+2)} \quad (1.32)$$

Подобные формулы были использованы в [1]. Помимо того, что формулы (1.31), (1.32) не применимы в окрестности точки $\xi = \xi_1$, их недостаток еще в том, что они практически неприменимы для выделения частного решения, переносящего основные разрывы решения, ибо второй член в S_1 будет бесконечным при $\xi = \xi_1$.

2. Численные примеры для случая, допускающего точное решение. Рассмотрим случай

$$q(\xi, \tau) = H(\tau - k_0 \xi^2) \quad (2.1)$$

при котором $G(\xi) = 1$, $p(\xi) = k_0 \xi^2$ в обозначениях п. 1 и (1.27) представляет точное изображение решения задач 1, 2. При этом

$$M = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_0}}, \quad n = 2, \quad b = \frac{1}{4k_0}, \quad \Phi_1(\xi) = k_0 \left(\xi - \frac{1}{2k_0} \right)^2, \quad \Phi_2(\xi) = k_0 \left(\xi + \frac{1}{2k_0} \right)^2$$

Используя (1.28) — (1.30), получим точное решение

$$u = -\frac{2}{3\sqrt{k_0}} \tau_1^{3/2} H(\tau_1) H\left(\tau - \frac{1}{4k_0}\right) + T \left[\frac{2}{3\sqrt{k_0}} \tau_1^{3/2} - \frac{1}{2k_0} (\tau - \xi) - \frac{1}{12k_0^2} \right] H(\tau - \xi) +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{3\sqrt{k_0}} \left(\tau_1^{3/2} \left[-1 + 2H\left(\tau - \frac{1}{4k_0}\right) \right] - \tau_2^{3/2} \right) - \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{2k_0} \right) \tau_1 + \right. \quad (2.2)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{2k_0} \right) \tau_2 + \frac{k_0}{6} \left(\xi - \frac{1}{2k_0} \right)^3 - \frac{k_0}{6} \left(\xi + \frac{1}{2k_0} \right)^3 \right\} H[\tau - p(\xi)]$$

$$\left(\tau_1 = \tau - \xi + \frac{1}{4k_0}, \quad \tau_2 = \tau + \xi + \frac{1}{4k_0} \right)$$

Здесь $H(\tau)$ — функция Хевисайда, а $T = 1$ в случае краевого условия $u(0, \tau) = 0$ (задача 1) и $T = 0$ в случае краевого условия $u'(0, \tau) = 0$ (задача 2).

Дифференцированием по τ из (2.2) легко получить формулы безразмерной скорости и ускорения

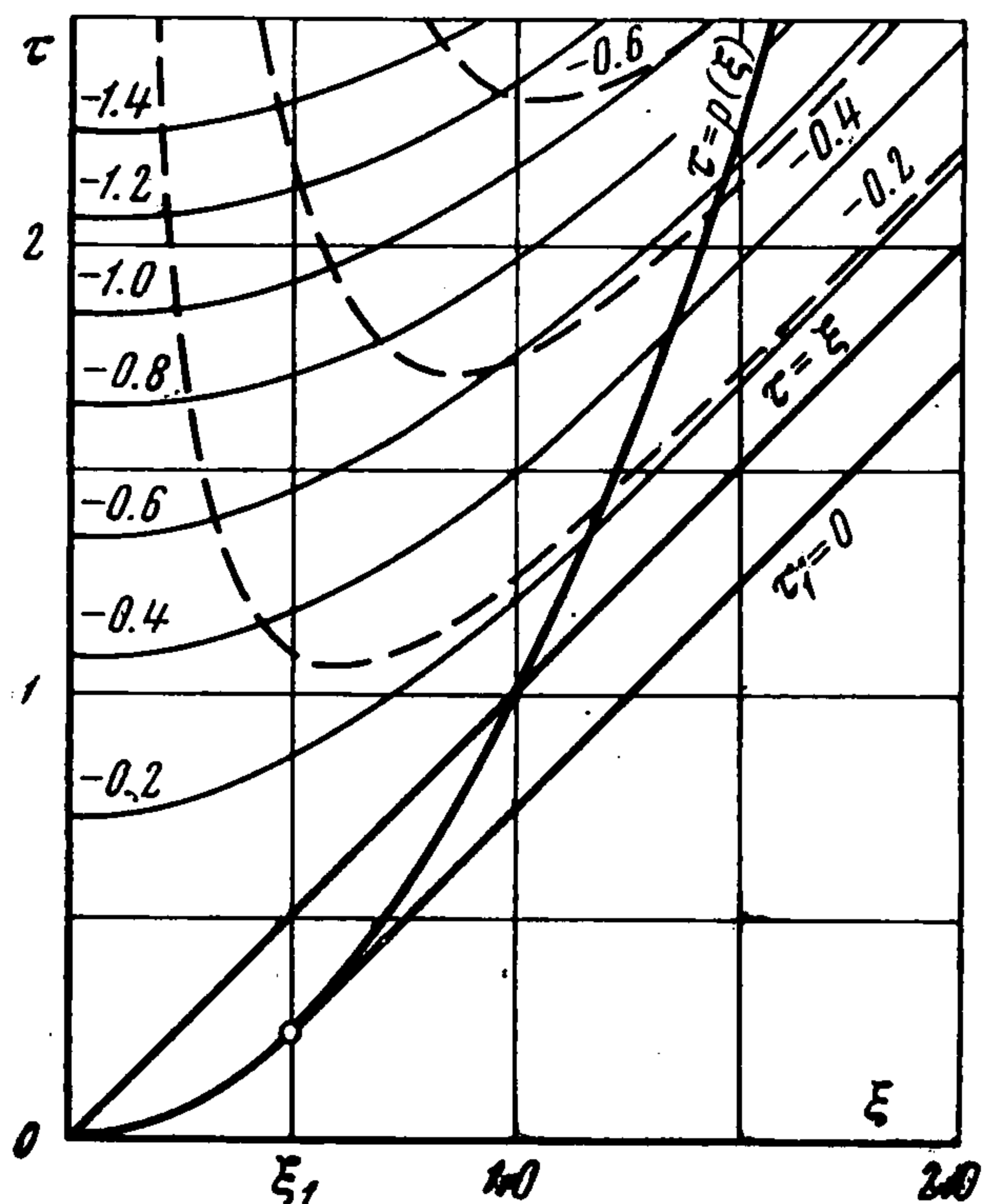
$$u' = -\frac{1}{\sqrt{k_0}} \tau_1^{1/2} H(\tau_1) H\left(\tau - \frac{1}{4k_0}\right) + T \left(\frac{1}{\sqrt{k_0}} \tau_1^{1/2} - \frac{1}{2k_0} \right) H(\tau - \xi) +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2\sqrt{k_0}} \left(\tau_1^{1/2} \left[-1 + 2H\left(\tau - \frac{1}{4k_0}\right) \right] - \tau_2^{1/2} \right) + \frac{1}{2k_0} \right\} H[\tau - p(\xi)] \quad (2.3)$$

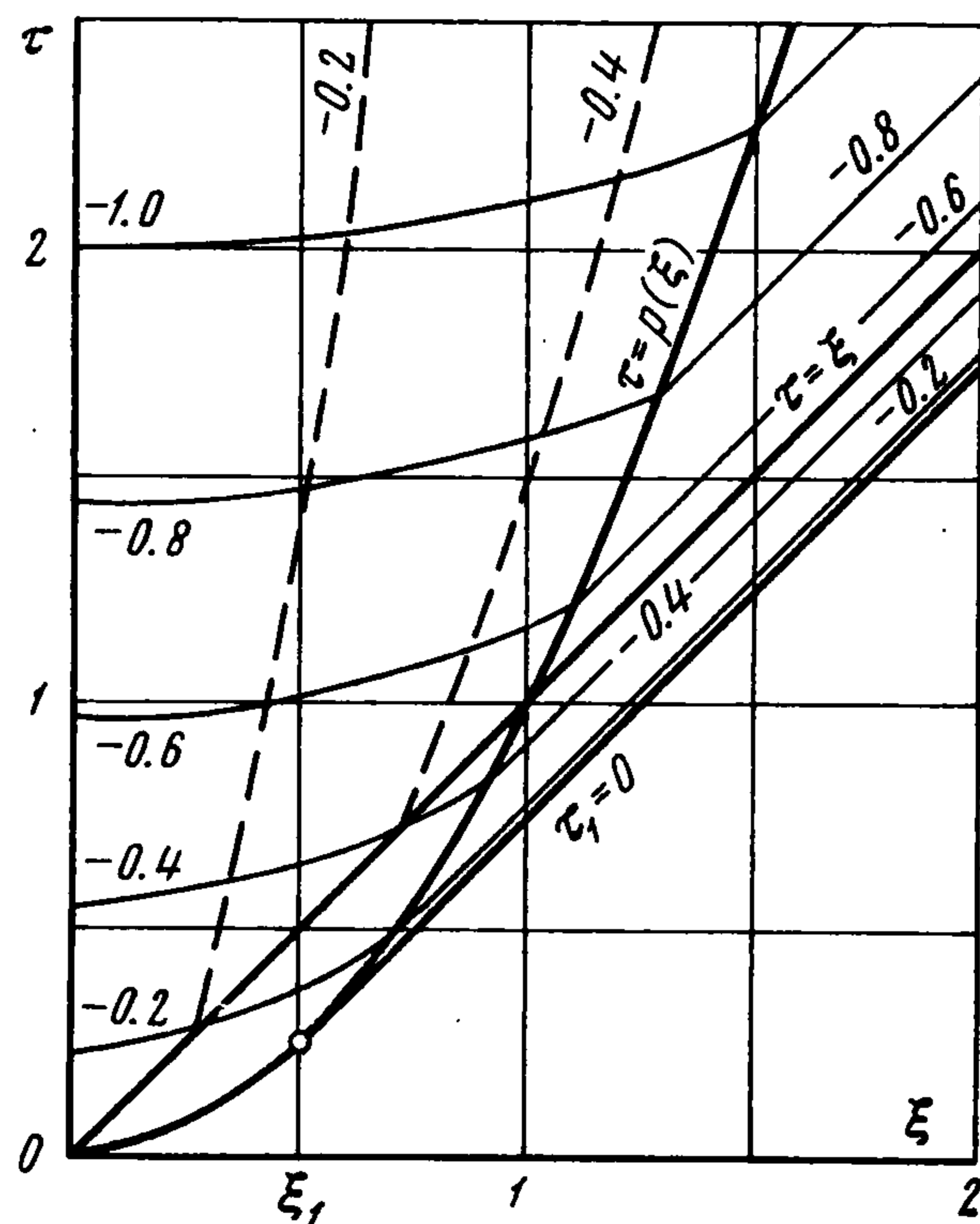
$$u'' = -\frac{1}{2\sqrt{k_0}} \tau_1^{-1/2} H(\tau_1) H\left(\tau - \frac{1}{4k_0}\right) + T \frac{1}{2\sqrt{k_0}} \tau_1^{-1/2} H(\tau - \xi) +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{k_0}} \left(\tau_1^{-1/2} \left[-1 + 2H\left(\tau - \frac{1}{4k_0}\right) \right] - \tau_2^{-1/2} \right) H[\tau - p(\xi)] \quad (2.4)$$

Численные результаты для случая $k_0 = 1$ представлены на фиг. 2—4, на которых пунктирные линии соответствуют задаче 1, а сплошные — задаче 2. На фиг. 2 показаны



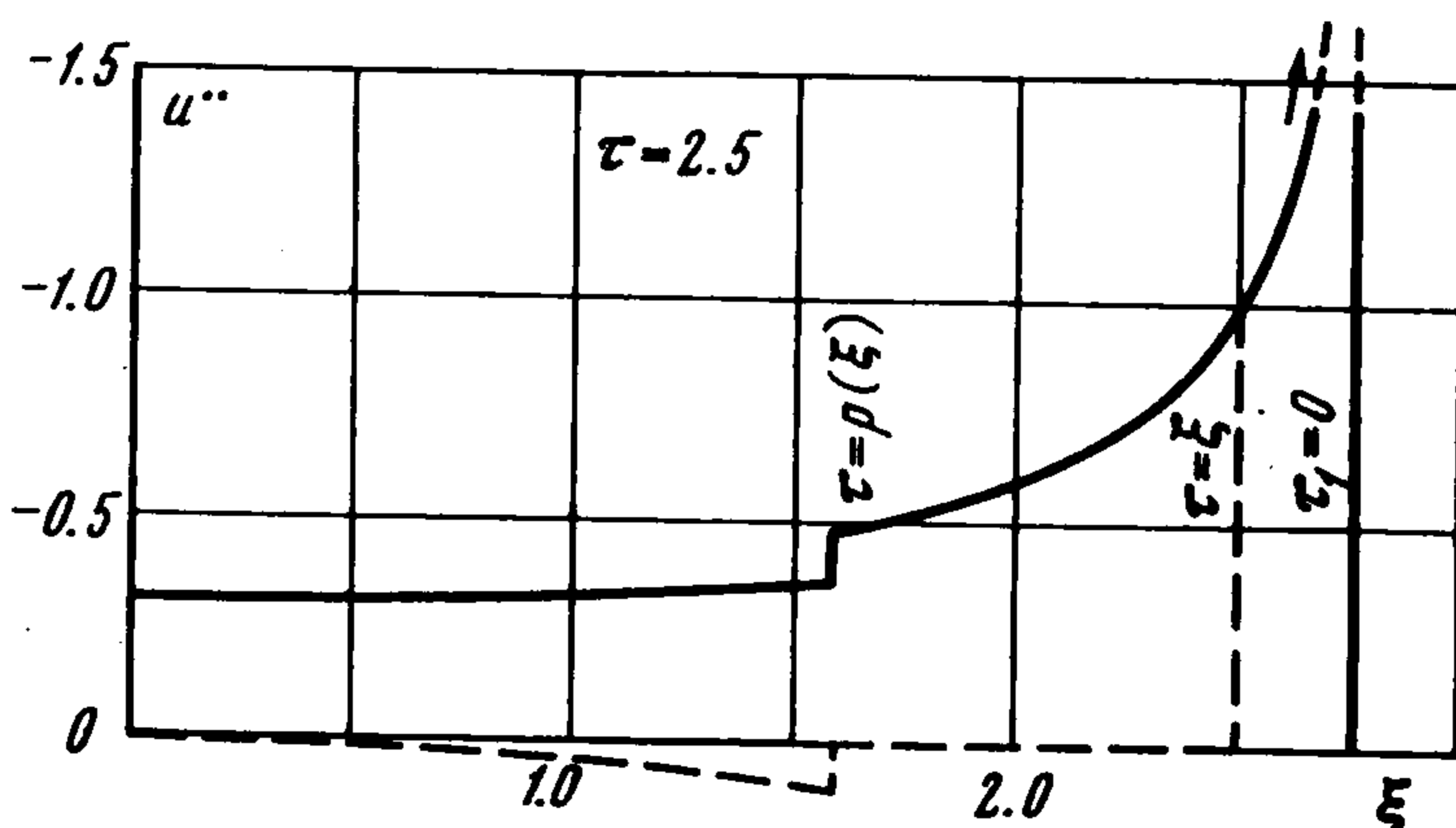
Фиг. 2



Фиг. 3

ны линии равных уровней u , а на фиг. 3 — линии равных уровней u' . На фиг. 4 показано изменение u'' по ξ при $\tau = 2.5$. В области между фронтами $\tau_1 = 0$ и $\tau = \xi$ значения u' и u'' для задач 1 и 2 совпадают.

Комментируем еще u'' на фронтах: на фронте $\tau = \xi$ имеем $u'' = -T$; на фронте



Фиг. 4

$\tau = p(\xi)$ при $0 \leq \xi < 1/2k_0$ амплитуда u'' растет от значения $u''(0) = -1$ до значения $u''(1/2k_0) = -\infty$, а при $\xi > 1/2k_0$ быстро убывает с исходного значения $u''(1/2k_0) = -\infty$; на фронте $\tau_1 = 0$, начинающего с точки $\xi = 1/2k_0$, имеем $u'' = -\infty$.

Используя приближенные формулы (1.31), получим правильные разрывы на фронтах $\tau = \xi$ и $\tau_1 = 0$. Однако на фронте $\tau = p(\xi)$ результаты приближаются к правильным лишь при $|\xi - \xi_1| \gg 1$.

Предлагаемый асимптотический метод может быть обобщен на гиперболическую систему уравнений с постоянными коэффициентами, если корни характеристического уравнения распадаются на пары различного знака. Покажем, что он проходит также в случае уравнений теории оболочек, имеющих достаточно медленно изменяющиеся коэффициенты.

3. Обобщение метода на гиперболическую систему уравнений осесимметричной и плоской деформации оболочек. Рассмотрим на базе теории типа Тимошенко осесимметричные и плоские волновые процессы деформации оболочек постоянной толщины $2h$. Пусть на срединной поверхности оболочки выбрана система координат ξ, η с параметрами Ляме $A = h, B = B(\xi)$. Обозначим через R_1, R_2 радиусы кривизны срединной повер-

хности и введем безразмерное время по формуле $\tau = tc_2/h$, где t — время, c_2 — скорость распространения волн сдвига в теории упругости.

Рассмотрим процессы деформации, зависящие от ξ , τ . Пусть u , w — безразмерные (деленные на h) перемещения соответственно в направлениях координаты ξ и нормали к срединной поверхности, ψ — угол поворота нормали, k_*^2 — коэффициент сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $q_0(\xi, \tau)$ — безразмерное нормальное давление. Введем еще обозначения

$$k^2 = (1 - \nu) / 2, \quad K = k^2 k_*^2 \quad (3.1)$$

$$P = \frac{h}{R_1} + \frac{\nu h}{R_2}, \quad P_1^2 = \frac{h^2}{R_1^2} + \frac{2\nu h^2}{R_1 R_2} + \frac{h^2}{R_2^2} \quad (3.2)$$

Производные по ξ обозначим штрихом, а производные по τ — точкой.

Примем за основу следующий вариант уравнений теории типа Тимошенко¹:

$$\begin{aligned} u'' + \frac{B'}{B} u' + \left[\nu \frac{B''}{B} - \left(\frac{B'}{B} \right)^2 \right] u - k^2 u'' + Pw' &= 0 \quad (3.3) \\ \frac{1}{3} \psi'' + \frac{1}{3} \frac{B'}{B} \psi' + \left[\frac{1}{3} \nu \frac{B''}{B} - \frac{1}{3} \left(\frac{B'}{B} \right)^2 - K \right] \psi - \frac{1}{3} k^2 \psi'' - Kw' &= 0 \\ Pu' - K \left(\psi' + \frac{B'}{B} \psi \right) - Kw'' - K \frac{B'}{B} w' + P_1^2 w + k^2 w'' &= q_0 \end{aligned}$$

В зависимости от подбора координат уравнения (3.3) позволяют описывать осесимметричные или плоские волновые процессы деформации оболочек. В частном случае плиты $R_1 = R_2 = \infty$, $P = 0$ и, следовательно, первое уравнение отдельно определяет u (симметричную деформацию), а система из второго и третьего уравнений определяет ψ и w (деформацию изгиба).

Будем исследовать в области $\xi \geq 0$ разрывы волнового [решения системы (3.3), построенного¹ при следующих дополнительных условиях:

(а) при $\tau = 0$ заданы нулевые начальные условия,

(б) при $\xi = 0$ заданы три однородные краевые условия или условия симметрии, а в бесконечности — условия

$$u(\xi, \tau) \rightarrow 0, \quad \psi(\xi, \tau) \rightarrow 0, \quad w(\xi, \tau) \rightarrow 0, \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

(в) функция $q_0(\xi, \tau)$ представляет собой воздействие типа волны давления, фронт которой задан уравнением (1.2), где $p(\xi)$ удовлетворяет условиям (1.3) с тем отличием, что с ростом ξ потребуем плавное увеличение $p'(\xi)$ со значения $p'(0) < k$ до значения, превышающего величину $1/k_*$.

Выполним с учетом (а) преобразование Лапласа (1.4) системы (3.3), обозначая изображения u , ψ , w , q_0 соответственно через U , Ψ , W , Q_0 . Если теперь ввести новые функции

$$V_1 = U\sqrt{B}, \quad V_2 = \Psi\sqrt{B}, \quad V_3 = W\sqrt{B}, \quad Q = Q_0\sqrt{B} \quad (3.5)$$

¹ В конце пункта пояснено в каком смысле достаточно принимать за исходную упрощенную систему (3.3).

то получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} V_1'' - [3B_1^2 + (1 - 2\nu)B_2] + k^2 s^2 V_1 + P(V_3' - B_1 V_3) &= 0 \quad (3.6) \\ \frac{1}{3} V_2'' - \frac{1}{3} [3B_1^2 + (1 - 2\nu)B_2 + k^2 s^2 + 3K] V_2 - K[V_3' - B_1 V_3] &= 0 \\ P(V_1' - B_1 V_1) - K(V_2' + B_1 V_2) - [K[V_3'' - (-B_1^2 + B_2 + P_1^2 K^{-1} + \\ &+ k^2 s^2 K^{-1}) V_3] = Q \\ B_1 = B' / 2B, \quad B_2 = B'' / 2B \end{aligned} \quad (3.7)$$

Рассмотрим построение асимптотического при $s \rightarrow \infty$ решения системы (3.6), оригинал которого определяет разрывы решения исходной системы (3.3). При этом предполагаем, что в рассматриваемой области оболочки выполняются следующие упрощающие условия:

- 1) $B \neq 0$
- 2) $1 \gg \vartheta^2, \quad \vartheta^2 \gg B_1^2, \quad |B_2|, \quad h^2 / 3R_1^2, \quad h^2 / 3R_2^2$

3) Радиусы кривизны R_1 и R_2 либо постоянные, либо так медленно изменяющиеся функции от ξ , что при построении поправочных элементов к главным членам асимптотического при $s \rightarrow \infty$ решения достаточно рассматривать R_1, R_2 как постоянные. Если введена оценка $\vartheta_0 \gg \xi P' / P, \xi P'' / P^2, P' / P^2$, тогда это условие выполняется при $\vartheta_0 \ll 1$. В случае $\vartheta_0 \sim 1$ поправочные элементы к главным членам асимптотического решения, содержащие P , имеют характер оценки.

Будем искать V_i в форме

$$V_i = V_{i0} + V_{i1} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.8)$$

где V_{i0} — асимптотическое общее решение однородной системы (3.6), а V_{i1} — асимптотическое частное решение неоднородной системы (3.6).

Непосредственной подстановкой в однородную систему (3.6) с учетом указанных предположений легко проверить, что функции V_{i0} могут быть выбраны в форме

$$V_{i0} = \sum_{j=1}^6 A_j C_{ij} e^{\lambda_j \xi} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

Здесь $\lambda_j(s)$ имеют во втором приближении значения

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -ks - \frac{P^2}{2ks}, \quad \lambda_2 = -ks + \frac{3K}{2(K-1)ks}, \quad \lambda_3 = -\frac{s}{k_*} - \frac{3Kk_*}{2(K-1)s} \\ \lambda_4 = -\lambda_1, \quad \lambda_5 = -\lambda_2, \quad \lambda_6 = -\lambda_3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Коэффициенты $A_j(s)$ должны удовлетворять условиям (6), а C_{ij} определяют в первом приближении по формулам

$$\begin{aligned} C_{11} = 1, \quad C_{21} = P, \quad C_{31} = P / ks \\ C_{12} = -P / 3, \quad C_{22} = 1, \quad C_{32} = K / (K - 1) ks \\ C_{13} = -k_* P / (K - 1) s, \quad C_{23} = 3k_* K / (K - 1) s, \quad C_{33} = 1 \\ C_{1,j+3} = C_{1j}, \quad C_{2,j+3} = C_{2j}, \quad C_{3,j+3} = -C_{3j} \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$C_{1,j+3} = C_{1j}, \quad C_{2,j+3} = C_{2j}, \quad C_{3,j+3} = -C_{3j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

В формулах (3.10), (3.12) коэффициенты перед степенями s , имеющие порядок единицы, построены погрешностью порядка ϑ^2 , а коэффициенты имеющие порядок P или P^2 , являются грубо приближенными при переменных B, R_1 и R_2 . Однако последнее обстоятельство не вносит существенной погрешности, ибо в силу наших предположений $P \lesssim \vartheta \ll 1$.

Замечание 3.1. Рассмотрим область $\xi \geq 0$. Для этого понадобятся все члены суммы (3.9). Если же рассматривать возникновение волн в области $\xi \geq 0$ в результате краевого воздействия при $\xi = 0$, то из (3.4) имеем $A_4 = A_5 = A_6 = 0$, и фактически можно учесть лишь первые три члена суммы (3.9), содержащие коэффициенты позволяющие удовлетворить трем крайвым условиям, заданным при $\xi = 0$.

Используя идею метода вариации постоянных, будем искать V_{i1} в форме

$$V_{i1} = \sum_{j=1}^6 D_j C_{ij} J_j \quad (i=1, 2, \{3\}) \quad (3.14)$$

где J_j определяют по формуле (1.7), а $D_j(s)$ — искомые коэффициенты. При дифференцировании V_{i1} будем на основе вышеуказанных предположений рассматривать как постоянные и те элементы λ_j, C_{ij} , которые содержат P , и используем формулы (1.8).

Подставляя V_{i1} в форму (3.14) в (3.6) и выполняя дифференцирование, легко убедиться в том, что во всех трех уравнениях коэффициенты перед J_j обращаются в нули с такой же точностью, как отдельные члены суммы (3.9) удовлетворяют однородной системе (3.6).! Приравниванием нулю коэффициентов перед Q и Q' во всех трех уравнениях получим систему уравнений, которая может быть приведена к виду

$$\sum_{j=1}^6 D_j C_{ij} = 0, \quad \sum_{j=1}^6 D_j \lambda_j C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i=1, 2 \\ -K^{-1} & \text{при } i=3 \end{cases} \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.15)$$

Если пока взять за новые искомые $D_i + D_{i+3}, D_i - D_{i+3}$ ($i = 1, 2, 3$) то легко установить, что!

$$D_4 = D_1, \quad D_5 = D_2, \quad D_6 = D_3 \quad (3.16)$$

и вывести для вычисления D_1, D_2, D_3 уравнения

$$\begin{aligned} C_{i1} D_1 + C_{i2} D_2 + C_{i3} D_3 &= 0 \quad (i=1, \{2\}) \\ C_{31} \lambda_1 D_1 + C_{32} \lambda_2 D_2 + C_{33} \lambda_3 D_3 &= -1 / 2K \end{aligned} \quad (3.17)$$

Используя (3.10), (3.12), легко построить асимптотическое при $s \rightarrow \infty$ решение системы (3.17) в форме

$$D_1 = -\frac{P}{2k^2 s^2}, \quad D_2 = -\frac{3K}{2(K-1)k^2 s^2}, \quad D_3 = \frac{k_*}{2Ks} \quad (3.18)$$

На основе изложенного имеем

$$V_i = \sum_{j=1}^6 C_{ij} [A_j + D_j I_j(\xi)] e^{\lambda_j \xi} \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.19)$$

Здесь $I_j(\xi)$ определяют по (1.7), а $A_j(s)$ — пока произвольные коэффициенты, подлежащие вычислению из условий (б). Используя последние в части (3.4), имеем

$$A_l = -D_l I_l(\infty) \quad (l = 4, 5, 6) \quad (3.20)$$

Это позволяет с учетом (3.11), (3.13) переписать (3.19) в форме

$$V_i = \sum_{j=1}^3 C_{ij} \{ [A_j + D_j I_j(\xi)] e^{\lambda_j \xi} + r_i D_j [I_{j+3}(\xi) - I_{j+3}(\infty)] e^{-\lambda_j \xi} \} \\ (r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = -1) \quad (3.21)$$

где $A_1(s)$, $A_2(s)$, $A_3(s)$ — коэффициенты, определяемые из условий при $\xi = 0$. Рассмотрим их вычисление в двух случаях.

Задача 1. Заданы условия

$$u(0, \tau) = 0, \quad \psi(0, \tau) = 0, \quad w(0, \tau) = 0 \quad (3.22)$$

из которых следуют условия $V_i(0, s) = 0$, позволяющие на основе (3.21) составить систему трех уравнений относительно A_1 , A_2 , A_3 . Асимптотическое при $s \rightarrow \infty$ решение этой системы является следующим:

$$A_1 = D_1 I_4(\infty) - \frac{2Pk_*K}{(K-1)^2 ks^2} D_2 I_5(\infty) + \frac{2Pk_*}{s} D_3 I_6(\infty) \\ A_2 = \frac{6Pk_*K}{(K-1) ks^2} D_1 I_4(\infty) + D_2 I_5(\infty) + \frac{6k_*K}{(K-1)s} D_3 I_6(\infty) \quad (3.23) \\ A_3 = -\frac{2P}{ks} D_1 I_4(\infty) - \frac{2K}{(K-1) ks} D_2 I_5(\infty) - D_3 I_6(\infty)$$

Задача 2. Заданы условия симметрии

$$u(0, \tau) = 0, \quad \psi(0, \tau) = 0, \quad w'(0, \tau) = 0, \quad B'(0) = 0 \quad (3.24)$$

из которых следуют условия $V_1(0, s) = 0$, $V_2(0, s) = 0$, $V_3'(0, s) = 0$, позволяющие на основе (3.21), (1.8) составить систему трех уравнений, которая имеет решение

$$A_j = D_j I_{j+3}(\infty) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.25)$$

Пусть далее $T = 1$ для задачи 1, а $T = 0$ для задачи 2. Тогда на основе вышеизложенного для этих задач могут быть составлены единые развернутые формулы асимптотических при $s \rightarrow \infty$ изображений решения

$$U = P\vartheta_2 \{ -(K-1) [I_4(\infty) - 2TI_6(\infty) + I_1(\xi)] e^{\lambda_1 \xi} + \\ + (K-1) [I_4(\infty) - I_4(\xi)] e^{-\lambda_1 \xi} + K [I_5(\infty) - 2TI_6(\infty) + I_2(\xi)] e^{\lambda_2 \xi} - \\ - K [I_5(\infty) - I_5(\xi)] e^{-\lambda_2 \xi} - [(1-2T)I_6(\infty) + I_3(\xi)] e^{\lambda_3 \xi} + \\ + [I_6(\infty) - I_6(\xi)] e^{-\lambda_3 \xi} \} \\ \Psi = \vartheta_2 \{ -P^2(K-1) [I_4(\infty) + I_1(\xi)] e^{\lambda_1 \xi} + P^2(K-1) [I_4(\infty) - \\ - I_4(\xi)] e^{-\lambda_1 \xi} - 3K [I_5(\infty) - 2TI_6(\infty) + I_2(\xi)] e^{\lambda_2 \xi} + \\ + 3K [I_5(\infty) - I_5(\xi)] e^{-\lambda_2 \xi} + 3K [(1-2T)I_6(\infty) + I_3(\xi)] e^{\lambda_3 \xi} - \\ - 3K [I_6(\infty) - I_6(\xi)] e^{-\lambda_3 \xi} \} \quad (3.26)$$

$$W = \vartheta_1 \{ -P^2 (K - 1)^2 [I_4(\infty) + I_1(\xi)] e^{\lambda_1 \xi} - P^2 (K - 1)^2 [I_4(\infty) - I_4(\xi)] e^{-\lambda_1 \xi} - 3K^2 [I_5(\infty) + I_2(\xi)] e^{\lambda_2 \xi} - 3K^2 [I_5(\infty) - I_5(\xi)] e^{-\lambda_2 \xi} + T [2P^2 (K - 1)^2 I_4(\infty) + 6K^2 I_5(\infty) e^{\lambda_3 \xi}] \} + \theta \{ [(1 - 2T) I_6(\infty) + I_3(\xi)] e^{\lambda_3 \xi} + [I_6(\infty) - I_6(\xi)] e^{-\lambda_3 \xi} \}$$

$$\vartheta_1^{-1} = 2(K - 1)^2 \sqrt{B} k^3 s^3, \quad \vartheta_2^{-1} = 2(K - 1) \sqrt{B} k^2 s^2, \quad \theta = k_* / 2K \sqrt{B} s$$

Формулы (3.26) для задачи 2 получены на основе (3.5), (3.12), (3.18), (3.21), (3.25) без каких-либо упрощений, а для задачи 1 — на основе (3.5), (3.10), (3.12), (3.18), (3.21), (3.23) с сохранением у каждого $I_j(\xi)$ и $I_j(\infty)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) лишь множителя, содержащего s в наивысшей степени, и с допущением погрешности коэффициентов порядка P^2 . Легко проверить, что изображения (3.26) точно удовлетворяют краевым условиям и условиям (3.4). Однако уравнениям (3.6) они удовлетворяют в асимптотическом $s \rightarrow \infty$ смысле с погрешностью коэффициентов порядка ϑ^2 .

Обращение изображений (3.26) может быть выполнено с различной точностью. Однако в данной работе ограничимся применением метода, предложенного в п. 1.

Введем обозначения

$$s_1 = ks, \quad s_3 = s / k_* \quad (3.27)$$

Тогда при применении (3.10) в первом приближении

$$\lambda_{1,2} = \lambda_1^{(1)} = -s_1, \quad \lambda_{4,5} = \lambda_2^{(1)} = s_1, \quad \lambda_3 = \lambda_1^{(3)} = -s_3, \quad \lambda_6 = \lambda_2^{(3)} = s_3$$

С точностью (3.28)

$$I_{1,2} = I_1^{(1)}, \quad I_{4,5} = I_2^{(1)}, \quad I_3 = I_1^{(3)}, \quad I_6 = I_2^{(3)} \quad (3.29)$$

где $I_j^{(l)}(\xi)$ ($j = 1, 2; l = 1, 3$) определяют по формуле (1.7) для $I_j(\xi)$ ($j = 1, 2$), подбирая вместо λ_j соответственно $\lambda_j^{(l)}$ ($l = 1, 3$).

Используя (3.27), (3.29) и допуская в коэффициентах погрешность порядка P^2 , получим из (3.26) следующие упрощенные формулы:

$$U = U^{(1)} + U^{(3)}, \quad \Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(3)}, \quad W = W^{(1)} + W^{(3)} \quad (3.30)$$

$$U^{(l)} = \frac{P}{2(K-1)\sqrt{B}} s_1^{-2} F_l, \quad \Psi^{(l)} = -\frac{3K}{2(K-1)\sqrt{B}} s_1^{-2} F_l \quad (l = 1, 3) \quad (3.31)$$

$$F_1 = [I_1^{(1)}(\xi) + I_2^{(1)}(\infty) - 2T I_2^{(3)}(\infty)] e^{-s_1 \xi} + [I_2^{(1)}(\xi) - I_2^{(1)}(\infty)] e^{s_1 \xi}$$

$$F_3 = -[I_1^{(3)}(\xi) + (1 - 2T) I_2^{(3)}(\infty)] e^{-s_3 \xi} - [I_2^{(3)}(\xi) - I_2^{(3)}(\infty)] e^{s_3 \xi} \quad (3.32)$$

$$W^{(1)} = -\frac{3K^2}{2(K-1)^2 \sqrt{B}} s_1^{-3} \{ [I_1^{(1)}(\xi) + I_2^{(1)}(\infty)] e^{-s_1 \xi} - [I_2^{(1)}(\xi) - I_2^{(1)}(\infty)] e^{s_1 \xi} - 2T I_2^{(1)}(\infty) e^{-s_3 \xi} \}$$

$$W^{(3)} = \frac{1}{2K \sqrt{B}} s_3^{-1} \{ [I_1^{(3)}(\xi) + (1 - 2T) I_2^{(3)}(\infty)] e^{-s_3 \xi} - [I_2^{(3)}(\xi) - I_2^{(3)}(\infty)] e^{s_3 \xi} \} \quad (3.33)$$

Как и в п. 1 предполагаем, что Q имеет структуру (1.13). Если теперь ввести обозначения

$$p_1(\xi) = p(\xi) / k, \quad p_3(\xi) = p(\xi) k_* \quad (3.34)$$

то для вычисления $I_j^{(l)}(\xi)$ ($j = 1, 2$; $l = 1, 3$), входящих в (3.32), (3.33), могут быть использованы формулы (1.15) — (1.26), заменяя в них величины

$$I_j, \varphi_j, \lambda_j, \xi_j, s, p, b, M, N, G(\xi_j)$$

соответственно величинами

$$I_j^{(l)}, \varphi_j^{(l)}, \lambda_j^{(l)}, \xi_j^{(l)}, s_l, p_l, b^{(l)}, M^{(l)}, N^{(l)}, G(\xi_j^{(l)})$$

По существу при двух различных значениях индекса l теперь найдут применение различные пары ($j = 1, 2$) седловых точек $\xi = \xi_j^{(l)}$.

Итак, представляя $I_j^{(l)}$ ($j = 1, 2$; $l = 1, 3$) в (3.32), (3.33) в виде формул типа (1.25), получим из (3.30) для U, Ψ, W выражения, которые при конкретном заданном $n = 2, 3, 4, \dots$ могут быть обращены применением (1.28) — (1.30). При этом следует иметь в виду следующие обстоятельства. Во-первых, в соответствии с (3.5), в (1.13) $Q = Q_0 \sqrt{B}$. Во-вторых, когда в левой части (1.28) — (1.30) s заменен на s_l , то в правой части этих формул следует заменить τ на $\tau^{(l)}$, причем

$$\tau^{(1)} = \tau / k, \quad \tau^{(3)} = \tau k.$$

и внести соответственно множители $1/k$ и k_* . \square

Замечание 3.2. В формулах (3.30) для $U^{(l)}, \Psi^{(l)}$ ($l = 1, 3$) имеется множитель s_1^{-2} , формулы $W^{(1)}, W^{(3)}$ (3.33) соответственно содержат множители s_1^{-3} и s_3^{-1} . Следовательно, независимо от конкретного характера волны давления наиболее существенным является разрыв, соответствующий $W^{(3)}$. Назовем этот разрыв условно Разрывом первого порядка. Тогда $U^{(l)}, \Psi^{(l)}$ ($l = 1, 3$) определяют разрывы второго порядка, а $W^{(1)}$ — третьего порядка. При этом $U^{(1)}, \Psi^{(1)}, W^{(1)}$ определяют разрывы u, ψ, w на фронтах, распространяющихся с безразмерной скоростью $1/k$, а $U^{(3)}, \Psi^{(3)}, W^{(3)}$ — на фронтах, распространяющихся с безразмерной скоростью k_* . Разрывы на фронте $\tau = p(\xi)$ определяются суммарным вкладом $U^{(l)}, \Psi^{(l)}, W^{(l)}$ ($l = 1, 3$), причем вклад слагаемых $l = 1$ будет доминирующим в окрестности точки $\xi = \xi_1^{(1)}$, а вклад слагаемых $l = 3$ — в окрестности точки $\xi = \xi_1^{(3)}$.

Для краткости изложения выше была принята за исходную упрощенная система уравнений (3.3).

Допустим теперь, что из стандартных уравнений равновесия в усилиях, моментах и поперечных силах следующим путем выведена более точная система уравнений движения теории типа Тимошенко: а) усилия и моменты выражены в перемещениях при помощи постоянных соотношений упругости Навье-Балабуха. б) поперечная сила подставлена в форме $2hEK(1 - \nu^2)^{-1}(\psi - u h/R_1 + w')$ в), инерционные члены введены без учета измерения метрики в толщине оболочки.

Оказывается, что асимптотическое при $s \rightarrow \infty$ решение соответствующей преобразованной по Лапласу системы уравнений совпадает с (3.26) в части элемента W , имеющего множитель s^{-1} и наиболее существенным образом отличается от (3.26) лишь поправками порядка $h/R_1, h/R_2$ (по сравнению с единицей) к коэффициентам элементов (3.26), имеющих множители порядка s^{-2} .

4. Упрощенный способ построения асимптотического решения преобразованных уравнений оболочек. Система уравнений (3.6) располагает специфическими свойствами, позволяющими построить ее асимптотическое при $s \rightarrow \infty$ решение (3.30) — (3.33) более простым способом, чем общим методом, описанным в предыдущем пункте.

Используя обозначения (3.27), введем в рассмотрение упрощенную систему (3.6) вида

$$L_1 V_1 = -P V_3', \quad L_1 V_2 = 3K V_3', \quad K^{-1} P V_1' - V_2' - L_3 V_3 = -Q^* \quad (4.1)$$

$$L_l = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - s_l^2 \quad (l = 1, 3), \quad Q^* = -\frac{Q}{K} \quad (4.2)$$

На базе (4.1) асимптотическое при $s \rightarrow \infty$ решение (3.30) — (3.33) исходной системы (3.6) может быть построено для задач 1 и 2 по следующим этапам.

1) Интегрируя уравнение

$$L_3 V_3 = Q^* \quad (4.3)$$

по существу не отличающееся от уравнения (1.1), с учетом условия $V_3(0, s) = 0$ в случае задачи 1 или условия $V_3'(0, s) = 0$ в случае задачи 2 получим в качестве решения $W^{(3)} \sqrt{B}$.

2) Построением решений двух первых уравнений системы (4.1) используя их теперь уже известные правые части с учетом краевых условий $V_1(0, s) = 0, V_2(0, s) = 0$ и условий в бесконечности получим $U \sqrt{B}$, и $\Psi \sqrt{B}$.

3) Построением частного решения уравнения

$$L_3 V_3 = K^{-1} P V_1' - V_2' \quad (4.4)$$

при помощи теперь уже известных V_1 и V_2 можно с погрешностью порядка P^2 получить формулу для $W^{(1)} \sqrt{B}$.

Указанный способ сохраняет силу для широкого класса других краевых условий. Он будет эффективным также при исследовании разрывов с учетом влияния окружающей среды, ибо совместно с уравнением среды следует интегрировать лишь уравнение (4.3), дополненное членом, учитывающим влияние среды.

Поступила 28 I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. А л у м я э Н. А. Разрывы в ускорениях упругой сферической оболочки, создаваемых плоской волной давления. Тр. VI Всес. конференц. по теории оболочек и пластинок. Баку — Москва, «Наука», 1966.
2. Н и г у л У. К. О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты. Изв. АН ЭстССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1965, т. 14, № 3.
3. В е к с л е р Н. Д., М я н н и л ь А. И., Н и г у л У. К. Применение метода сеток в теории типа Тимошенко для исследования переходных волновых процессов деформации плит конечных размеров. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 12.
4. В е к с л е р Н. Д., Н и г у л У. К. К теории волновых процессов при осесимметричной деформации сферической оболочки. Инж. ж. МТТ, 1966, № 1.
5. Н и г у л У. К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек. Тр. VI Всес. конференц. по теории оболочек и пластинок. Баку — Москва, «Наука», 1966.
6. Д и т к и н В. А., П р у д н и к о в А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
7. В а к м а н Д. Е. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М., «Сов. радио», 1962.