Прикладная математика и механика. Том 33, 1969

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

Х. А. Рахматулин

(Москва)

Рассматриваются вопросы распространения звуковых и ударных волн в многокомпонентных средах. В общем случае в основу исследования можно положить теорию взаимопроникающих движений сжимаемой жидкости, которая была изложена ранее в [1]. В настоящей работе относительное движение компонент (газов, жидкостей и твердых частиц) не учитывается, т. е. среда рассматривается как односкоростная. При этом отличие от течения простых однокомпонентных сред (например, совершенного газа) состоит в более сложной зависимости между плотностью среды ρ и давлением p.

Специально рассмотрены течения сред, некоторые компоненты которых несжимаемы. Показано, что скорость звука в среде может быть меньше, чем наименьшая скорость звука в любой из составляющих среду компонент.

Впервые односкоростная теория многокомпонентной среды была развита Г. М. Ляховым [2]. В данной работе в отличие от работы [2] учтена необратимость ударного сжатия компонента.

1. Рассмотрим среду, состоящую из n компонент. Приведенную плотность j-ой компоненты ($j = 1, \ldots, n$), т. е. массу компоненты, приходящуюся на единицу объема среды, обозначим через ρ_j, а ее истинную плотность — через ρ_j°. Очевидно

$$\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_n \tag{1.1}$$

Наряду с ρ_j и ρ_j° удобно ввести «пористости» f_j, которые определяются соотношениями

$$f_j = \rho_j / \rho_j^\circ \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

и представляют объемные доли компонент смеси. В соответствии с (1.1) и (1.2) имеют место равенства

$$\rho = f_1\rho_1^\circ + \cdots + f_n\rho_n^\circ, \qquad f_1 + \cdots + f_n = 1 \tag{1.3}$$

Как и в [1], примем закон независимой сжимаемости компонент, причем давления всех компонент будем считать совпадающими и равными давлению среды p. Тогда

$$\rho_j^\circ = \varphi_j(p) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

где φ_j — известные функции (в частности, для несжимаемых компонент $\varphi_j = \mathrm{const}$). Подставив (1.4) в (1.3), найдем

$$\rho = f_1\varphi_1(p) + \cdots + f_n\varphi_n(p) \tag{1.5}$$

Если зависимости $f_j = f_j(p)$ известны, то (1.5) замыкает систему, включающую уравнение неразрывности и три уравнения движения среды. Найдем эти зависимости для случая изэнтропического течения.

Припишем индекс 0 параметрам смеси в некотором начальном состоянии. Имеем

$$\lambda_j \equiv \frac{V_j}{V_j^\circ} = \frac{\rho_{j0}^\circ}{\rho_j^\circ} = \frac{\rho_{j0}^\circ}{\varphi_j(p)} \tag{1.6}$$

где V_j — удельный объем, занимаемый j-ой компонентой. В соответствии с определением $f_j = V_j/V$, где V — удельный объем смеси.

С учетом этих соотношений можно получить, что

$$f_j = f_{j0}\lambda_j \left(\sum_{k=1}^{n} f_{k0}\lambda_k\right)^{-1}$$

и, следовательно, (1.5) примет вид

$$\rho = \sum_{j=1}^{n} f_{j0}\rho_{j0}^\circ \left(\sum_{j=1}^{n} f_{j0}\lambda_j\right)^{-1}$$

или после некоторых преобразований с использованием (1.6)

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_{j0}\rho_{j0}^\circ}{\varphi_j(p)} \tag{1.7}$$

Если компоненты с индексами $m+1, \ldots, n$ несжимаемы, то (1.7) принимает вид

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{j=1}^{m} \frac{f_{j0}\rho_{j0}^\circ}{\varphi_j(p)} + \sum_{j=m+1}^{n} f_{j0} \tag{1.8}$$

Введем скорости звука в среде и в каждой компоненте в соответствии с равенствами

$$c^{-2} = \frac{d\rho}{dp}, \quad c_j^{-2} = \frac{d\rho_j^\circ}{dp} \tag{1.9}$$

где производные берутся при постоянной энтропии, что в данном случае эквивалентно постоянству параметров с индексом нуль.

Из (1.8) и (1.9) имеем равенство

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho^2}{\rho_0} \sum_{j=1}^{m} \frac{\rho_{j0}}{\rho_j^{\circ 2} c_j^2}$$

которое в силу произвольности начального состояния можно переписать в виде[1]

$$\frac{1}{c^2} = \rho_0 \sum_{j=1}^{m} \frac{f_j}{\rho_j^\circ c_j^2} \tag{1.10}$$

---

[1] Тот же результат получается, если использовать равенства

$$\rho_j / \rho_{j0} = \rho / \rho_0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

которые при отсутствии фазовых переходов и относительного движения компонент следуют из уравнений неразрывности среды в целом и каждой компоненты в отдельности.

Если среда однокомпонентная, то $m = 1$, $\rho_1{}^\circ = \rho$, $f_1 = 1$ и, следовательно, $c = c_1$.

Область применимости формулы (1.10) ограничена предположением об общности давлений компонент. Если «поровое» давление отличается от давления «скелета», она не применима. Здесь в отличие от теории Био можно развить подход, при котором скелет принимается за упругую среду. Движение скелета описывается уравнениями упругости и соответствующими граничными условиями и при известной начальной пористости определяет текущую пористость. В получающейся таким образом среде с заданной переменной пористостью движется односкоростная многокомпонентная среда. Теория, построенная на основе описанного подхода, имеет по сравнению с теорией Био то преимущество, что в ней будут отсутствовать дополнительные постоянные среды, которые вводятся в теории Био. При этом ее точность будет расти при увеличении разности давления, действующего на скелет, и давления в порах.

2. Подход, примененный выше для определения скорости звуковых волн, можно использовать и при исследовании движения с ударными волнами. Отметим, что при этом для получения формулы для средней плотности среды ρ нельзя пользоваться законом изэнтропического сжатия каждой компоненты, как это сделано в [2]. В данном случае более правильно брать для каждой компоненты соответствующую адиабату Гюгонио, которую запишем в виде [1]

$$\rho_j{}^\circ = \psi_j(p) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

где функции ψ_j известны.

Пусть D и u — скорость ударной волны и скорость среды за волной (перед волной среда покоится). Тогда имеем

$$D\rho_0 u = p - p_0, \qquad D\rho_0 = (D - u)\rho$$

Отсюда для D и u получим

$$D^2 = \frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{p - p_0}{\rho - \rho_0} \tag{2.2}$$

$$u^2 = D^2\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 = \frac{p - p_0}{\rho_0}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

Так как в рассматриваемом случае роль функций φ_j играют функции ψ_j, то, используя (2.1), как и в предыдущем пункте, для ρ получим формулу

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_{j0}\rho_{j0}{}^\circ}{\psi_j(p)}$$

которая в случае несжимаемости компонент с индексами $j = m+1, \ldots, n$ принимает вид

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{j=1}^{m} \frac{f_{j0}\rho_{j0}{}^\circ}{\psi_j(p)} + \sum_{j=m+1}^{n} f_{j0} \tag{2.3}$$

[1] Функции ψ_j зависят не только от p, но и от давления перед скачком p_0.

В соответствии с этим, (2.2) переписывается в форме

$$\frac{1}{D^2}=\frac{\rho_0}{p-\rho_0}\left[1-\sum_{j=1}^{m}\frac{f_{j0}\rho_{j0}^{\circ}}{\psi_j(p)}-\sum_{j=m+1}^{n}f_{j0}\right]$$
$$u^2=\frac{p-p_0}{\rho_0}\left[1-\sum_{j=1}^{m}\frac{f_{j0}\rho_{j0}^{\circ}}{\psi_j(p)}-\sum_{j=m+1}^{n}f_{j0}\right]\qquad(2.4)$$

В ряде случаев для некоторых компонент, например для жидкостей и твердых тел вместо адиабаты Гюгонио можно применять изотерму или изэнтропу. На формулах (2.3) и (2.4) такая замена отражается лишь через изменение соответствующих функций ψ_j.

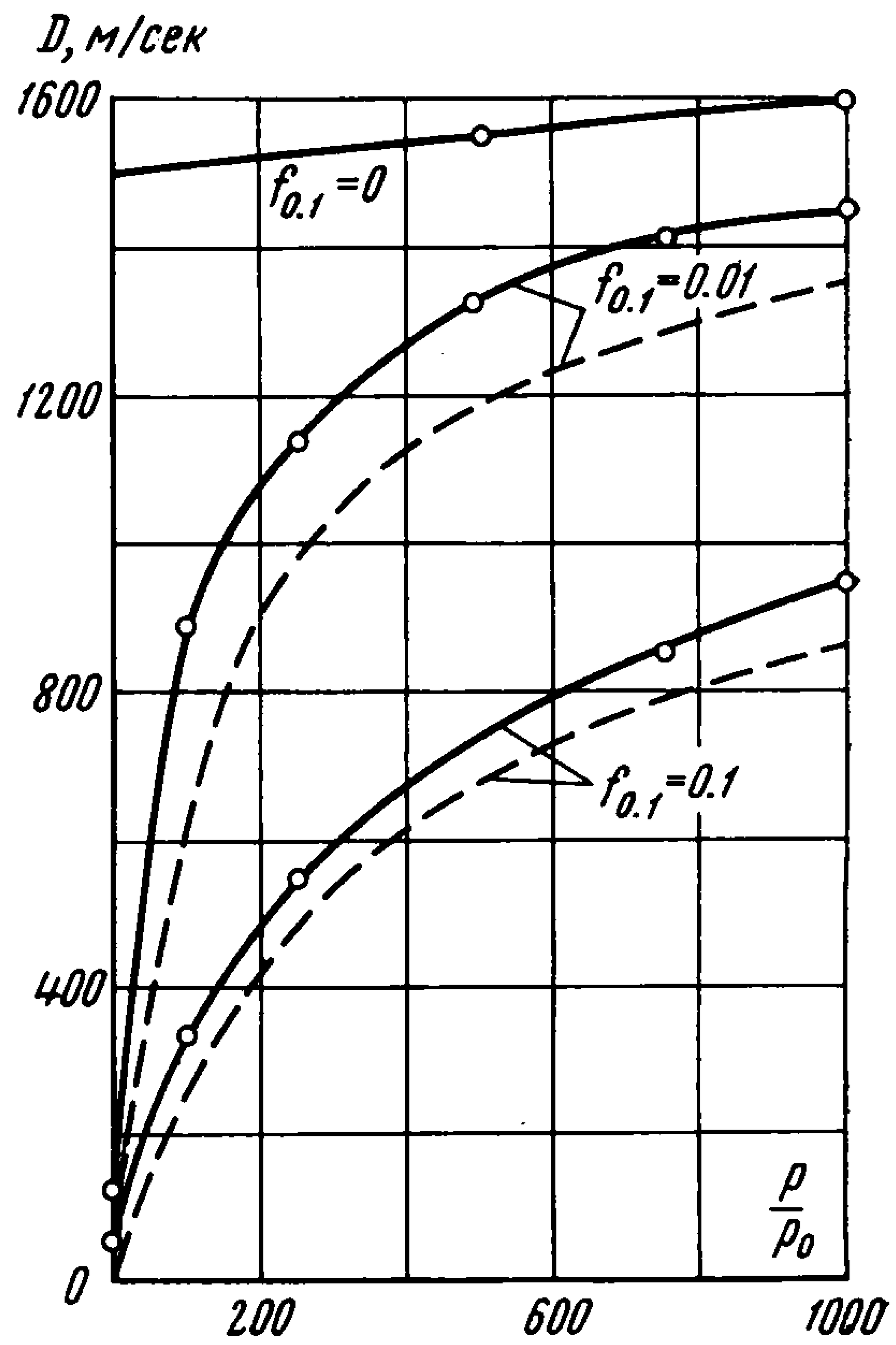
Итак, примем для газовой компоненты ($j = 1$) адиабату Гюгонио, а для жидкой ($j = 2$) и для твердой ($j = 3$) компонент — изэнтропу. Тогда

$$\psi_1=\rho_{10}^{\circ}\frac{\varkappa p+p_0}{\varkappa p_0+p}\qquad(2.5)$$

$$\psi_j=\rho_{j0}^{\circ}\left[1+\frac{k_j(p-p_0)}{\rho_{j0}^{\circ}c_{j0}^{2}}\right]^{1/k_j}\qquad(j=2,\,3)$$

$$\varkappa=(\gamma_1+1)\,/\,(\gamma_1-1)$$

Здесь константы k_2 и k_3 — показатели изэнтропы жидкой и твердой компонент, а γ_1 — показатель изэнтропы газа (газ считается совершенным).



В частности, для воздуха, воды и кварца при нормальных условиях можно принять, что истинная массовая плотность равна 0.125, 102 и 265 *кГсек*^{2}/*м*^{4}, скорость звука равна 330, 1500 и 4500 *м/сек*, а показатели изэнтропы есть 1.4, 3 и 3 для трех перечисленных выше компонент соответственно. В силу этого для воздуха и воды; $\rho^{\circ}_{10}c_{10}^2 = 1.31\cdot10^4$ *кГ/м*^{2} и $\rho_{20}^{\circ}\, c_{10}^2 = 2.25\cdot10^8$ *кГ/м*^{2}. Используя эти значения констант и формулу (1.10), найдем, что для смеси воздуха и воды при $f_1 = 0.01$ скорость звука смеси $c = 114$ *м/сек*, а при $f_1 = 0.1$ она падает до 38 *м/сек*, т. е. становится меньше, чем меньшая из скоростей звука компонент. Кривые зависимости скорости ударной волны для смеси воздуха и воды, полученные в соответствии с (2.4) и (2.5), построены на фигуре (сплошные линии) как функции f_{10} и отношения давления на скачке $p\,/\,p_0$, где $p_0 = 1$ *атм*. Там же штриховыми линиями приведены результаты работы [2].

Поступила 12 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулина Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
2. Ляхов Г. М. Ударные волны в многокомпонентных средах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.