Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

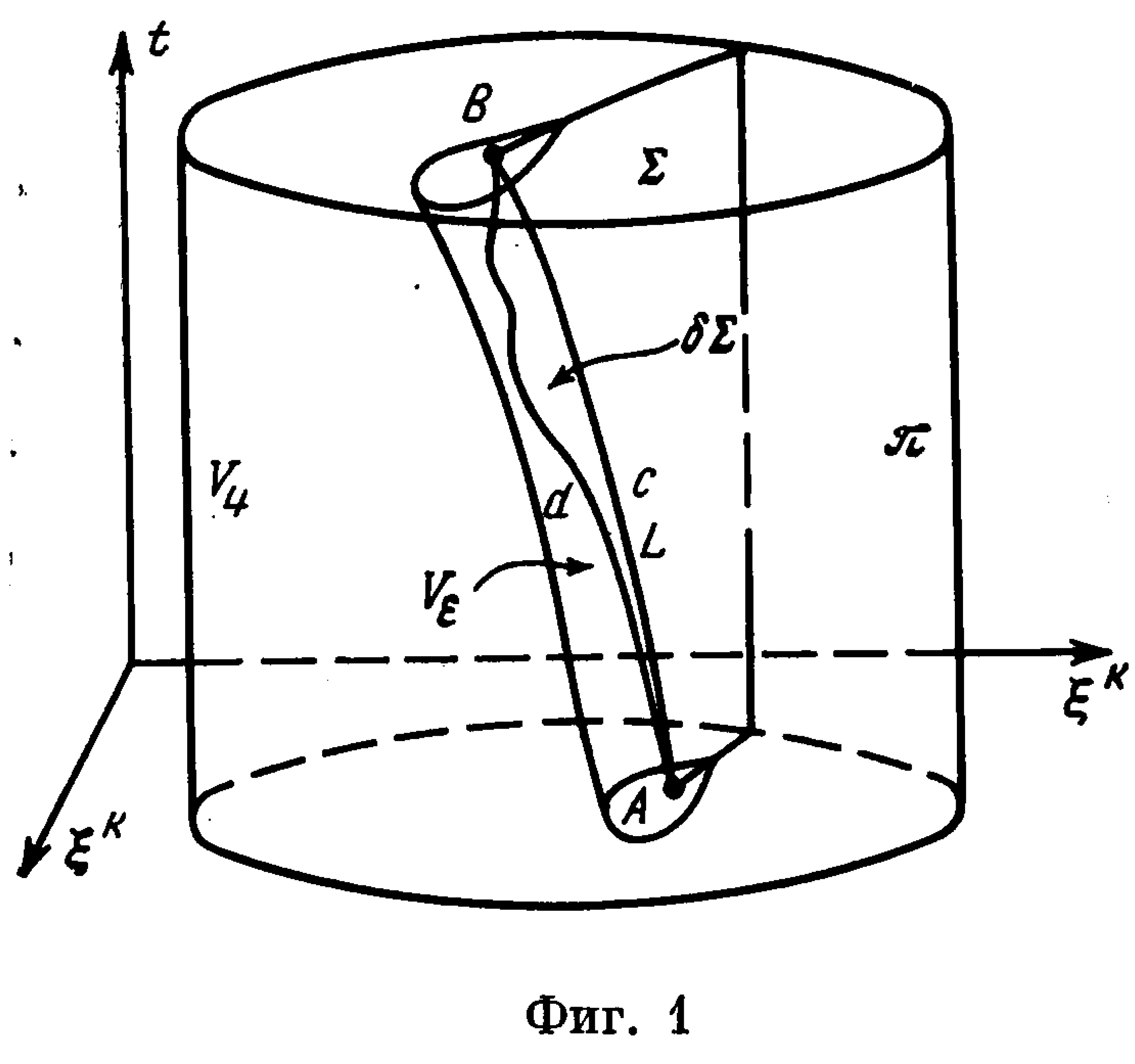
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

М. В. Лурье

(Москва)

Использование вариационных принципов в качестве исходного базиса для построения моделей различных сплошных сред подробно рассматривалось в работах [1-5]. В предлагаемой статье, являющейся продолжением работы [6], обобщенное вариационное соотношение распространяется на случай сред, которые имеют поверхности разрыва типа трещин. Для среды, энергия и напряжения которой зависят от градиента тензора деформации, рассмотрен вопрос о характере сингулярного решения плоской задачи вблизи контура распространяющейся трещины.

1. Рассмотрим произвольно выделенный объем сплошной среды $V(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$, отнесенный к лагранжевым координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3 и времени t и содержащий часть поверхности разрыва Σ (фиг. 1).



Фиг. 1

Искомой связью в системе наблюдателя [1], определяющей движение среды будет закон движения, представляемый функциями

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = \xi^i + u^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$$
$$x^4 = t \qquad (i = 1, 2, 3)$$

В ньютоновской механике считается, что имеет место равенство $x^4 = t$, и абсолютное время рассматривается как скалярная величина.

В первой части работы рассматривались поверхности разрыва, которые могли свободно перемещаться по частицам среды. Величина δl_n, определяющая нормальное смещение поверхности, отличалась от нуля. Рассмотрим теперь случай, когда $\delta l_n = 0$, а все варьирование поверхности разрыва $\delta\Sigma$ происходит за счет ее «внедрения» в среду вдоль гипер-

[1] Рассуждения работы проводятся в рамках теории конечных деформаций; поэтому помимо системы наблюдателя необходимо иметь в виду еще две системы: актуальную, определяющую метрику текущего момента $g_{ik}(\xi^\alpha, t)$, и начальную, с метрическим тензором $g_{ik}{}^\circ(\xi^\alpha) = g_{ik}(\xi^\alpha, t_0)$. Последнюю систему так же, как и систему наблюдателя, можно считать декартовой, если положить $g_{ik}{}^\circ = \delta_{ik}$.

дуги A_cB. Наклон последней характеризует скорость такого внедрения, т. е. скорость продвижения контура двумерной поверхности разрыва по частицам среды в пространстве начальных состояний. Для определенности будем считать, что на поверхности Σ терпит разрыв вектор перемещения частиц среды. Ясно, что в рассматриваемом пространстве Σ будет цилиндрической по времени поверхностью.

В качестве основы для получения условий на поверхности Σ используем вариационное соотношение вида [1]

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda \sqrt{g}\, d\tau_4 + \delta W + \delta W^* = 0 \tag{1.1}$$

Здесь Λ — функция Лагранжа, зависящая допускаемым соображениями инвариантности образом от скорости частиц v^ω, начальной плотности ρ_0, энтропии S, метрических тензоров g_{ik}°, g_{ik}, а также градиентов $\nabla_k^\circ g_{ij}$ ($g = \det\| g_{ik}\|$). Задаваемый функционал δW^* содержит члены, учитывающие изменения энтропии, массовые силы K_ω, а также энергию, необходимую для образования нового элемента площади поверхности разрыва

$$\delta W^* = \int\limits_{V_4} (\rho T \delta S + \rho K_\omega \delta u^\omega + \rho K_\omega v^\omega \delta x^4)\, d\tau_4 + \int\limits_{A_cB} 2\gamma \delta \Sigma_3 \tag{1.2}$$

Функционал δW представляется интегралом по границе π четырехмерного объема V_4 от линейной комбинации определяющих параметров и подлежит определению по известным Λ и δW^*[1].

Для подсчета вариации действия в формуле (1.1) учтем, что варьированию подлежат не только характеристики среды, но и сама поверхность разрыва Σ вдоль A_cB. Пусть в качестве поверхности сравнения, варьированного положения поверхности разрыва, берется поверхность $\Sigma + \delta\Sigma$ (фиг. 1). Вариация действия определяется как главная линейная часть разности интегралов, вычисленных по области $V_4'' = V_4 - (\Sigma + \delta\Sigma)$ и области $V_4' = V_4 - \Sigma$

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda \sqrt{g}\, d\tau_4 = \int\limits_{V_4''} (\Lambda \sqrt{g})\, d\tau_4 - \int\limits_{V_4'} \Lambda \sqrt{g}\, d\tau_4 \tag{1.3}$$

Для вычисления этой разности удобно первый интеграл заменой переменного

$$t' = t + \delta t\,(\xi^\alpha, t), \qquad \delta t\,|_\pi = 0$$

переводящей $A_c\,B$ в A_dB свести к интегрированию по прежней области $V_4 - \Sigma$. Учитывая, что якобиан преобразования с точностью до малых высшего порядка равен $1 + \partial\delta t\,/\,\partial t$, получим

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda \sqrt{g}\, d\tau_4 = \int\limits_{V_4'} \delta(\Lambda \sqrt{g})\, d\tau_4 + \int\limits_{V_4'} \Lambda \sqrt{g} \cdot \frac{\partial \delta t}{\partial t}\, d\tau_4 \tag{1.4}$$

Вычисление всех вариаций в первом члене формулы (1.4) производится так же, как это делалось в работе [6]. При этом учитывается, что полная вариация δ_1 всех величин вычисляется по формуле

$$\delta_1 A = (\delta A + A^{\cdot}\delta t) + A^{\cdot}\delta x^4 \tag{1.5}$$

Под вариацией интеграла в левой части формулы (1.4) понимается вариация δ_1. Вариацию δx^4 в ньютоновской механике считаем произвольной постоянной.

Допуская в дальнейшем, что варьируемая функция $\Lambda\sqrt{g}$ в точках контура A_cB может иметь интегрируемые особенности, вычислим интегралы в формуле (1.4) по области $V_4 - V_\varepsilon - \Sigma$, где V_ε — область, представляющая собой узкую ε-трубку, огибающую контур A_cB, и плавно смыкающийся с поверхностью Σ. Произведя варьирование, получим в объемном интеграле вариационные уравнения Лагранжа, уравнения движения при вариациях δu^ω, уравнение энергии при вариации δx^4, термодинамическое соотношение при вариации δS. Получим и будем считать выполненными граничные условия на основной части поверхности Σ в данном случае они сведутся к отсутствию силовых и моментных напряжений на Σ). Считая далее все вариации на поверхности π равными нулю, после обычных преобразований получаем [1]

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\Sigma_\varepsilon}\left(J_\omega n_t - \sqrt{g}\,\frac{\partial \xi^k}{\partial x^\omega}\,p_k{}^j n_j{}^\circ\right)\delta u^\omega d\sigma_3 + \right.$$

$$\left. + \int_{\Sigma_\varepsilon}(\Lambda\sqrt{g}\,n_t\delta t + Q^{kij}n_k{}^\circ\delta g_{ij})\,d\sigma_3 + \int_{A_cB} 2\gamma n_t\delta t\, d\lambda_2 = 0 \right. \tag{1.6}$$

Здесь Σ_ε — поверхность четырехмерного объема V_ε; $d\sigma_3$ — элемент площади этой поверхности; $d\lambda_2$ — элемент гипердуги A_cB; n_t, $n_j{}^\circ$ — компоненты вектора нормали к поверхности Σ_ε и контуру A_cB в касательном к нему пространстве, а величины J_ω, $p_k{}^j$, Q^{kij} определяются формулами [6]

$$J_\omega = \frac{\partial\Lambda\sqrt{g}}{\partial v^\omega}, \qquad Q^{kij} = \frac{\partial\Lambda\sqrt{g}}{\partial\nabla_k{}^\circ g_{ij}}$$

$$p^{ij} = -\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Lambda\sqrt{g}}{\partial g_{ij}} + 2\sqrt{\frac{g_0}{g}}\nabla_k{}^\circ\frac{1}{\sqrt{g_0}}\frac{\partial\Lambda\sqrt{g}}{\nabla_k{}^\circ g_{ij}} \tag{1.7}$$

В формуле (1.6) можно перейти от интегрирования по пространственно-временной поверхности Σ_ε и пространственно-временной дуге A_cB к интегрированию по их пространственным частям Σ_ε $(d\sigma_2)$ и L $(d\lambda_1)$, получающимся из Σ_ε и A_cB сечением $t = \mathrm{const}$ и времени t согласно формулам

$$|\overset{\circ}{n_j}|\,d\sigma_3 = d\sigma_2 dt, \qquad |\overset{\circ}{n_j}|\,d\lambda_2 = d\lambda_1 dt$$

---

[1] В работе [6] при преобразовании поверхностного интеграла допущены неточности. На это обратил внимание автора В. А. Желнорович. Поэтому нижеследующие преобразования выполнены независимо от [6].

Введем обозначения $N = -n_t / |\overset{\circ}{n}_j|$, $n_j = \overset{\circ}{n}_j / |\overset{\bullet}{n}_j|$. Тогда, опуская интегрирование по времени, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\Big(J_\omega N + \sqrt{g}\,\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}\,p_k{}^j n_j\Big)\delta u^\omega\,d\sigma_2 +$$

$$+\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}(\Lambda\sqrt{g}N\delta t - Q^{kij}n_k\delta g_{ij})\,d\sigma_2 + \int\limits_L 2\gamma N\delta t\,d\lambda_1\Big] = 0 \tag{1.8}$$

Для дальнейших преобразований нужно выделить из определенных на поверхности вариаций $\delta g_{ij} = \nabla\,\hat{}_j\delta u_i\hat{} + \nabla_j\hat{}\,\delta u_i\hat{}$ независимые части: вариации от перемещений и производные по нормали от этих вариаций. Использование соотношений

$$(1)\quad Q^{kij}\delta g_{ij} = 2Q^{kij}\nabla_i\hat{}\left(g_{js}\frac{\partial\xi^s}{\partial x^\omega}\delta u^\omega\right) =$$

$$= 2Q_s^{ki}\left[\frac{\partial\xi^p}{\partial x^\omega}\,\Gamma_{ip}^s - \frac{\partial\xi^s}{\partial x^p}\,\frac{\partial}{\partial x^\omega}\left(\frac{\partial x^p}{\partial\xi^i}\right)\right]\delta u^\omega + 2Q_s^{ki}\,\frac{\partial\xi^s}{\partial x^\omega}\,\frac{\partial\delta u^\omega}{\partial\xi^i}$$

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial\xi^i} = (\delta_i{}^\alpha - n_i n^\alpha)\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha} + n_i n^\alpha\,\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha} = D_i + n_i\,\frac{\partial}{\partial n}$$

позволяет преобразовать (1.8) к виду

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\Big(J_\omega N + \sqrt{g}\,\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}\,p_k{}^j n_j + 2\Omega_{i\omega}^s Q_s^{ki} n_k\Big)\delta_1 u^\omega\,d\sigma_2 -$$

$$-2\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial\xi^s}{\partial x^\omega}\,Q_s^{ki}n_i n_k\delta_1\frac{\partial u^\omega}{\partial n}\,d\sigma_2 +$$

$$+\int\limits_{\Sigma_\varepsilon}\Big[(\Lambda\sqrt{g} - J_\omega v^\omega)N - \Big(\sqrt{g}\,\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}\,p_k{}^j n_j + 2\Omega_{i\omega}^s Q_s^{ki} n_k\Big)v^\omega +$$

$$+2\,\frac{\partial\xi^s}{\partial x^\omega}\,Q_s^{ki}n_i n_k\,\frac{\partial v^\omega}{\partial n}\Big]\delta t\,d\sigma_2\Big\} + \int\limits_L 2\gamma N\delta t\,d\lambda_1 = 0 \tag{1.9}$$

$$\Omega_{i\omega}^s = (n_i D_\alpha n^\alpha - D_i)\frac{\partial\xi^s}{\partial x^\omega} + \frac{\partial\xi^p}{\partial x^\omega}\,\Gamma_{ip}^s - \frac{\partial\xi^s}{\partial x^p}\,\frac{\partial}{\partial x^\omega}\left(\frac{\partial x^p}{\partial\xi^i}\right)$$

Если учесть произвольность вариаций, входящих в формулу (1.9), то получим искомые соотношения, которые выполняются на кромке трещины. Эти соотношения удобно записать, если ввести сечение, перпендикулярное контуру трещины L, линию пересечения Γ_ε этого сечения с поверхностью Σ_ε, а саму поверхность Σ_ε считать образованной из линий, параллельных контуру L и проведенных через Γ_ε, как направляющую. Тогда получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\Big(J_\omega N + \sqrt{g}\,\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}\,p_k{}^j n_j + 2\Omega_{i\omega}^s Q_s^{ki} n_k\Big)d\lambda_1 = 0 \tag{1.10}$$

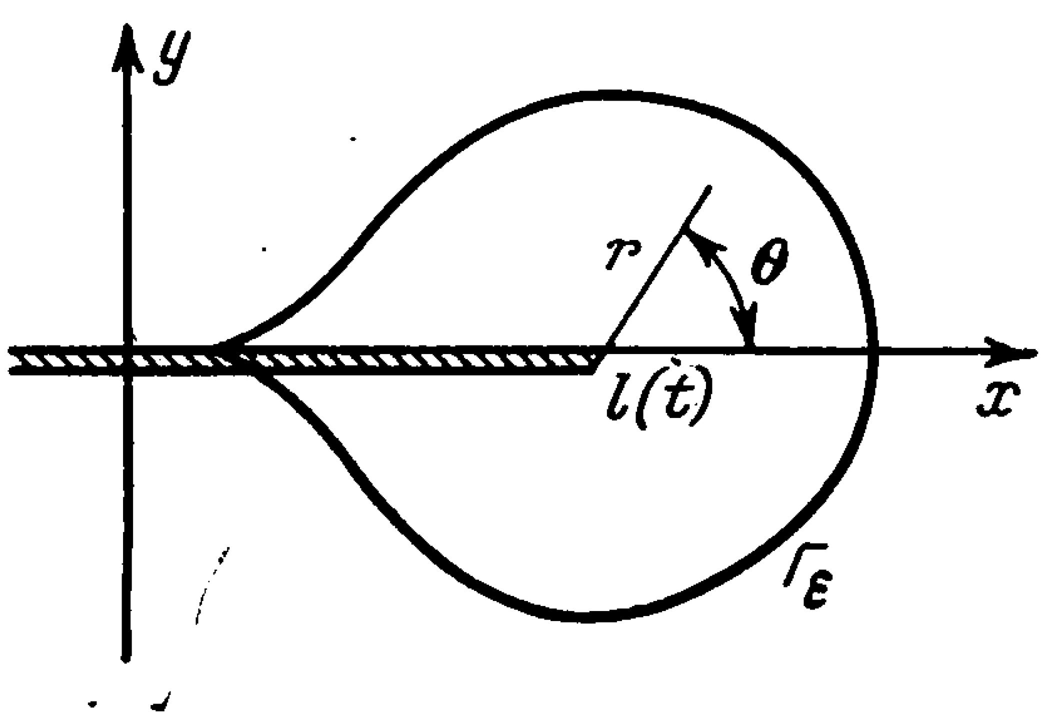
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial\xi^s}{\partial x^\omega}\,Q_s^{ki}n_i n_k\,d\lambda_1 = 0 \tag{1.11}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left[(J_\omega v^\omega - \Lambda\sqrt{g})N + \left(\sqrt{g}\,\frac{\partial\xi^k}{\partial x^\omega}p_k{}^j n_j + 2\Omega^s_{i\omega}Q_s^{ki}n_k\right)v^\omega - \right.$$

$$\left. - 2\frac{\partial\xi^s}{\partial x^\omega}\,Q_s^{ki}n_i n_k\frac{\partial v^\omega}{\partial n}\right]d\lambda_1 = 2\gamma N \qquad (1.12)$$

Здесь $d\lambda_1$ — элемент контура Γ_ε. Очевидно, N — скорость движения контура L в пространстве начальных состояний, а в контурном интеграле — проекция этой скорости на направление нормали к Σ_ε.

Соотношения (1.10), (1.11) отражают тот факт, что на контуре поверхности разрыва отсутствуют внешние сосредоточенные воздействия, которые могли бы быть учтены при помощи члена δW^*. Соотношение (1.12) будет независимым дополнительным условием, представляющим собой баланс энергии на кромке поверхности Σ_3. В случае малых деформаций, т. е.



Фиг. 2

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ij}{}^\circ) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\xi^j} + \frac{\partial u_j}{\partial\xi^i}\right)$$

когда для функции Лагранжа принято выражение $L = {}^1/_2\rho\, v^2 - \rho\, U(\varepsilon_{ij})$, где U — энергия единицы массы, соотношение (1.12) сильно упрощается и совпадает с аналогичным равенством (1.1) работы [7].

2. Рассмотрим задачу о распространении поверхности разрыва нормальных смещений (трещины) в среде, энергия и напряжения в которой зависят от деформаций и градиентов деформации. Система определяющих уравнений для такой среды получается из вариационных соотношений (1.1), где в качестве функции Лагранжа взято выражение $L = {}^1/_2\rho\, v^2 - \rho\, U(\varepsilon_{ij}, \nabla_k\varepsilon_{ij})$, а U есть положительно определенная квадратичная форма своих аргументов

$$U = \frac{\lambda}{2}\varepsilon_{ii}{}^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + k_1\varepsilon_{ij,\,k}\varepsilon_{ij,\,k} + k_2\varepsilon_{ij,\,k}\varepsilon_{ik,\,j} +$$

$$+ k_3\varepsilon_{ij,\,i}\varepsilon_{kj,\,k} + k_4\varepsilon_{ij,\,i}\varepsilon_{kk,\,j} + k_5\varepsilon_{ii,\,j}\varepsilon_{kk,\,j} \qquad (2.1)$$

Здесь λ, μ, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 — упругие постоянные. В частности, напряжения в такой среде определяются формулами

$$\frac{1}{\rho_0}p_{ij} = \frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}} - \frac{\partial Q_{kij}}{\partial x_k}, \qquad Q_{kij} = \frac{\partial U}{\partial\nabla_k\varepsilon_{ij}} \qquad (2.2)$$

Полагая, что сплошная среда в малой окрестности каждой точки контура трещины находится в условиях плоской деформации, направим ось Z вдоль поверхности трещины, оси X и Y по направлению распространения и перпендикулярному ему направлению соответственно (фиг. 2). Функция $l(t)$ определяет закон движения кромки трещины. Приведем основные соотношения задачи [8]:

уравнения движения

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x^i} + \mu \nabla^2 u_i - \nabla^2 \left(A \frac{\partial \Delta}{\partial x^i} + B \nabla^2 u_i \right) \qquad (i = 1, 2) \quad (2.3)$$

выражение напряжений через перемещения

$$\begin{gathered} \frac{1}{\rho_0} p_{\alpha\alpha} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - \left[2\tau_1 \nabla^2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + \tau_2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_\alpha{}^2} + \tau_3 \nabla^2 \Delta \right] \\ \frac{1}{\rho_0} p_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left[\tau_1 \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x \partial y} \right] \\ \Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{gathered} \qquad (2.4)$$

Здесь λ, μ, τ_1, τ_2, τ_3, A, B — упругие постоянные (последние пять линейно выражаются через k_1, k_2, k_3, k_4, k_5).

Обозначая через u_r и u_θ полярные составляющие вектора перемещений, будем искать сингулярное решение задачи вблизи контура трещины в следующем виде [9]:

$$\begin{aligned} u_r &= u_{r0}(t) + r^m \alpha(\theta, t) + o(r^m) \\ u_\theta &= u_{\theta 0}(t) + r^m \beta(\theta, t) + o(r^m) \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Здесь $\alpha(\theta, t)$ и $\beta(\theta, t)$ неизвестные функции, $m > 0$ — неопределенная постоянная, $r = [(x - l)^2 + y^2]^{1/2}$ — расстояние до кромки трещины, θ — полярный угол.

Необходимое значение показателя степени m, определяющего характер сингулярности, можно найти, так же как и в ряде других случаев [7], не решая краевой задачи для системы (2.3). Условие (1.12) дает

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \rho_0 U \right) l^{\cdot} n_1 - \left[p_{i\omega} n_i + 2\Omega_{i\omega s} \left(\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \nabla_k e_{is}} n_k \right) \right] v_\omega + \right.$$

$$\left. + 2\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \nabla_k e_{i\omega}} n_i n_k \frac{\partial v_\omega}{\partial n} \right\} d\lambda_1 = 2\gamma l^{\cdot} \qquad (2.6)$$

Здесь $v_\omega = \partial u_\omega / \partial t$ — скорость частиц, Γ_ε — произвольный контур, огибающий конец трещины $l(t)$, $n_1 = \cos(nx)$, $n_2 = \cos(ny)$, $l^{\cdot}$ — скорость распространения трещины. Все функции в формуле (2.6) берутся непосредственно из сингулярного решения. Эта формула показывает, что подынтегральная функция при $r \to 0$ должна иметь особенность типа r^{-1}. Если учесть, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{l=\text{const}} - \frac{\partial u}{\partial x} l^{\cdot}$$

то нетрудно заметить, что наибольший порядок членов в подынтегральном выражении равен $2m - 4$. Таким образом, необходимое условие баланса энергии $2m - 4 = -1$ дает значение $m = 3/2$.

После несложных преобразований можно убедиться, что решение (2.5) с точностью до малых высшего порядка удовлетворяет также соответствующей краевой задаче для уравнений (2.3). Считая u_r — четной, а u_θ — нечетной функциями θ и подставляя их в уравнение (2.3), найдем для $\alpha(\theta, t)$ и $\beta(\theta, t)$ следующие выражения:

$$\alpha(\theta, t) = c_1 \cos (m + 1) \theta + c_2 \cos (m - 1) \theta + c_3 \cos (m - 3)\theta$$
$$\beta(\theta, t) = -c_1 \sin (m + 1) \theta + c_4 \sin (m - 1) \theta + \sigma c_3 \sin (m - 3) \theta \quad (2.7)$$

Здесь $c_i(t)$ — произвольные функции времени, σ — известная постоянная.

Если поверхность трещины считать свободной от нагрузок, то для четырех функций времени $c_i(t)$ система граничных условий дает четыре однородных уравнения [2]

$$\begin{gathered}
p_{xy} - 2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{xx,y}}\right) = 0, \quad \theta = \pi \\
p_{yy} - 2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{xy,y}}\right) = 0, \quad \theta = \pi \\
\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{xy,y}} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{yy,y}} = 0, \quad \theta = \pi
\end{gathered} \quad (2.8)$$

При отсутствии зависимости функции U от градиентов деформации эти условия, естественно, совпадают с обычными. Подстановка функций (2.7) в (2.8) и непосредственное вычисление получившегося определителя для системы четырех уравнений относительно c_i показывает, что при $m = {}^3/_2$ определитель обращается в нуль (благодаря виду функций (2.7) при $m = {}^3/_2$ и $\theta = \pi$ обращаются в нуль две строки определителя) и, таким образом, находится нетривиальное решение задачи (2.3) — (2.8). При помощи функций (2.7) можно исследовать асимптотическое распределение напряжений вблизи контура трещины.

В заключение отметим, что включение в число определяющих параметров производных более высокого порядка дает для величины m еще большие значения.

Автор благодарит Л. И. Седова за обсуждение работы, а также В. А. Желноровича за сделанные замечания.

Поступила I 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Математические методы построения моделей сплошных сред. Усп. матем. наук, 1965, № 20, вып. 5.
2. Mindlin R. D. Micro-structure in linear elasticity. Arch. Rational Mecanics and Analisis, 1964, vol. 16, No 1.
3. Желнорович В. А. К теории построения моделей сплошных сред. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 2.
4. Бердичевский В. Л., Седов Л. И. Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
5. Mindlin R. D. Second Cradient of strain and Surfactension in Linear Elasticity. Intern. J. Solids Structures, 1965, vol. 1, pp. 417—438.
6. Лурье М. В. Применение вариационного принципа для исследования разрывов в сплошной среде. ПММ, 1966, т. 30 вып. 4.
7. Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
8. Лурье М. В. Задачи Ламе в градиентной теории упругости. Докл. АН СССР, 1968, т. 181, № 5.
9. Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 1.