СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

И. М. Руткевич

(Москва)

Рассматривается задача о течении максвелловской жидкости в плоском канале, границы которого движутся с заданными скоростями. Если через границы канала имеется поток массы, то непрерывное решение задачи может не существовать. Обсуждаются причины возникновения разрывного решения. На примере трехконстантной модели Олдройда рассмотрена возможная структура разрыва в исходной двухконстантной модели.

1. Течение несжимаемой вязко-упругой жидкости будем считать зависящим от одной координаты z. Предположим, что поведение среды описывается реологическими уравнениями «контравариантной» модели Олдройда [1]

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij}, \qquad T_{ij} + \lambda_1 T_{ij}^{\cdot} = 2\eta e_{ij}$$
$$T_{ij}^{\cdot} = \partial T_{ij} / \partial t + v_k T_{ij,k} - v_{i,k} T_{kj} - v_{j,k} T_{ik} \tag{1.1}$$

Пусть вектор скорости имеет вид $\mathbf{V} = (v_x, 0, v_0)$, тензор T_{ij} имеет отличные от нуля компоненты T_{xx}, T_{xz}, T_{zz}, а продольный градиент давления и внешние объемные силы отсутствуют. В рассматриваемом случае стационарного течения из уравнения неразрывности следует $v_0 = \text{const}$, а уравнения движения и соотношения (1.1) приводят к следующей системе уравнений, замкнутой относительно v_x, T_{xz}, T_{xx}, T_{zz}

$$\rho v_0 \frac{dv_x}{dz} = \frac{dT_{xz}}{dz}, \qquad T_{xz} + \lambda_1 \left(v_0 \frac{dT_{xz}}{dz} - T_{zz} \frac{dv_x}{dz} \right) = \eta \frac{dv_x}{dz} \tag{1.2}$$

$$T_{xx} + \lambda_1 \left(v_0 \frac{dT_{xx}}{dz} - 2T_{xz} \frac{dv_x}{dz} \right) = 0, \qquad T_{zz} + \lambda_1 v_0 \frac{dT_{zz}}{dz} = 0 \tag{1.3}$$

Необходимо найти решение системы (1.2), (1.3) в области $|z| \leqslant a$ (плоский канал), удовлетворяющее следующим граничным условиям.

Задается продольная скорость $v_x(-a) = u_1$ и $v_x(a) = u_2$ (течение типа куэттовского). Кроме того, на линии входа потока в канал следует задать напряжения T_{xx} и T_{zz}. Например, при вдуве ($v_0 > 0$) следует задать значения величины $T_{xx}(-a) = T_*$, $T_{zz}(-a) = T_0$, а при отсасывании задаются величины $T_{xx}(a) = T^*$, $T_{zz}(a) = T^\circ$.

Случай $v_x(-a) = u_1$, $v_x(a) = u_2$ легко сводится к случаю $v_x(-a) = 0$, $v_x(a) = u_2 - u_1 \equiv u$ при помощи перехода к другой инерциальной системе координат.

Второе уравнение (1.3) имеет решение

$$T_{zz} = T_0 \exp(-h - \zeta), \qquad \zeta(z) = z/\lambda_1 v_0, \qquad h = \zeta(a) \tag{1.4}$$

При известном распределении T_{zz} уравнения (1.2) образуют замкнутую систему второго порядка, для которой задаются два граничных условия «прилипания» продольной скорости.

Тогда первое уравнение (1.3) служит для определения величины T_{xx}.

Второе уравнение (1.3) имеет частное решение $T_{zz} \equiv 0$, соответствующее одному из граничных условий $T_0 = 0$, либо $T^\circ = 0$. Это решение использовалось в работах [2,3] при рассмотрении течения Куэтта модели (1.1) с инжекцией и отсасыванием. Однако возможно отличное от нуля распределение $T_{zz}(z)$, которое допускается не только исходной системой уравнений, но и по следующим ниже соображениям.

Пусть, например, жидкость подводится к одной из стенок с помощью системы капилляров, в которых происходит полностью развитое течение в направлении оси z. Если рассмотреть задачу о течении Пуазейля в круглом капилляре радиуса r_0 с непроницаемой границей для модели (1.1), то окажется, что распределение $T_{zz}(r)$ отлично от нуля и имеет вид

$$T_{zz} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{\eta} P^2 r^2, \qquad P = -\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const} \qquad 0 \leqslant r \leqslant r_0$$

Кроме того, имеет место следующая связь между средними по сечению капилляра величинами $\langle T_{zz}\rangle$ и $\langle v_z\rangle$:

$$\langle T_{zz}\rangle = 16\ \lambda_1\eta\langle v_z\rangle^2 / r_0^2$$

Поэтому задание положительной величины T_{zz} на линии входа жидкости в область $|z| < a$ представляется физически допустимым.

Подставляя T_{zz} из (1.4) в (1.2), получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно T_{xz}

$$\lambda_1(c^2(z) - v_0^2)\frac{dT_{xz}}{dz} - v_0 T_{xz} = 0, \qquad c^2(z) = \frac{1}{\rho}\left(T_{zz} + \frac{\eta}{\lambda_1}\right) \tag{1.5}$$

Величина $c^2(z)$ представляет собой квадрат скорости «поперечного звука» и должна быть положительной, иначе уравнения, описывающие малые возмущения течения, будут неэволюционными [4,5].

Легко видеть, что при $T_{zz} > 0$ условие эволюционности одномерных, зависящих от z возмущений, выполнено.

Для эволюционности трехмерных возмущений необходимо, чтобы в рассматриваемом стационарном течении наряду с неравенством $T_{zz} + \eta / \lambda_1 > 0$ выполнялось неравенство $(T_{xx} + \eta/\lambda_1)(T_{zz} + \eta / \lambda_1) > T_{xz}^2$.

Если в уравнении (1.5) коэффициент при производной нигде внутри канала не обращается в нуль, т. е. течение в поперечном направлении является строго дозвуковым или строго сверхзвуковым, то по известной величине напряжения сдвига на одной из границ, например, нижней $T_{xz}(-a) = \tau_0$, можно найти распределение $T_{xz}(z)$. Величина τ_0 в этом случае может быть однозначно определена по заданным u и T_0. При этом используется интеграл уравнения движения в проекции на ось x, который при отсутствии продольного градиента давления и внешних объемных сил имеет вид

$$\rho v_0 v_x = T_{xz} - \tau_0$$

Для распределений $T_{xz}(z)$ и $v_x(z)$ получаются следующие формулы:

$$T_{xz} = \tau_0\left(\frac{\varkappa^{-1}e^{\zeta} + \sigma}{\varkappa^{-1}e^{-h} + \sigma}\right)^{\varkappa}, \qquad \sigma = \frac{T_{zz}(0)}{\rho v_0^2}, \qquad \varkappa = \left(\frac{c_0^2}{v_0^2} - 1\right)^{-1}, \qquad c_0^2 = \frac{\eta}{\lambda_1\rho}$$

$$v_x = u\left\{\left(\frac{\varkappa^{-1}e^{\zeta} + \sigma}{\varkappa^{-1}e^{-h} + \sigma}\right)^{\varkappa} - 1\right\}\left[\left(\frac{\varkappa^{-1}e^{h} + \sigma}{\varkappa^{-1}e^{-h} + \sigma}\right)^{\varkappa} - 1\right]^{-1} \tag{1.6}$$

Связь между величиной τ_0 и параметрами задачи имеет вид

$$\rho v_0 u = \tau_0\left[\left(\frac{\varkappa^{-1}e^{h} + \sigma}{\varkappa^{-1}e^{-h} + \sigma}\right)^{\varkappa} - 1\right] \tag{1.7}$$

Заметим, что если в (1.7) положить $\sigma = 0$ и перейти к пределу при $\lambda_1 \to 0$, получится известная формула для аналогичных течений вязкой жидкости

$$\rho v_0 u = \tau_0[\exp(2av_0 / \nu) - 1], \qquad \nu = \eta / \rho$$

Рассмотрим теперь случай, когда в некоторой точке $z_0 \in (-a, a)$ коэффициент при dT_{xz} / dz в (1.5) обращается в нуль, т. е. происходит переход поперечного течения от дозвукового к сверхзвуковому. Координата звуковой линии определяется из уравнения

$$\sigma\exp(-\zeta_0) = 1 - c_0^2 / v_0^2, \qquad \zeta_0 = \zeta(z_0) = z_0 / \lambda_1 v_0$$

Последнее уравнение имеет решение в интервале $|\zeta| < |h|$ (при условии $T_0 > 0$), если параметры задачи удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\rho(v_0^2 - c_0^2) < T_0 < \rho(v_0^2 - c_0^2)e^{2h}, \qquad v_0 > c_0$$

$$\rho(v_0^2 - c_0^2)e^{2h} < T_0 < \rho(v_0^2 - c_0^2), \qquad v_0 < -c_0$$

Уравнение (1.5) в этом случае можно записать в виде

$$\varkappa^{-1}[1 - \exp(\zeta_0 - \zeta)]dT_{xz}/\, d\zeta - T_{xz} = 0$$

В окрестности точки ζ_0 последнее уравнение можно заменить следующим:

$$\varkappa^{-1}(\zeta - \zeta_0)dT_{xz}/\, d\zeta - T_{xz} = 0$$

общее решение которого имеет вид

$$T_{xz} = C\,|\,\zeta - \zeta_0\,|^{\varkappa}$$

На плоскости переменных $T_{xz}\zeta$ точка $(0, \zeta_0)$ будет особой точкой уравнения (1.5). Так как $T_0 > 0$, то $\varkappa < -1$, и особая точка будет седлом. Все интегральные кривые $T_{xz}(\zeta)$, за исключением прямой $T_{xz} = 0$, уходят в бесконечность, когда ζ стремится к ζ_0. При этом решение поставленной задачи оказывается неединственным. Граничным условиям для продольной скорости $v_x(\zeta)$ можно удовлетворить при любом данном значении τ_0. В этом случае величина τ_0 не определяется при помощи формулы типа (1.7), а ее необходимо задавать. Таким образом, при «трансзвуковом режиме» сформулированная выше задача имеет бесконечно много решений, причем все решения, удовлетворяющие условиям «прилипания» для продольной скорости на границах канала, не имеют физического смысла: на звуковой линии скорость v_x обращается в бесконечность, а так как $\varkappa < -1$, то бесконечным оказывается и расход жидкости в канале.

Заметим, что если допустить для T_0 значения в интервале $(-\eta\,/\,\lambda_1,\, 0)$, то особая точка оказывается узлом, а величины T_{xz}, v_x имеют на звуковой линии слабый разрыв. При этом решение задачи неединственно, как и в случае седловой точки.

Итак, установлено, что непрерывное трансзвуковое решение, удовлетворяющее условиям прилипания для продольной скорости на обеих границах канала, при $\varkappa < -1$ построить нельзя. Если же отказаться от условий прилипания на одной из стенок, то можно построить единственное непрерывное решение вида $T_{xz} = 0$, $v_x = \mathrm{const}$, Поэтому критерием существования единственного решения, непрерывного во всем канале, будет отказ от второго граничного условия. В случае трансзвукового течения при $\varkappa > 0$, напротив, двух условий прилипания для продольной скорости оказывается недостаточно для определения единственного непрерывного решения, и необходимо задать третье граничное условие, например, $T_{xz}(-a) = \tau_0$.

Аналогичная ситуация имеет место и при рассмотрении одномерного нестационарного течения. Наложим, например, на рассматриваемое стационарное течение малые возмущения δv_x, δT_{xz}, зависящие только от z и t. В предположении, что скорость звука не возмущается, получим систему уравнений относительно δv_x, δT_{xz}:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta v_x + v_0\frac{\partial}{\partial z}\delta v_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\delta T_{xz} = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta T_{xz} + v_0\frac{\partial}{\partial z}\delta T_{xz} - \left(T_{zz} + \frac{\eta}{\lambda_1}\right)\frac{\partial}{\partial z}\delta v_x + \frac{1}{\lambda_1}\delta T_{xz} = 0$$

Наклон характеристик системы (1.8) определяется уравнениями

$$\frac{dz_+}{dt} = v_0 + c(z), \qquad \frac{dz_-}{dt} = v_0 - c(z), \qquad c(z) = \left[\frac{1}{\rho}\left(T_{zz} + \frac{\eta}{\lambda_1}\right)\right]^{1/2}$$

Согласно [5], для единственности решения системы (1.8), непрерывного в прямоугольнике $R\ (|\,z\,| \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, при дозвуковом течении следует задать одно граничное условие при $z = -a$ и одно условие при $z = a$.

В случае сверхзвукового течения следует либо задать два граничных условия при $z = -a$, если $v_0 > 0$, либо задать два условия при $z = a$, если $v_0 < 0$. Во всех этих случаях суммарное число граничных условий равно двум.

Если течение трансзвуковое, то прямая $z = z_0$ будет характеристикой, отделяющей дозвуковую область на плоскости zt от сверхзвуковой. В случае $\varkappa < -1$ оказывается, что дозвуковая область лежит справа от z_0 при $v_0 < 0$ и слева от z_0 при $v_0 > 0$. Поэтому суммарное число краевых условий, обеспечивающих единственность непрерывного решения, равно единице. Для трансзвукового течения при $\varkappa > 0$ число краевых условий оказывается равным трем, так как дозвуковая область лежит слева от z_0 при $v_0 < 0$ и справа от z_0 при $v_0 > 0$.

Рассмотрение течения модели (1.1) между коаксиальными цилиндрами, которые движутся с заданными скоростями вдоль общей оси, при наличии радиальной скорости v_r приводит к результатам, сходным с теми, которые получены для плоской щели. Вместо уравнения (1.5) здесь имеет место уравнение

$$\lambda_1 (c^2(r) - v_r^2) \frac{d}{dr}(rT_{rz}) - v_r r T_{rz} = 0, \qquad v_r = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$c^2(r) = \frac{1}{\rho}\left(T_{rr} + \frac{\eta}{\lambda_1}\right) = Cr^{-2} \exp\left(\frac{-\pi r^2}{\lambda_1 Q}\right) + \frac{\eta}{\lambda_1 \rho}\left(1 - \frac{\lambda_1 Q}{\pi r^2}\right)$$

Для течения в каналах указанного типа не удается также построить непрерывное «трансзвуковое решение» при наличии продольного градиента давления и $\varkappa < -1$. Аналогичная ситуация может иметь место при использовании уравнений других моделей максвелловской жидкости с конечными упругими деформациями, например, уравнений «ковариантной» модели Олдройда [1] или модели Де-Уитта [6].

2. Решение поставленной задачи, имеющее на звуковой линии разрыв второго рода, физически неудовлетворительно. Представляется естественной попытка построения разрывного, но ограниченного решения задачи. Введение конечных разрывов в диссипативной среде влечет за собой дополнительные динамические условия. Рассмотрим уравнение движения в проекции на ось x

$$\rho v_0 \frac{dv_x}{dz} = \frac{dT_{xz}}{dz} + P + f_x \tag{2.1}$$

В последнем уравнении $P = -\partial p / \partial x$, f_x—плотность внешних объемных сил. Представляя разрывные распределения величин v_x и T_{xz}, как пределы непрерывных распределений, резко изменяющихся в окрестности некоторой точки $z = \xi$, получим, основываясь на соображениях работы [7]

$$\rho \vartheta_0 \{v_x\} - \{T_{xz}\} = F \tag{2.2}$$

Величина F определяется как следующий предел:

$$F = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_x dz$$

и представляет собой плотность внешних поверхностных сил, действующих на линии $z = \xi$. Можно также определить поверхностный момент внешних сил

$$M = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} (z - \xi) f_x dz$$

Для модели (1.1) использование соответствующего реологического уравнения (второе уравнение (1.2)) и уравнения движения (2.1) позволяет вычислить величину

$$M = \lambda_1 \rho c^2 (\xi) \{v_x\} - \lambda_1 v_0 \{T_{xz}\} \tag{2.3}$$

В двухконстантной модели (1.1) величины F и M следует трактовать как заданные внешние воздействия. Не представляет труда обобщение формулы (2.3) на случай контакта двух вязко-упругих жидкостей.

Пусть в некоторой точке внешние поверхностные воздействия равны нулю. Тогда для определения скачков $\{v_x\}$ и $\{T_{xz}\}$ имеем систему уравнений

$$\rho v_0 \{v_x\} - \{T_{xz}\} = 0, \qquad \lambda_1 \rho c^2 \{v_x\} - \lambda_1 v_0 \{T_{xz}\} = 0$$

Определитель этой системы равен $\Delta = \lambda_1 \rho (c^2 - v_0^2)$. Следовательно, $\{v_x\} = 0$ и $\{T_{xz}\} = 0$, если в данной точке $c^2 \neq v_0^2$. Если же $c^2 = v_0^2$, то скачки $\{v_x\}$ и $\{T_{xz}\}$, как следует из п. 1, равны либо нулю, либо бесконечности. При этом последнюю возможность следует отвергнуть как физически нереальную.

Возвращаясь к сформулированной в п. 1 задаче, естественно считать, что внутри канала внешних поверхностных сил и моментов нет, поэтому решение должно быть непрерывно в интервале $|z| < a$. В трансзвуковом случае при $\varkappa < -1$ распределение величин T_{xz}, v_x внутри канала должно иметь вид $T_{xz} = 0$, $v_x = \text{const}$. В этом случае удовлетворить граничным условиям для продольной скорости можно только введением величин F и M на проницаемых стенках. В простейшем случае можно считать, что область $|z| > a$ занята той же самой вязко-упругой жидкостью, при этом границы канала схематизировать поверхностями разрыва, на которых заданы внешние воздействия, вычисляемые по формулам (2.2), (2.3).

Рассмотрим, например, «трансзвуковой вдув», считая, что входная линия $z = -a$ свободна от внешних поверхностных силы и момента. Тогда на нижней стенке нет скачка скорости, и $v_x(z) = 0$ при $-a \leqslant z < a$. Если и выходная линия $z = a$ свободна от поверхностных воздействий, то $v_x(a) = 0$, и течение с заданными скоростями границ осуществить невозможно. Для того чтобы получить на выходе $v_x(a) = u$, достаточно к поверхности $z = a$ приложить силу $F = \rho v_0 u$ и момент $M = \lambda_1 \rho c^2(a) u$.

Заметим, что при наличии внешних поверхностных воздействий решение будет иметь разрыв на стенке и в том случае, когда внутри канала нет перехода скорости инжекции через скорость звука.

3. В реальных течениях поверхностям разрыва соответствуют узкие зоны, характеризующиеся резким изменением параметров течения. Одной из возможных структур разрыва, возникающего на стенке при течении максвелловской жидкости, является течение в пограничном слое трехконстантной модели вязко-упругой жидкости при очень малых временах ретардации.

Рассмотрим ту же задачу, что и в п. 1, для несжимаемой жидкости, поведение которой описывается следующими реологическими уравнениями [1]

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij}, \qquad T_{ij} + \lambda_1 T_{ij}^{\cdot} = 2\eta\,(e_{ij} + \lambda_2 e_{ij}^{\cdot}) \tag{3.1}$$

$$e_{ij}^{\cdot} = \partial e_{ij}/\partial t + v_k e_{ij,k} - v_{i,k} e_{kj} - v_{j,k} e_{ik}$$

В (3.1) величина λ_1 — время релаксации, λ_2 — время ретардации. В рассматриваемом течении первое уравнение (1.2) и второе уравнение (1.3) сохраняют свой вид и для трехконстантной модели, а второе уравнение (1.2) заменится уравнением

$$T_{xz} + \lambda_1 \left(v_0 \frac{dT_{xz}}{dz} - T_{zz} \frac{dv_x}{dz} \right) = \eta \left(\frac{dv_x}{dz} + \lambda_2 v_0 \frac{d^2 v_x}{dz^2} \right) \tag{3.2}$$

Из написанного выше уравнения, а также из первого уравнения (1.2) и (1.4) следует, что T_{xz} удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое в отличие от (1.5) является уравнением второго порядка

$$\frac{d^2 T_{xz}}{d\zeta^2} + \mu \frac{c^2(\zeta) - v_0^2}{c_0^2} \frac{dT_{xz}}{d\zeta} - \mu \frac{v_0^2}{c_0^2} T_{xz} = 0, \qquad \zeta = \frac{z}{\lambda_1 v_0} \tag{3.3}$$

В уравнение (3.3) входит параметр $\mu = \lambda_1 / \lambda_2$. Необходимо исследовать поведение решений этого уравнения, когда μ стремится к бесконечности.

Рассмотрим случай, когда уравнение (1.5) имеет седловую особую точку ζ_0 в интервале $|\zeta| < |h|$. Очевидно, что в окрестности точки ζ_0 поведение решений уравнения (3.3) будет хорошо описываться уравнением

$$\frac{d^2 T_{xz}}{d\zeta^2} + \mu \left(1 - \frac{v_0^2}{c_0^2} \right) (\zeta - \zeta_0) \frac{dT_{xz}}{d\zeta} - \mu \frac{v_0^2}{c_0^2} T_{xz} = 0 \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) является приближением уравнения (3.3) для $|\zeta - \zeta_0| \ll 1$. В частности, при $2a \ll \lambda_1 |v_0|$ (ширина канала много меньше расстояния, на котором происходит релаксация напряжений) уравнение (3.4) можно применять во всем канале, что и делается в дальнейшем.

Совершим замену неизвестной функции, полагая

$$T_{z} = \varphi(\zeta - \zeta_0)\exp[{}^1/_4\mu(v_0^2/c_0^2 - 1)(\zeta - \zeta_0)^2]$$

Тогда $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2} - \left[\frac{1}{2}\mu\left(1 + \frac{v_0^2}{c_0^2}\right) + \frac{1}{4}\mu^2\left(\frac{v_0^2}{c_0^2} - 1\right)^2\zeta^2\right]\varphi = 0 \tag{3.5}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \zeta^{-1/2}y(\beta, {}^1/_4, \gamma\mu\zeta^2), \qquad \beta = \frac{1 + v_0^2/c_0^2}{4(1 - v_0^2/c_0^2)}, \qquad \gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{c_0^2} - 1\right)$$

$$y(k, m, x) = y(-k, m, -x) = C_1M_{k,m}(x) + C_2M_{k,-m}(x)$$

Функция Уиттекера $M_{k,m}(x)$ определена равенством

$$M_{k,m}(x) = x^{m+1/2}e^{-1/2x}\Phi(m + {}^1/_2 - k, 2m + 1; x)$$

где $\Phi(a, b; x) \equiv {}_1F_1(a, b; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера.

Для уравнения (3.4) задаются краевые условия

$$T_{xz}(-h) = \theta_0, \qquad T_{xz}(h) = \theta_0 + \rho v_0 u \tag{3.6}$$

которые являются следствием краевых условий, задаваемых для системы третьего порядка, замкнутой относительно v_x, T_{xz} и состоящей из первого уравнения (1.2) и уравнения (3.2)

$$v_x(-h) = 0, \qquad v_x(h) = u, \qquad T_{xz}(-h) = \theta_0$$

Подчеркнем, что задание напряжения сдвига $T_{xz}(-h) = \theta_0$ в трехконстантной модели будет естественным граничным условием, связанным с более высоким порядком модели. Величина θ_0 должна быть либо взята из эксперимента, либо ее необходимо задать на основании дополнительных физических предположений. Не исключена также зависимость величины θ_0 от параметра μ.

Непрерывное решение краевой задачи (3.6) для уравнения (3.4) существует при любых значениях u и θ_0. Выпишем это решение при условии $\varkappa < -1$, предполагая для простоты, что $\zeta_0 = 0$ (3.7)

$$T_{xz} = \frac{1}{2}\rho v_0 u\frac{\zeta}{h}\frac{\Phi({}^3/_4 - \beta, {}^3/_2; \gamma\mu\zeta^2)}{\Phi({}^3/_4 - \beta, {}^3/_2; \gamma\mu h^2)} + \left(\theta_0 + \frac{1}{2}\rho v_0 u\right)\frac{\Phi({}^1/_4 - \beta, {}^1/_2; \gamma\mu\zeta^2)}{\Phi({}^1/_4 - \beta, {}^1/_2; \gamma\mu h^2)}$$

Для получения асимптотики решения воспользуемся формулой

$$\Phi(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}x^{a-b}e^x(1 + O(x^{-1})), \qquad x \to +\infty$$

Тогда асимптотическая формула для T_{xz} при $\mu \to \infty$ примет вид

$$T_{xz} = \left|\frac{\zeta}{h}\right|^{\varkappa'}\exp(\gamma\mu(\zeta^2 - h^2))\left(\theta_0 + \frac{1}{2}\rho v_0 u\left(1 + \operatorname{sign}\frac{\zeta}{h}\right)\right)(1 + O(\mu^{-1})) \tag{3.8}$$

$$|\zeta| \geqslant \varepsilon > 0, \qquad \varkappa' = (v_0^2/c_0^2 - 1)^{-1} > 0$$

Обозначим $T_{xz}^*(\zeta) = \lim T_{xz}(\zeta, \mu)$ при $\mu \to \infty$. Тогда из (3.7), (3.8) следует, что функция $T_{xz}^*(\zeta)$ имеет вид

$$T_{xz}^*(-h) = \theta_0, \qquad T_{xz}^*(\zeta) = 0\ (|\zeta| < |h|), \qquad T_{xz}^*(h) = \theta_0 + \rho v_0 u$$

Для функции $v_x^*(\zeta) = \lim v_x(\zeta, \mu)$ при $\mu \to \infty$ получим формулу

$$v_x^*(-h) = 0, \qquad v_x^*(\zeta) = -\theta_0/\rho v_0 \quad (|\zeta| < |h|), \qquad v_x^*(h) = u$$

Как видно из написанных выше формул, предельные распределения напряжения сдвига и продольной скорости оказываются разрывными.

Заметим, что распределение продольной скорости в трехконстантной модели при конечном μ можно осуществить и в двухконстантной модели. В самом деле, пусть функции $V_x(z)$, $T_{xz}(z)$ удовлетворяют первому уравнению (1.2) и уравнению (3.2). Положим

$$v_x \equiv V_x, \qquad \tau_{xz} = T_{xz} - \frac{\eta}{\mu} \int\limits_{-a}^{z} \exp \frac{y-z}{\lambda_1 v_0} V_x''(y)\, dy$$

Функции v_x, τ_{xz} удовлетворяют системе уравнений

$$\rho v_0 \frac{dv_x}{dz} = \frac{d\tau_{xz}}{dz} + f_x(z, \mu), \qquad \tau_{xz} + \lambda_1 \left(v_0 \frac{d\tau_{xz}}{dz} - T_{zz} \frac{dv_x}{dz} \right) = \eta \frac{dv_x}{dz} \tag{3.9}$$

Легко видеть, что второе уравнение (3.9) совпадает со вторым уравнением (1.2) а первое уравнение (3.9) представляет собой уравнение движения при наличии внешних объемных сил специального вида

$$f_x(z, \mu) = \frac{\eta}{\mu} \left(V_x''(z) - \frac{1}{\lambda_1 v_0} \int\limits_{-a}^{z} \exp \frac{y-z}{\lambda_1 v_0} V_x''(y)\, dy \right)$$

При стремлении μ к бесконечности плотность объемных сил для распределения вида (3.8) будет неограниченно возрастать при $z = \pm a$, и в пределе можно пользоваться схемой, изложенной в п. 2, заменяя «ретардационный пограничный слой» поверхностью разрыва. При этом разрывное решение задачи о течении двухконстантной модели однозначно определяется величинами F и M. Вычисление этих величин, например, при $z = -a$ следует производить по формулам

$$F(-a) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\lim_{\mu \to \infty} \int\limits_{-a}^{-a+\varepsilon} f_x(z, \mu)\, dz \right), \qquad M(-a) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\lim_{\mu \to \infty} \int\limits_{-a}^{-a+\varepsilon} (z + a) f_x(z, \mu)\, dz \right)$$

В приближении узкого канала получим

$$F(-a) = \theta_0 \frac{a}{\lambda_1 v_0} \left(1 - \frac{c_0^2}{v_0^2} \right), \qquad F(a) = (\theta_0 + \rho v_0 u) \frac{a}{\lambda_1 v_0} \left(1 - \frac{c_0^2}{v_0^2} \right), \qquad M(\pm a) = 0$$

Из этого пункта следует, что бесконечные разрывы, описанные в п. 1, в трехконстантной модели структуры не имеют. Это обстоятельство служит косвенным подтверждением несоответствия таких разрывов реальным течениям.

Автор признателен Г. А. Любимову и С. А. Региреру за полезные обсуждения.

Поступила 20 XII 1968

НИИ механики МГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Oldroyd J. G. On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc., 1950, A 200, No. 1063, p. 523.
2. Datta S. K. On the steady motion of an idealized elastico-viscous liquid through channels with suction and injection. J. Phys. Soc. Japan, 1961, vol. 16, No. 4, pp. 794—797.
3. Kaloni P. N. Couette-type flow of a viscoelastic fluid through porous walls. J. aeronaut. sci., 1962, vol. 29, No. 11, p. 1399.
4. Регирер С. А., Руткевич И. М. Некоторые особенности уравнений гидродинамики неньютоновских сред. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
5. Руткевич И. М. Некоторые общие свойства уравнений динамики вязко-упругой несжимаемой жидкости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
6. DeWitt T. W. Rheological equation of state which predicts non-Newtonian viscosity, normal stresses and dynamic moduli. J. appl. phys., 1955, vol. 26, No. 7.
7. Баренблатт Г. И., Черный Г. Г. О моментных соотношениях на поверхностях разрыва в диссипативных средах. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.