ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА

В. Н. Бережной, Ю. С. Колесов

(Воронеж)

Методами теории конусов устанавливается одно достаточное условие устойчивости решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n(t)\,x = 0 \tag{1}$$

где $p_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n;\ t_0 \leqslant t < \infty)$ — непрерывные функции. Укажем один признак устойчивости решений уравнения (1) в терминах его характеристического многочлена

$$P(t, \lambda) = \lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + p_n(t) \tag{2}$$

Воспользуемся некоторыми идеями теории конусов [1,2].

Уравнение (1) запишем в виде уравнения первого порядка в n-мерном евклидовом пространстве R^n

$$\frac{du}{dt} = Q(t)\,u, \qquad u = \left(x,\ \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) \tag{3}$$

$$Q(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_n(t) & -p_{n-1}(t) & -p_{n-2}(t) & \ldots & -p_1(t) \end{Vmatrix}$$

Фундаментальную матрицу этого уравнения обозначим $U(t, s)$ $(U(s, s) = I)$.

Ниже важную роль будет играть конус K_0, который определяется следующим образом. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ — некоторые постоянные числа. Рассмотрим многочлены

$$Q_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_{k-1}) = \lambda^{k-1} + a_{k,k-1}\lambda^{k-2} + \ldots + a_{k1} \quad (k = 2, \ldots, n) \tag{4}$$

Из коэффициентов многочлена (4) составим матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

Конус K_0 определим следующим образом:

$$K_0 = \{u : Au^+ \geqslant 0\} \tag{5}$$

Неравенство $Au^+ \geqslant 0$ означает, что вектор Au принадлежит конусу K_+ векторов с неотрицательными координатами. Полуупорядоченность, порождаемую конусом K_0, будем обозначать $^\circ\!\geqslant$ или $\leqslant^\circ$. Введем обозначения

$$\Delta^0(t, \lambda_1) = P(t, \lambda_1), \qquad \Delta^1(t, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{P(t, \lambda_1) - P(t, \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \ldots$$

$$\Delta^{n-2}(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = \frac{\Delta^{n-3}(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}) - \Delta^{n-3}(t, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})}{\lambda_1 - \lambda_{n-1}}$$

Если при этом некоторые из чисел λ_i равны между собой, то вышеприведенные формулы надо понимать в предельном смысле, т. е. надо мало возмутить числа λ_i и затем перейти к пределу.

Лемма. Пусть существуют такие постоянные $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, что

$$\Delta^k(t, \lambda_1, \ldots \lambda_{k+1}) \leqslant 0 \qquad (k = 0, \ldots, n-2;\ t_0 \leqslant t < \infty) \tag{6}$$

Тогда оператор $U(t, s)$ $(t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty)$ оставляет инвариантным конус K_0, определенный формулой (5).

Доказательство. При помощи замены

$$v = Au \tag{7}$$

уравнение (3) преобразуется к виду

$$\frac{dv}{dt} = AQ(t)A^{-1}v \tag{8}$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$AQ(t)A^{-1} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\Delta^0(t, \lambda_1) & -\Delta^1(t, \lambda_1, \lambda_2) & -\Delta^2(t, \lambda_1, \lambda_2) & \dots & -p_1(t) - \lambda_1 - \dots - \lambda_{n-1} \end{Vmatrix}$$

Отсюда и из неравенств (6) следует, что фундаментальная матрица $V(t, s)$ $(t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty)$ уравнения (8) преобразует конус K_+ в себя. Далее преобразование (7) переводит конус K_0 в конус K_+. Поэтому матрица $U(t, s)$ $(t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty)$ преобразует конус K_0 в себя. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть в условиях леммы существует такая постоянная λ_0, что

$$\lambda_0 > \max \lambda_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1) \tag{9}$$

$$P(t, \lambda_0) \geqslant 0 \qquad (t_0 \leqslant t < \infty) \tag{10}$$

Тогда справедлива оценка

$$|U(t, s)| \leqslant Me^{\lambda_0(t-s)} \qquad (t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty) \tag{11}$$

где M — некоторое число.

Доказательство. Положим $u_0 = (1, \lambda_0, \dots, \lambda_0^{n-1})$. Легко видеть, что $Au_0 = (1, Q_2(\lambda_0), \dots, Q_n(\lambda_0))$, где $Q_k(\lambda)$ — многочлены (4). Отсюда и из неравенства (9) следует, что вектор u_0 будет внутренним элементом конуса K_0. Поэтому в пространстве R^n можно ввести эквивалентную норму (так называемую u_0-норму [2])

$$|u|_{u0} = \min \alpha \qquad (-\alpha u_0 \leqslant {}^0 u \leqslant {}^0 \alpha u_0)$$

Рассмотрим функцию $u_0(t) = e^{\lambda_0(t-s)}$. Из неравенства (10) вытекает, что

$$\frac{du_0(t)^0}{dt} \geqslant Q(t)\, u_0(t) \qquad (t \geqslant s \geqslant t_0) \tag{12}$$

Пусть теперь $-u_0 \leqslant {}^0 u \leqslant {}^0 u_0$. Тогда из неравенства (12) следует, что

$$-e^{\lambda_0(t-s)}u_0 \leqslant {}^0 U(t, s)\, u \leqslant {}^0 e^{\lambda_0(t-s)}u_0 \qquad (t \geqslant s \geqslant t_0)$$

Поэтому

$$|U(t, s)|_{u_0} \leqslant e^{\lambda_0(t-s)} \qquad (t \geqslant s \geqslant t_0) \tag{13}$$

Неравенство (13) и доказывает неравенство (11). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\lambda_0 < 0$ при условиях теоремы 1. Тогда решения уравнения (1) экспоненциально устойчивы.

Теорема 2. Пусть при условиях теоремы 1 вместо неравенства (10) имеем

$$P(t, \lambda_0) \leqslant 0 \qquad (t_0 \leqslant t < \infty, \lambda_0 > 0)$$

Тогда нулевое решение уравнения (1) неустойчиво.

Доказательство теоремы 2, близкое к доказательству теоремы 1, опускается.

Поступила 17 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. К р е й н М. Г., Р у т м а н М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Усп. матем. наук, 1948, т. 3, № 1.
2. К р а с н о с е л ь с к и й М. А. Положительные решения операторных уравнений. М., Физматгиз, 1962.