ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ СЛУЧАЯ СЖИМАЕМОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

В. В. Щенников (Москва)

Наряду с известными точными решениями уравнений Навье—Стокса, описывающих течение несжимаемой вязкой жидкости (решения Гамеля, Куэтта, Пуазейля), имеется довольно широкий класс точных решений, соответствующий струйным течениям вязкой жидкости. Впервые на существование решения подобного типа указал Л. Д. Ландау [1]. Полученное им решение можно интерпретировать как истечение струи конечного импульса в бесконечное пространство, заполненное покоящейся вязкой жидкостью. Позднее Сквайр [2] построил аналогичное решение для пристеночной струи. В. И. Яцеев [3] нашел класс точных решений уравнений Навье—Стокса для течения несжимаемой жидкости, включающий как частные случаи решения Л. Д. Ландау и Сквайра. В работе Ву [4] приводится обобщение результатов В. И. Яцеева на случай течения электропроводящей жидкости в присутствии магнитного поля.

В последнее время были найдены точные решения для сжимаемого теплопроводного газа. Эти решения можно рассматривать как обобщение решения Гамеля. Так Вильямс [5] получил точное решение для осесимметричного течения типа источника в предположении, что коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры, как $(T)^{0.5}$. Для произвольной зависимости вязкости и теплопроводности газа от температуры А. П. Быркиным [6] получено точное решение, аналогичное решению Вильямса, в плоском случае.

В предлагаемой работе найден класс точных решений уравнений Навье—Стокса для двумерных течений вязкого теплопроводного газа. Частными случаями полученного класса решений являются решения А. П. Быркина и Вильямса. В случае несжимаемой жидкости постоянной вязкости найденное решение совпадает с решением В. И. Яцеева.

1. Уравнения Навье—Стокса, описывающие стационарные течения вязкого сжимаемого теплопроводного совершенного газа, имеют следующий вид:

$$\nabla(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + {}^1/_3\nabla(\mu\nabla\mathbf{v}) + \mu\Delta\mathbf{v} + \nabla(\nabla\mu\cdot\mathbf{v}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}) - \mathbf{v}\Delta\mu \qquad (1.1)$$

$$Ic_p(\mathbf{v}\cdot\nabla)T - (\mathbf{v}\cdot\nabla)p = I\nabla(k\nabla T) - {}^2/_3\mu(\nabla\mathbf{v})^2 + \mu\Delta(\mathbf{v})^2 - 2\mu\mathbf{v}\nabla(\nabla\mathbf{v}) +$$
$$+ 2\mu\nabla\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) - \mu(\nabla\times\mathbf{v})^2$$

$$p = \rho RT$$

где ∇ — оператор Гамильтона, $\Delta = \nabla^2$; $\mathbf{v}$, p, ρ, T, μ, k, R обозначают соответственно вектор скорости, давление, плотность, температуру, коэффициент вязкости, коэффициент теплопроводности, универсальную постоянную газа. Относительно μ и k будем предполагать, что они связаны с температурой зависимостью вида μ, $k \sim (T)^n$, где n — произвольное число.

2. Рассмотрим случай осесимметричных течений. Воспользуемся сферическими координатами (r, θ, φ) и будем всюду в уравнениях полагать $v_\varphi \equiv 0$, $\partial(\ldots)/\partial\varphi \equiv 0$. Решение уравнений (1.1) ищется в виде

$$\rho v_r = \Phi(\theta)r^{-\beta}, \qquad v_r = \varphi(\theta)r^{-\alpha}, \ \mu = m(\theta)r^{-\gamma}$$
$$\rho v_\theta = \Psi(\theta)r^{-\beta}, \ v_\theta = \psi(\theta)r^{-\alpha}, \quad k = \varkappa(\theta)r^{-\gamma} \qquad (2.1)$$
$$T = \tau(\theta)r^{-2\alpha}$$

Для существования решения вида (2.1) необходимо, чтобы

$$\gamma = 2\alpha n, \ \beta = 1 + 2\alpha n \qquad (2.2)$$

(α и n — произвольные числа)

После подстановки соотношений (2.1) в исходные уравнения (1.1), записанные в сферических координатах, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\beta-2)\Phi=\Psi'+\Psi\operatorname{ctg}\theta$$

$$m\varphi''+[m'+m\operatorname{ctg}\theta-\Psi]\varphi'+[\alpha\Phi+{}^4/_3(\alpha+1)(1+\alpha+2\alpha n)m-4(\alpha+1)m]\varphi+$$
$$+[{}^2/_3\ (1+\alpha+2\alpha n)-\alpha-3]m\psi'+[{}^2/_3(1+\alpha+2\alpha n)m\operatorname{ctg}\theta-(\alpha+1)m'-(\alpha+$$
$$+3m)\operatorname{ctg}\theta]\,\Psi+(1+\alpha+2\alpha n)R\,(\Phi\,/\,\varphi)\tau=0$$

$${}^4/_3m\psi''+[{}^4/_3m'+{}^4/_3m\operatorname{ctg}\theta-\Psi]\psi'+[(\alpha-1)\Phi-{}^2/_3m'\operatorname{ctg}\theta-2m\operatorname{ctg}^2\theta+{}^2/_3m/\sin^{-2}\theta+$$
$$+(\alpha+1)(\alpha-2+2\alpha n)m]\,\psi+[{}^8/_3+{}^1/_3(\alpha-6\alpha n)]m\varphi'+[{}^2/_3+{}^2/_3\alpha]m'\varphi-$$
$$-R\,(\Phi\,/\,\varphi)'\tau-R\,(\Phi\,/\,\varphi)\tau'=0 \tag{2.3}$$

$$I\varkappa\tau''+I\ [\varkappa'+\varkappa\operatorname{ctg}\theta-c_v\Psi]\tau'+I[4\alpha^2(1+n)\varkappa-2\alpha\varkappa+(\Phi\,/\,\varphi)'\psi R\,/\,I+2\alpha c_p\,\Phi-$$
$$-(1+\alpha+2\alpha n)\Phi R\,/\,I]\tau+m(\varphi')^2+{}^4/_3m(\psi')^2-2(\alpha+1)m\psi\varphi'+{}^4/_3(\alpha+1-\operatorname{ctg}\theta)\times$$
$$\times m\varphi\psi'+{}^4/_3(\alpha+1)^2m\varphi^2+[(\alpha+1)^2+{}^4/_3\operatorname{ctg}^2\theta]m\psi^2+{}^4/_3(\alpha-1)\ m\varphi\psi\operatorname{ctg}\theta=0$$

Здесь и в дальнейшем штрих означает дифференцирование по θ.

К уравнениям (2.3) необходимо добавить еще одно соотношение, непосредственно вытекающее из (2.1)

$$\Phi\,/\,\varphi=\Psi/\psi \tag{2.4}$$

Полученная система уравнений (2.3), (2.4) вместе с необходимыми граничными условиями образует замкнутую систему для нахождения неизвестных функций φ, ψ, τ, Φ, Ψ. Найденное двухпараметрическое семейство точных решений будем интерпретировать как решение задачи о течении струй. При этом будем различать три случая струйных течений: неограниченная струя, полуограниченная струя и ограниченная струя. В первом случае областью решения будет область $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, во втором — область $\theta_w\leqslant\theta\leqslant\pi$, в третьем — область — $\theta_w\leqslant\theta\leqslant\theta_w$, где θ_w — полуугол раствора кругового конуса. Граничные условия в случае затопленной струи могут быть записаны, например, в следующем виде:

$$\theta=0,\qquad \psi=\varphi'=\Phi'=\tau'=0 \tag{2.5}$$
$$\theta=\pi,\qquad \psi=\varphi=0,\qquad \tau=\tau^*$$

где τ^* — заданная статическая температура окружающего газа. При численной реализации решения (2.1), (2.3) — (2.5) можно дополнительно задать значения $\tau\,(0)$, $\varphi\,(0)$, $\Phi\,(0)$ и подбирать их, исходя из требования выполнения условий (2.5) при $\theta=\pi$. Имеющаяся в уравнениях (2.3), (2.4) особенность при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ может быть преодолена, если представить искомые функции в виде рядов по θ

$$\begin{aligned}
&\psi=A_1\theta+{}^1/_6A_3\theta^3+\ldots, &&\Psi=C_1\theta+{}^1/_6C_3\theta^3+\ldots\\
&\varphi=\varphi\,(0)+{}^1/_2B_2\theta^2+\ldots, &&\Phi=\Phi\,(0)+{}^1/_2D_2\theta^2+\ldots\\
&\tau=\tau\,(0)+{}^1/_2E_2\theta^2+\ldots, &&m=m\,(0)+{}^1/_2M_2\theta^2+\ldots\\
&k=k\,(0)+{}^1/_2K_2\theta^2+\ldots
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Тогда соотношения

$$C_1=(\beta-2)\,/\,2\Phi\,(0),\qquad A_1=(\beta-2)\,/\,2\varphi\,(0)$$

вместе с (2.6) позволяют отойти от особой точки $\theta=0$ с точностью до $O(\theta^2)$ и продолжить счет. Аналогичный анализ показывает, что граничные условия (2.5) при $\theta=\pi$ могут быть с той же погрешностью снесены на θ, близкое к π.

Примером численной реализации частного случая найденного класса решений служат результаты Вильямса [5]. Решение Вильямса может быть получено, если в решении (2.3), (2.4) выбрать α и n равными $\alpha=1$, $n={}^1/_2$; тогда $\beta=2$, и единственным решением, удовлетворяющим условиям на оси сопла и его стенках, оказывается решение типа источника, когда $\Psi=\psi\equiv0$.

Если положить $\alpha=1$, $n=0$, $m=\text{const}$, $\Phi=\varphi$, тогда решение (2.1), (2.3) — (2.5) совпадает с решением В. И. Яцеева [3].

3. Рассмотрим теперь плоские течения. Воспользовавшись соотношениями (2.1), подставим их в исходные уравнения Навье—Стокса (1.1), записанные в цилиндрических координатах (r, θ, z), где $v_z \equiv 0$, $\partial(\ldots) / \partial z \equiv 0$. В результате получаем соотношения (2.2) и следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\beta - 1)\Phi = \Psi'$$

$$\begin{gathered}
m\varphi'' + [m' - \Psi]\varphi' + [\alpha\Phi + {}^2/_3(2\alpha + 1)(1 + \alpha + 2\alpha n)m - 2(\alpha + 1)m]\varphi + \\
+ [{}^2/_3(1 + \alpha + 2\alpha n) - (\alpha + 3)]m\psi' + [\Psi - (\alpha + 1)m']\,\psi + (1 + \alpha + 2\alpha n)R(\Phi / \varphi)\tau = 0 \\
{}^4/_3 m\psi'' + [{}^4/_3 m' - \Psi]\psi' + [(\alpha - 1)\,\Phi + (\alpha + 1)(\alpha - 1 + 2\alpha n)m]\psi + [{}^7/_3 - {}^1/_3 \times \\
\times (1 + 6n)\alpha]m\varphi' + {}^2/_3\,[2m' + \alpha m]\varphi - R\,(\Phi/\varphi)'\tau - R\,(\Phi/\varphi)\tau' = 0 \qquad (3.1) \\
I\varkappa\tau'' + I\,[\varkappa' - c_v\Psi]\tau' + I[4\alpha^2(1 + n)\varkappa + 2\alpha\Phi c_p - (1 + \alpha + 2\alpha n)\Phi R / I + \\
+ (\Phi / \varphi)'\psi R / I]\tau + m(\varphi')^2 - 2(\alpha + 1)m'\psi\varphi' + {}^4/_3\,(\alpha + 2)m\varphi\psi + \\
+ {}^4/_3\,(\alpha^2 + \alpha + 1)\,m\varphi^2 + (\alpha + 1)^2 m\psi^2 = 0 \\
\Phi / \varphi = \Psi / \psi
\end{gathered}$$

Решение (2.1), (3.1) вместе с необходимыми граничными условиями можно рассматривать как точное решение задачи о плоской струе (затопленной, полуограниченной или ограниченной). Отметим, что в несжимаемой жидкости решений подобного типа не существует. Исключением будет решение Гамеля и его обобщения, которое описывает течение типа источника или стока и может быть получено из решения (2.1), (3.1), если положить

$$\alpha = 0, \qquad n = 0, \qquad m = \mathrm{const}, \quad \Phi = \varphi$$

Численная реализация решения (2.1), (3.1) по существу совпадает с численной реализацией решения (2.1), (2.3), (2.4) во всех упомянутых выше трех случаях течения струй. Примером такой реализации служат расчеты А. П. Быркина [6], выполненные для частного случая, когда $\alpha = 0$, n — произвольно, $\beta = 1$. При этих значениях параметров решение задачи об ограниченной струе будет решением типа источника, когда $\Psi = \psi \equiv 0$.

В заключение укажем на очевидную связь параметров α и β (или α и n) с интегральными характеристиками струи. Условие конечности импульса струи в осесимметричном случае имеет вид $\alpha + \beta = 2$, в плоском случае — вид $\alpha + \beta = 1$. Условие конечности расхода массы в осесимметричном случае запишется в виде $\beta = 2$, в плоском случае в виде $\beta = 1$. Легко видеть, что последние условия выполняются лишь в течениях типа источника.

Подход, изложенный в работе [4], позволяет в принципе обобщить найденный в предлагаемой работе класс точных решений на случай течения вязкого сжимаемого электропроводящего газа при наличии магнитного поля.

Поступила 12 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1944.
2. S q u i r e H. B. The round laminar jet. Quart. J. mech. appl. math., 1951, vol. 4, No. 3.
3. Я ц е е в В. И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 11.
4. C h i n g-S h e n g W u. A class of exact solutions of the Magnetohydrodynamic Navier-Stokes equations. Quart. J. mech. appl. math., 1961, vol. 14, pt. 1.
5. W i l l i a m s J. C. III. Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump. AIAA journal, 1967, vol. 5, No. 12.
6. Б ы р к и н А. П. Об одном точном решении уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.