Это уравнение сводится к квадратуре

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{dy}{\pm\sqrt{y^4 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3}} = \frac{(t - t_0)\sqrt{K^2 + 1}}{r^2}, \qquad b_1 = -\frac{2gr^3}{K^2 + 1}$$

$$b_2 = \frac{\lambda r^6}{K^2 + 1}, \qquad b_3 = \frac{r^4}{K^2 + 1}\left[W_{x0}{}^2 r^2 - (K^2 + 1) V_0{}^4 + 2grV_0{}^2 - \lambda V_0 r^3\right] \tag{3.8}$$

Вид решения уравнения (3.8) зависит от корней уравнения

$$y^4 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0$$

Однако во всех случаях эти решения выражаются через эллиптические интегралы первого рода. После обращения эллиптического интеграла находится функция $\varphi(t)$, которая с учетом двух членов разложения представляет собой полином третьей степени.

Из граничных условий (3.2), (3.3) определяются параметры $\lambda$ и $W_{x0}$. Если требуется получить управление простейшей математической структуры, то можно принять

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t \tag{3.9}$$

Тогда с учетом (2.2) и (2.3) при $t_0 = 0$ получается

$$\varphi(t) = \alpha_0 t + {}^1\!/_2\,\alpha_1 t^2 + \alpha_2 \quad (\alpha_2 = V_{x0} r_0)$$

$$\varphi_1(t) = {}^1\!/_2\,\alpha_0 t^2 + {}^1\!/_6\,\alpha_1 t^3 + \alpha_2 t \tag{3.10}$$

Параметры управления $\alpha_0$ и $\alpha_1$ находятся из уравнений (3.10) при $t = t_k$ с учетом граничных условий (3.2) и (3.3). После нахождения коэффициентов $\alpha_0$ и $\alpha_1$ законы управления (1.3), (2.1) и (2.5) считаются найденными, если модуль управляющего ускорения $W$ удовлетворяет неравенству

$$W_{\min}(t) \leqslant W(t) \leqslant W_{\max}(t)$$

Если это неравенство не удовлетворяется, то при заданных начальных условиях изменяются конечные условия, т. е. район и время сближения, и, наоборот, при фиксированных конечных условиях изменяются начальные.

В заключение отмечается, что закон управления (3.9) пригоден для перехвата цели на любых орбитах: круговой, эллиптической, параболической и гиперболической.

Поступила 24 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Маматказин Д. А. О некоторых законах управления орбитой космического летательного аппарата. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.

---

# КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**М. Б. Невельсон**

(Москва)

Рассматривается управляемая система, описываемая дифференциальным уравнением $n$-го порядка со случайными коэффициентами. Получены необходимые и достаточные условия существования линейного управления, стабилизирующего такую систему в среднеквадратичном и доставляющего минимум квадратичному критерию качества. Задача о стабилизации стохастической системы, в которой помеха зависит от величины управляющего воздействия, изучалась также в [1].

1. Пусть дана линейная стохастическая система, описываемая дифференциальным уравнением $n$-го порядка

$$y^{(n)} + [a_1 + \xi_1{}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)]y^{(n-1)} + \ldots + [a_n + \xi_n{}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)]y = [b + \sigma\eta^{\boldsymbol{\cdot}}(t)]u \tag{1.1}$$

Здесь

$$a_i = \text{const}, \qquad b_i = \text{const} \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$u$ — скалярное управляющее воздействие, $\xi_i^\cdot(t)$ — гауссовские белые шумы с нулевым математическим ожиданием, вообще говоря, коррелированные между собой, так что

$$M\xi_i^\cdot(t)\,\xi_j^\cdot(s) = 2a_{ij}\delta(t-s)$$

а $\eta^\cdot(t)$ — процесс белого шума, не зависящий от совокупности $\xi_1^\cdot(t),\ldots,\xi_n^\cdot(t)$, причем

$$M\eta^\cdot(t) = 0, \qquad M\eta^\cdot(t)\eta^\cdot(s) = 2\delta(t-s)$$

Положим

$$y = X_1, \quad y' = X_2,\ldots,y^{(n-1)} = X_n$$

Тогда уравнение (1.1) можно понимать как систему стохастических дифференциальных уравнений Ито (см., например, [2], стр. 247)

$$dX_1 = X_2dt, \quad dX_2 = X_3dt,\ldots,dX_{n-1} = X_ndt \tag{1.2}$$

$$dX_n = \left(-\sum_{i=1}^n a_iX_{n-i+1} + bu\right)dt - \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}X_{n-i+1}\,d\eta_j(t) + \sigma u\,d\eta(t)$$

где $\eta_1, \eta_2,\ldots,\eta_n$, $\eta$ — независимые в совокупности гауссовские марковские процессы, для которых

$$M\eta_i^\cdot(t) = 0, \qquad M\eta_i^2(t) = 2t$$

а матрица $\|\alpha_{ij}\|$ определяется из условия

$$\|\alpha_{ij}\|\,\|\alpha_{ji}\| = \|a_{ij}\|$$

Обозначим через $X_u^x(t)$ решение системы (1.2) при начальном условии $X_u^x(0) = x$.

Производящий оператор процесса $X_u^x(t)$ имеет вид

$$L_u = \sum_{i=1}^n x_{i+1}\frac{\partial}{\partial x_i} + \left(bu - \sum_{i=1}^n a_ix_{n-i+1}\right)\frac{\partial}{\partial x_n} + \left(\sum_{i,j=1}^n a_{n-i+1\,n-j+1}x_ix_j + \sigma^2u^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Пусть $P$ — определенно положительная матрица. Задача состоит в том, чтобы найти закон регулирования $u = u_0[x]$, при котором функционал

$$J_x^P(u) = M\int_0^\infty [(PX_u^x(t),\ X_u^x(t)) + u^2(t)]\,dt \tag{1.3}$$

принимает минимальное значение. Очевидно, управление $u = u[x]$, при котором $J_x^P(u)$ имеет смысл, стабилизирует систему (1.2) до асимптотически устойчивой в среднеквадратичном.

Для решения поставленной задачи следует найти оптимальную функцию Ляпунова $V_0(x) = (Cx,\ x)$, которая удовлетворяет уравнению Ляпунова — Беллмана [3,4]

$$L_{u_0}V_0 + (Px,\ x) + u_0^2 = \min_u\,[L_uV_0 + (Px,\ x) + u^2] = 0 \tag{1.4}$$

Из (1.4) получим, как обычно, следующее уравнение для матрицы $C = \|c_{ij}\|$

$$CB + B^*C - \frac{C\mathbf{b}\mathbf{b}^*C}{1+2\sigma^2c_{nn}} + 2c_{nn}A + P = 0 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{b} = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{matrix}\right\|, \quad B = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{matrix}\right\|, \quad A = \|a_{n-i+1\,n-j+1}\|$$

Здесь индекс * означает операцию транспонирования. При этом, если уравнение (1.4) имеет определенно положительное решение $V_0(x)$, то оптимальное управление имеет вид

$$u_0 = -\frac{b}{2(1 + 2\sigma^2 \partial^2 V_0/\partial x_n^2)} \frac{\partial V_0}{\partial x_n}$$

Для решения задачи об оптимальной стабилизации системы (1.2) достаточно, чтобы существовала определенно положительная матрица $C$, удовлетворяющая уравнению (1.5). При этом оптимальное управление $u = u_0[x]$ может быть выбрано в виде линейной функции $x$. Далее, используя метод последовательных приближений [5,6], нетрудно доказать следующее утверждение.

*Лемма* 1.1. Если для системы (1.2) существует линейное управление $u = u[x]$, при котором $J_x^{P^*}(u) < \infty$ для некоторой определенно положительной матрицы $P^*$, то для любой определенно положительной матрицы $P$ существует единственная определенно положительная матрица $C$, являющаяся решением уравнения (1.5).

2. Пусть сначала $\sigma \neq 0$. Пусть, кроме того, матрица $A$ определенно положительна. Уравнение (1.5) при $P = A/\sigma^2$ имеет вид

$$CB + B^*C - \frac{C\mathbf{bb}^*C}{1 + 2\sigma^2 c_{nn}} + \left(2c_{nn} + \frac{1}{\sigma^2}\right)A = 0 \tag{2.1}$$

Это уравнение, очевидно, можно переписать в виде

$$DB + B^*D - D\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1^*D^* + A = 0 \tag{2.2}$$

$$D = \frac{C}{\sigma^{-2} + 2c_{nn}}, \qquad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}\sigma^{-1} \tag{2.3}$$

В силу полной управляемости детерминированной системы

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b_1 u, \quad b_1 = b\sigma^{-1} \tag{2.4}$$

уравнение (2.2) имеет единственное определенно положительное решение $D_0 = \| d_{ij}^{(0)} \|$.

Отсюда и из (2.3) вытекает, что матрица

$$C_0 = \| c_{ij}^{(0)} \| = \frac{D_0}{\sigma^2 (1 - 2d_{nn}^{(0)})}$$

удовлетворяет уравнению (2.1).

Пусть выполнено условие $d_{nn}^{(0)} < 1/2$. Тогда матрица $C_0$ определенно положительна и, значит, существует линейное управление

$$u_0 = -\frac{b}{2(1 + 2\sigma^2 c_{nn})} \frac{\partial V_0(x)}{\partial x_n}, \quad V_0(x) = (C_0 x, x)$$

доставляющее минимум функционалу (1.3).

Обратно, пусть для системы (1.2) существует линейное управление $u = u[x]$, для которого $J_x^P(u) < \infty$. Тогда по лемме 1.1 уравнение (1.5) имеет определенно положительное решение $C_0$. Очевидно также, что

$$D_0 = \frac{C_0}{\sigma^{-2} + 2c_{nn}^{(0)}}, \qquad d_{nn}^{(0)} = \frac{c_{nn}^{(0)}}{\sigma^{-2} + 2c_{nn}^{(0)}} < 1/2$$

Итак, в случае определенно положительной матрицы $A$ для существования оптимального управления необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $d_{nn}^{(0)} < 1/2$, в котором $d_{nn}^{(0)}$ — элемент матрицы $D_0 = \| d_{ij}^{(0)} \|$, являющейся единственным определенно положительным решением уравнения (2.2).

Покажем теперь, как коэффициент $d_{nn}^{(0)}$ может быть выражен через параметры стохастической системы (1.2).

Для этого обозначим через $u_0 = \nu_1 y + \ldots + \nu_n y^{(n-1)}$ управление, минимизирующее функционал

$$\int_0^\infty \left[ \sum_{i,\, j=1}^n a_{n-i+1\, n-j+1}\, y^{(i-1)} y^{(j-1)} + u^2 \right] dt$$

на решениях системы (2.4) при $u = u_0$. Нетрудно видеть, что

$$d_{nn}^{(0)} = -\nu_n \,/\, b_1 \tag{2.5}$$

Рассмотрим, далее, полином

$$H(\lambda) = D(\lambda) D(-\lambda) + b_1^2 \sum_{i,\, j=1}^n a_{n-i+1\, n-j+1} (-1)^{i+1} \lambda^{i+j-2} \tag{2.6}$$

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

Обозначим через $\alpha$ сумму корней уравнения $H(\lambda) = 0$, имеющих положительные действительные части. Известно, что в случае определенно положительной матрицы $A$ таких корней будет ровно $n$ (см., например, [7]). Из результатов работ [7,8] легко вытекает, что $\nu_n = (a_1 - \alpha) b_1^{-1}$ и, значит, согласно (2.5), $d_{nn}^{(0)} = (\alpha - a_1) b_1^{-2}$.

Таким образом, в случае определенно положительной матрицы $A$ оптимальное управление для задачи (1.2), (1.3) существует тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$2\sigma^2 (\alpha - a_1) < b^2 \tag{2.7}$$

Пусть теперь матрица $A$ лишь неотрицательно определена, а $\sigma$ по-прежнему отлично от нуля (в этом случае уравнение $H(\lambda) = 0$ может иметь корни с нулевой действительной частью). Добавим тогда к коэффициентам $a_i$ системы (1.2) не зависимые между собой и от $\eta_i, \eta$ белые шумы с малой дисперсией $\varepsilon$. Осуществляя затем предельный переход при $\varepsilon \to 0$ (аналогично тому, как это было сделано в [9]), получим, что неравенство (2.7) является достаточным, а соотношение $2\sigma^2 (\alpha - a_1) \leqslant b^2$ — необходимым условием существования оптимального линейного управления, решающего рассматриваемую задачу.

Можно, видимо, показать, что на самом деле знак равенства в последнем соотношении следует опустить. Это легко проверяется для случаев $n = 1{,}2$.

Итак, справедлива следующая теорема.

*Теорема* 2.1. Пусть $\sigma \neq 0$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $k \leqslant n$, корни уравнения $H(\lambda) = 0$, имеющие положительные действительные части. Тогда при выполнении неравенства

$$2\sigma^2 \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i - a_1 \right) < b^2 \tag{2.8}$$

задача об оптимальной стабилизации системы (1.2) при критерии качества (1.3) имеет решение в классе линейных управлений. Если же выполнено неравенство

$$2\sigma^2 \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i - a_1 \right) > b^2$$

то такого решения не существует. В случае же, когда матрица $A$ определенно положительна ($k = n$), неравенство (2.8) будет не только достаточным, но и необходимым для существования линейного оптимального управления, стабилизирующего систему уравнений (1.2).

Пусть теперь $\sigma = 0$. Используя тот факт, что $H(\lambda) = 0$ содержит только четные степени $\lambda$, нетрудно установить соотношения: $|\lambda_i|^2 = O(\sigma^{-2})$ при $\sigma \to 0$. Следовательно, для любых параметров $a_i$, $b \neq 0$, $a_{ij}$ существует такое достаточно малое $\sigma = \sigma^*$, при котором выполнено неравенство (2.7), т. е. система (1.2) асимптотически устойчива в средне квадратичном при $\sigma = \sigma^*$. Отсюда, из теоремы 5.1 работы [10] и леммы 1.1 немедленно вытекает следующая теорема.

*Теорема* 2.2. Пусть $\sigma = 0$. Тогда для любых параметров $a_i$, $b \neq 0$, $a_{ij}$ существует линейное управление $u = u_0\ [x]$, доставляющее минимум функционалу (1.3) на решениях системы (1.2) при $u = u_0[x]$.

3. Рассмотрим, в частности, стохастическую систему

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = (b + \sigma\eta^{\cdot}(t))u$$

Для этой системы

$$H(\lambda) = D(\lambda) D(-\lambda)$$

Пусть $\mu_1,\ldots,\mu_l$ и $\nu_1,\ldots,\nu_m$, $l + m \leqslant n$ — корни полинома $D(\lambda) = 0$ с положительными и отрицательными действительными частями соответственно. Тогда, очевидно,

$$\alpha = (\mu_1 + \ldots + \mu_l - \nu_1 - \ldots - \nu_m)$$

Далее, $a_1 = -(\mu_1 + \ldots + \mu_l + \nu_1 + \ldots + \nu_m)$, поэтому из теоремы 2.1 вытекает, что условием существования оптимального управления будет неравенство

$$4\sigma^2 \sum_{i=1}^{l} \mu_i < b^2$$

Заметим в заключение, что условия существования оптимального управления для системы (1.2) первого и второго порядков имеют вид

$$\sqrt{a_1^2 + (b/\sigma)^2 a_{11}} - a_1 < {}^1\!/_2 (b/\sigma)^2 \quad \text{при } n = 1$$

$$\sqrt{a_1^2 + (b/\sigma)^2 a_{22} - 2a_2 + 2\sqrt{a_2^2 + (b/\sigma)^2 a_{11}}} - a_1 < {}^1\!/_2 (b/\sigma)^2 \text{ при } n = 2$$

Автор благодарит Р. З. Хасьминского за ряд полезных замечаний.

Поступила 7 IV 1968

## ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. О стабилизации систем, в которых помеха зависит от величины управляющего воздействия. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1965, № 2.
2. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
3. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов, IV. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 4.
4. Красовский Н. Н., Лидский Э. А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами, I. Постановка задачи, метод решения. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 9; II. Уравнения для оптимального управления. Приближенный метод решения. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 10; III. Оптимальное регулирование в линейных системах. Минимум среднеквадратичной ошибки. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 11.
5. Wonham W. M. Optimal stationary control of a linear system with state-dependent noise. SIAM J. Control., 1967, vol. 5, No. 3.
6. Wonham W. N. Lecture notes on stochastic control. Brown University, 1967.
7. Лурье А. И. Минимальный квадратичный критерий качества регулирования системы. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1963, № 4.
8. Пряхин Н. С. К вопросу об аналитическом конструировании регуляторов. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, вып. 9.
9. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости линейной системы при случайных возмущениях ее параметров. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
10. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости стохастических систем. Проблемы передачи информации, 1966, т. 2, вып. 3.