О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА

Н. Г. Кикина, Д. Г. Санников

(Москва)

Задача о неустойчивости плоского тангенциального разрыва, рассмотренная ранее в работах [1,2], решается в связи с задачей об отражении от поверхности разрыва плоских монохроматических волн. Для двух одинаковых сред получены и проанализированы зависимости декремента нарастания волн возмущения от числа Маха и от угла между направлением волны возмущения и скоростью потока.

Коэффициент отражения плоских монохроматических волн от поверхности тангенциального разрыва, т. е. отношение перпендикулярной к поверхности компоненты плотности потока энергии в отраженной волне к такому же потоку в падающей волне, имеет вид

$$R = \left| \frac{1-Z}{1+Z} \right|^2, \qquad Z = \frac{\rho c^2}{\rho' c'^2} \frac{\sin 2\theta'}{\sin 2\theta} \tag{1}$$

Здесь штрихованные величины относятся к движущейся со скоростью v среде, а нештрихованные — к покоящейся среде. Угол преломления θ' (или θ) связан с углом падения θ (или θ') соотношением

$$\sin\theta' = \frac{c'}{c} \frac{\sin\theta}{|1-(u/c)\sin\theta|}, \quad u = v\cos\varphi \tag{2}$$

Здесь φ — угол между вектором скорости $\mathbf{v}$ и проекцией $k_{\parallel}$ волнового вектора $\mathbf{k}$ на плоскость тангенциального разрыва. Выражение (1) было получено впервые правильно, по-видимому, в работе [3].

При полном отражении, когда $R = 1$, величина Z (1) и нормальная к поверхности компонента $k_{\perp}'$ (или $k_{\perp}$) волнового вектора $\mathbf{k}'$ (или $\mathbf{k}$) чисто мнимы. Эти случаи исследовались в литературе неоднократно (см., например, [3]).

Рассмотрим более подробно представляющие интерес случаи отсутствия отражения. Из условия $R = 0$ при помощи соотношений (1) и (2) получим алгебраическое уравнение шестого порядка относительно $\sin\theta$

$$\frac{(\rho/\rho')^2}{[1-(u/c)\sin\theta]^4} - 1 = \frac{\rho c^2}{\rho' c'^2} \frac{1}{\sin^2\theta} \left\{ \frac{\rho/\rho'}{[1-(u/c)\sin\theta]^2} - \frac{\rho' c'^2}{\rho c^2} \right\} \tag{3}$$

Это уравнение при помощи соотношения

$$\sin\theta = k_{\parallel}/k = ck_{\parallel}/\omega \tag{4}$$

можно преобразовать к виду, совпадающему с видом уравнения (18) статьи [2], исходного для определения неустойчивых колебаний поверхности тангенциального разрыва.

Уравнение (3) имеет в общем случае шесть решений. Для того чтобы в них разобраться, естественно попытаться найти аналитические решения. Это можно сделать, если предположить, что

$$\rho c^2 = \rho' c'^2 \tag{5}$$

Равенство (5) справедливо, в частности, для идеальных газов с одинаковым отношением теплоемкостей $\gamma = C_p/C_V$. При условии (5) уравнение (3), как нетрудно видеть, распадается на два уравнения

$$\frac{c'^2/c^2}{[1-(u/c)\sin\theta]^2} - 1 = 0, \qquad \frac{c'^2/c^2}{[1-(u/c)\sin\theta]^2} - \frac{1}{\sin^2\theta} + 1 = 0 \tag{6}$$

соответственно второй и четвертой степеней относительно $\sin\theta$.

Исследуем сначала решения

$$\sin\theta = (c \pm c')/u \tag{7}$$

первого уравнения (6). Эти решения, как показывает анализ, имеют физический смысл, т. е. волны ограничены на бесконечности лишь для $u \geqslant u_{1,2} = |c \pm c'|$.

Подставив решения (7) в закон преломления (2), найдем $\sin\theta' = \sin\theta$. Следовательно, решения (7) соответствуют волнам, которые без отражения ($R = 0$) и без преломления ($\theta' = \theta$) проходят через тангенциальный разрыв из одной среды в другую. Для двух одинаковых сред ($\rho' = \rho$, $c' = c$) есть только одна такая волна при $u \geqslant u_1 = 2c$, а другая вырождается ($\omega \to \infty$).

Особый случай представляют волны, нормально падающие на поверхность тангенциального разрыва

$$Z = \frac{\rho c}{\rho' c'}, \qquad R = \left(\frac{\rho c - \rho' c'}{\rho c + \rho' c'}\right)^2$$

Если среды одинаковые, то $R = 0$ при любых u.

Исследуем теперь решения второго уравнения (6). Они сравнительно просто выглядят лишь для одинаковых сред

$$2/\sin\theta = u/c \pm \sqrt{(u/c)^2 + 4 + 4\sqrt{(u/c)^2 + 1}} \tag{8}$$

$$2/\sin\theta = u/c \pm \sqrt{(u/c)^2 + 4 - 4\sqrt{(u/c)^2 + 1}} \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что решения (8) действительны при любых u, решения (9) действительны лишь при $u \geqslant u_0 = 2\sqrt{2}c$. В обоих случаях $|\sin\theta| \leqslant 1$. Действительные решения соответствуют волнам, которые без отражения ($R = 0$), но с преломлением ($\theta' \neq \theta$) проходят через тангенциальный разрыв из одной среды в другую.

При $u < u_0$ решения (9) для $\sin\theta$ комплексны. Из соотношения (4) следует тогда, что при действительном $k_{\parallel}$ комплексны ω. Следовательно, при $u < u_0$ решения (9) соответствуют волнам, одна из которых нарастает во времени, а другая (частота ее комплексно-сопряженная первой) затухает. Существование первой волны определяет неустойчивость тангенциального разрыва. Компоненты волнового вектора $k_{\perp}'$ и $k_{\perp}$ этой волны также комплексны (причем $k_{\perp}' = k_{\perp}^*$). Следовательно, эти волны будут обобщенно поверхностными (термин заимствован из теории волн Рэлея в твердом теле).

Рассмотрим теперь, при каких условиях неустойчивость будет наибольшей. Из условия $d\,\mathrm{Im}\,\omega / du = 0$ нетрудно определить то $u = u_m$, при котором декремент нарастания волн возмущения максимален. Используя решение (9), найдем $u_m = \sqrt{3}c$. При этом $\mathrm{Im}\,\omega = ck_{\parallel} / 2$. Таким образом, максимальный декремент нарастания волн обратно пропорционален длине волны $\lambda_{\parallel}$.

Учтем теперь, что $u = v\cos\varphi$ согласно (2). Тогда при заданной скорости $v < u_m$ максимально неустойчивой будет волна с $\varphi = 0$, т. е. волна с $k_{\parallel}$, направленным вдоль **v**. Если $v > u_m$, то максимально неустойчивой будет волна с $\varphi = \varphi_m = \arccos \cdot (u_m / v)$, причем для любых $v > u_m$ величина максимальной неустойчивости будет одинакова. При $v > u_0$ появляются углы φ, для которых волна возмущения становится устойчивой [2]. Это углы, удовлетворяющие неравенству $0 < \varphi < \varphi_0$, где $\varphi_0 = \arccos(u_0/v)$. С ростом скорости потока φ_0 возрастает. Анализ более общего случая различных сред без предположения (5) существенно усложняется, однако качественно отмеченные закономерности справедливы и в этом случае, изменятся лишь численные значения, в частности, u_0, u_m, φ_0, φ_m.

Поступила 13 VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1944, т. 44, № 4, стр. 151—153.
2. С ы р о в а т с к и й С. И. Неустойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде. ЖЭТФ, 1954, т. 27, вып. 1, стр. 121—123.
3. M i l e s J. W. On the reflection of sound at an interface of relative motion. J. Acust. Soc. Amer., 1957, vol. 29, No. 2, pp. 226—228.