О НЕКОТОРЫХ ЗАКОНАХ УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Д. А. Маматказин

(Москва)

Рассматривается задача о движении космического летательного аппарата-перехватчика в центральном поле тяготения по пространственной траектории, которая в плоскости развертки является отображением формы, размеров и ориентации кеплеровской орбиты аппарата-цели. Выбираются законы управления, позволяющие получить решение задачи встречи в аналитическом виде. В дальнейшем активно действующий аппарат называется перехватчиком, а пассивный — целью.

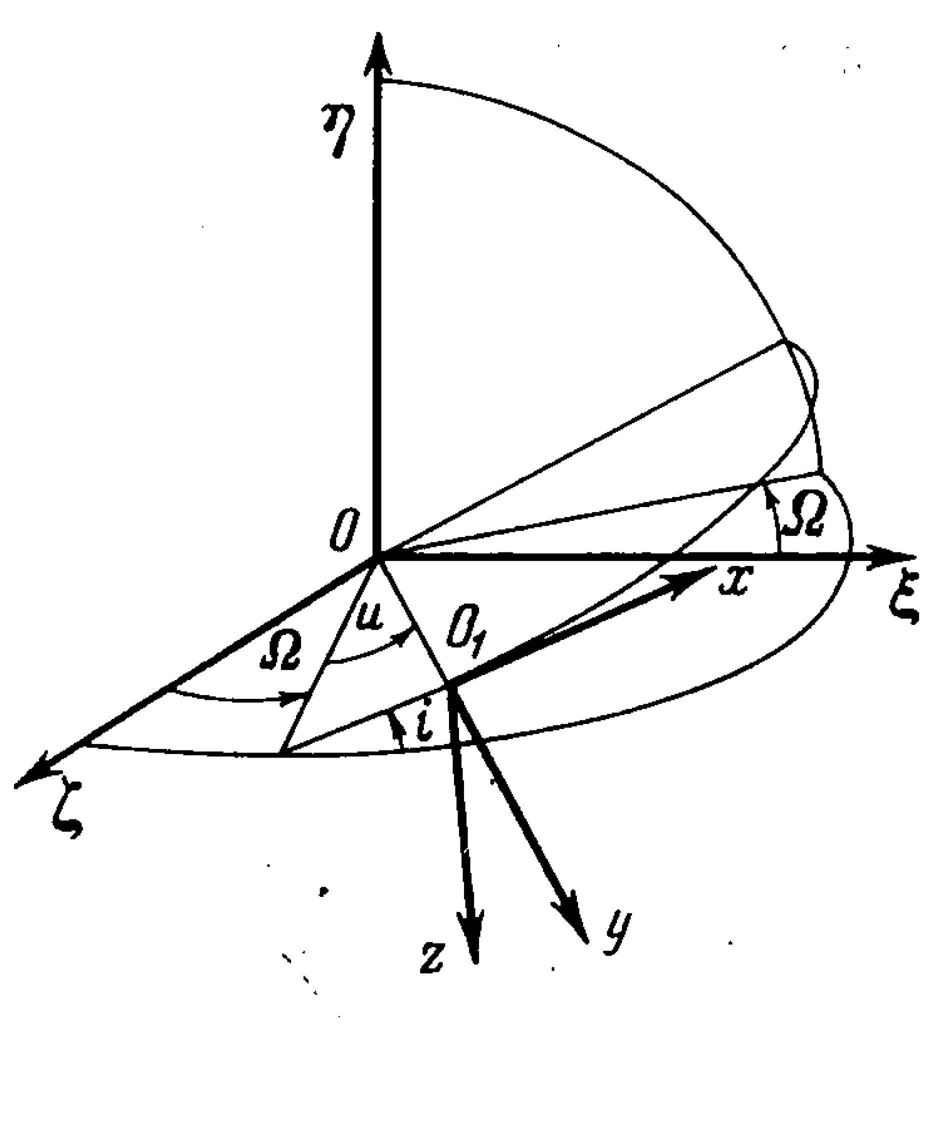
1. Движение перехватчика под действием управляющего ускорения W, приложенного к его центру масс O_1, описывается уравнениями во вращающейся правой ортогональной системе координат $Oxyz$, ось y которой совпадает с радиусом-вектором r, проведенным из центра тяготения O в точку O_1, а ось x направлена в сторону движения так, что вектор абсолютной скорости его центра масс лежит в плоскости xy. Ориентация осей $Oxyz$ относительно инерциальных координат $O\xi\eta\zeta$ определяется (фигура) долготой восходящего узла Ω, наклонением мгновенной плоскости орбиты к экватору i и углом дальности u. Уравнениями движения центра масс перехватчика будут

$$V_x^{\boldsymbol{\cdot}} = W_x + \omega_z V_y, \qquad V_y^{\boldsymbol{\cdot}} = W_y - \omega_z V_x - g \tag{1.1}$$
$$0 = W_z + \omega_y V_x, \quad \omega_z = -V_x / r, \; g = g_0 (R_0 / r)^2$$

Скорости изменения углов, определяющих ориентацию вращающихся осей относительно инерциальных, описываются дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\Omega}{dt} = \omega_y \frac{\sin u}{\sin i}, \quad \frac{di}{dt} = \omega_y \cos u, \quad \frac{du}{dt} = -\omega_z - \omega_y \sin u \operatorname{ctg} i \tag{1.2}$$

Выбор закона управления движением центра масс перехватчика подчиним условиям интегрируемости уравнений движения (1.1), (1.2), при этом выберем управление в классе функций, в котором константы управления, обеспечивающие сближение аппаратов, определяются достаточно просто.



В работе [1] было установлено, что кинематические уравнения (1.2) интегрируются независимо от законов управления движением центра масс аппарата-перехватчика в плоскости развертки, если проекция управляющего ускорения на направление, перпендикулярное к мгновенной плоскости орбиты, изменяется по закону

$$W_z = K V_x^2 / r \qquad (K = \text{const}) \tag{1.3}$$

При наличии управляющего ускорения W_z появляется движение плоскости орбиты перехватчика. Соответствующим выбором величины K в законе управления (1.3) и момента времени его включения обеспечивается совмещение плоскостей орбит перехватчика и цели. Этот закон управления движением плоскости орбиты принимается и в данной работе.

Движение перехватчика в плоскости развертки по траектории, имеющей форму и размеры орбиты цели, подчиняется уравнениям связи

$$\operatorname{tg}\theta = \pm \sqrt{ar^2 + br - 1}, \quad a = \frac{2h}{C^2}, \quad b = \frac{2g_0 R_0^2}{C^2} \tag{1.4}$$
$$r_{pk} = r_{qk} \quad \text{при } t = t_k$$

Здесь h — постоянная интеграла энергии, C — постоянная интеграла площадей аппарата-цели, а индексы p и q означают соответственно перехватчик и цель, θ — угол наклона вектора абсолютной скорости $\mathbf{V}$ к местному горизонту. Это уравнение связи получается преобразованием интегралов энергии и площадей аппарата-цели. Первые два уравнения (1.1) описывают движение перехватчика в плоскости развертки. Полярный угол в этой плоскости между начальным и конечным положением радиуса-вектора центра масс аппарата

$$J = -\int_{t_0}^{t_k} \omega_z dt \tag{1.5}$$

Зная его, можно определить потребные значения r_{p0} в начале управляемого движения, обеспечивающего выполнение второго условия (1.4), и угла θ_{p0}.

Действительно

$$V_y = V_x \operatorname{tg}\theta \qquad (V_y = r^{\cdot}) \tag{1.6}$$

и с учетом (1.4) и четвертого уравнения (1.1) получается

$$J = \int_{r_{p0}}^{r_{pk}} \frac{dr}{r\sqrt{ar^2 + br - 1}} \quad \text{при } \Delta = -4a - b^2 \neq 0 \tag{1.7}$$

На участке траектории перехватчика, где $W_z = 0$, угол J определяется из начальных условий. На участке, где $W_z \neq 0$, J определяется из формул [1]

$$J = \int_{x_0}^{x_k} \frac{dx \operatorname{sign}(K\cos u)}{\sqrt{-(1+K^2)x^2 + 2kx + K^2 - k^2}} \qquad (x = \cos i)$$

$$\cos i - K\sin u \, \sin i = k, \qquad k = \cos i_0 - K\sin u_0 \sin i_0 \tag{1.8}$$

$$\Omega_k - \Omega_0 = \int_{x_0}^{x_k} \frac{(x-k)\operatorname{sign}(K\cos u)\, dx}{(x^2-1)\sqrt{-(1+K^2)x^2 + 2kx + K^2 - k^2}}$$

Величины K и k находятся по заданным значениям Ω_0, i_0, Ω_k, i_k, u_k из уравнений (1.8), где индексы 0 и k означают соответственно начало и окончание маневра по повороту плоскости орбиты до ее совпадения с плоскостью орбиты цели.

По найденному значению постоянной интегрирования k определяется угол дальности u_0, при достижении которого начинается управляемое движение плоскости орбиты перехватчика

Таким образом, если отрезок времени начала и окончания управляемого движения в плоскости развертки больше отрезка времени начала и окончания маневра на поворот плоскости орбиты (включает его в себя), то угол J на единичной сфере разбивается на три участка: на первом и последнем — движение происходит по дугам большого круга, а на среднем — по кривой, определяемой уравнениями (1.8). Эта кривая является дугой малого круга.

2. Первое уравнение (1.1) интегрируется, если

$$W_x = f(t) / r \tag{2.1}$$

Структура $f(t)$ определяется ниже при синтезе законов управления. После интегрирования этого уравнения получается

$$V_x r = V_{x0} r_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau = \varphi(t) \tag{2.2}$$

Уравнение (1.6) с учетом (2.2) и первого уравнения (1.4) после интегрирования приводится к виду

$$\int_{r_{p0}}^{r_p} \frac{r\,dr}{\pm\sqrt{ar^2 + br - 1}} = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau = \varphi_1(t) \tag{2.3}$$

Совокупность уравнений (1.4) — (1.8) и (2.2), (2.3) полностью определяет движение перехватчика во времени. Далее находится закон управления ускорением W_y, обеспечивающий выполнение уравнения связи (1.4). После преобразования (1.6) с учетом (1.4) и (2.2) получается

$$V_y = \pm \frac{\varphi(t)}{r} \sqrt{ar^2 + br - 1} \tag{2.4}$$

Дифференцированием этого уравнения и сравнением его со вторым уравнением (1.1) находится общий вид искомого закона управления

$$W_y = \frac{f(t)}{\varphi(t)} r^{\cdot} + g\left(1 - \frac{\varphi^2(t)}{C^2}\right) \tag{2.5}$$

3. Синтез структуры законов управления (2.1), (2.5) начинается с определения условий, обеспечивающих контакт перехватчика и цели с заданным отношением их скоростей V_{pk}/V_{qk}. Преобразованием уравнений (2.2) и (2.4) получается

$$V_{pk} / V_{qk} = \varphi(t_k) / C, \quad V_{qk} = C \sqrt{ar_k^2 + br_k} / r_k \tag{3.1}$$

Здесь V_{qk} — скорость центра масс цели в точке контакта. Так как в этой точке $\theta_q = \theta_p$, то

$$V_{xp} / V_{xq} = V_{yp} / V_{yq} = \varphi(t_k) / C$$

Из уравнения (3.1) находим первое условие

$$\varphi(t_k) = C_1 \tag{3.2}$$

которому должны удовлетворять искомые законы управления. Вторым условием в соответствии с (2.3) будет равенство

$$\varphi_1(t_k) = C_2 \tag{3.3}$$

Из соотношений (3.2), (3.3) следует, что функция $f(t)$ должна зависеть, по крайней мере, от двух параметров, т. е. $f(t) = f(\alpha_0, \alpha_1, t)$.

В простейшем случае, когда целью является спутник, движущийся по круговой орбите, и управление движением плоскости орбиты перехватчика совпадает по времени с управлением в плоскости развертки, $f(t)$ может быть найдена из условия минимума функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_k} W^2 dt, \quad W^2 = W_x^2 + W_y^2 + W_z^2 \quad \text{при } G = \int_{t_0}^{t_k} \varphi(t)\, dt = C_2 \tag{3.4}$$

Дифференцированием (2.2) получается соотношение

$$\varphi^{\cdot}(t) = f(t) \tag{3.5}$$

При $r = \text{const}$ имеем $C^2 = gr^3$, и второе уравнение (3.4) с учетом (2.1), (2.5), (1.3) и (3.5) приводится к виду

$$W^2 = (\varphi^{\cdot 2} + a_1\varphi^4 + a_2\varphi^2 + a_3) / r^{\cdot 2}, \quad a_1 = (K^2 + 1)/r^4, \quad a_2 = -2g/r, \quad a_3 = g^2r^2 \tag{3.6}$$

Таким образом, уравнения (3.4) с учетом (3.6) сводятся к изопериметрической задаче вариационного исчисления, в которой искомое управление будет экстремалью интеграла

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_k} (W^2 + \lambda\varphi)\, dt = \min \qquad (\lambda = \text{const}) \tag{3.7}$$

После интегрирования уравнения Эйлера для функционала (3.7) с учетом (2.1) и (2.2) получается

$$\varphi^{\cdot 2} = a_1\varphi^4 + a_2\varphi^2 + \lambda r^2\varphi + W_{x0}^2 r^2 - (K^2 + 1)V_0^4 + 2grV_0^2 - \lambda V_0 r^3$$

Это уравнение сводится к квадратуре

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{dy}{\pm\sqrt{y^4+b_1y^2+b_2y+b_3}} = \frac{(t-t_0)\sqrt{K^2+1}}{r^2}, \qquad b_1 = -\frac{2gr^3}{K^2+1}$$

$$b_2 = \frac{\lambda r^6}{K^2+1}, \qquad b_3 = \frac{r^4}{K^2+1}\left[W_{x0}{}^2r^2-(K^2+1)V_0{}^4+2grV_0{}^2-\lambda V_0r^3\right] \tag{3.8}$$

Вид решения уравнения (3.8) зависит от корней уравнения

$$y^4+b_1y^2+b_2y+b_3=0$$

Однако во всех случаях эти решения выражаются через эллиптические интегралы первого рода. После обращения эллиптического интеграла находится функция $\varphi(t)$, которая с учетом двух членов разложения представляет собой полином третьей степени.

Из граничных условий (3.2), (3.3) определяются параметры λ и W_{x0}. Если требуется получить управление простейшей математической структуры, то можно принять

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t \tag{3.9}$$

Тогда с учетом (2.2) и (2.3) при $t_0 = 0$ получается

$$\varphi(t) = \alpha_0 t + {}^1\!/_2\alpha_1t^2 + \alpha_2 \quad (\alpha_2 = V_{x0}r_0)$$

$$\varphi_1(t) = {}^1\!/_2\alpha_0t^2 + {}^1\!/_6\alpha_1t^3 + \alpha_2 t \tag{3.10}$$

Параметры управления α_0 и α_1 находятся из уравнений (3.10) при $t = t_k$ с учетом граничных условий (3.2) и (3.3). После нахождения коэффициентов α_0 и α_1 законы управления (1.3), (2.1) и (2.5) считаются найденными, если модуль управляющего ускорения W удовлетворяет неравенству

$$W_{\min}(t) \leqslant W(t) \leqslant W_{\max}(t)$$

Если это неравенство не удовлетворяется, то при заданных начальных условиях изменяются конечные условия, т. е. район и время сближения, и, наоборот, при фиксированных конечных условиях изменяются начальные.

В заключение отмечается, что закон управления (3.9) пригоден для перехвата цели на любых орбитах: круговой, эллиптической, параболической и гиперболической.

Поступила 24 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Маматказин Д. А. О некоторых законах управления орбитой космического летательного аппарата. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. Б. Невельсон

(Москва)

Рассматривается управляемая система, описываемая дифференциальным уравнением n-го порядка со случайными коэффициентами. Получены необходимые и достаточные условия существования линейного управления, стабилизирующего такую систему в среднеквадратичном и доставляющего минимум квадратичному критерию качества. Задача о стабилизации стохастической системы, в которой помеха зависит от величины управляющего воздействия, изучалась также в [1].

1. Пусть дана линейная стохастическая система, описываемая дифференциальным уравнением n-го порядка

$$y^{(n)} + [a_1 + \xi_1{}^{\cdot}(t)]y^{(n-1)} + \ldots + [a_n + \xi_n{}^{\cdot}(t)]y = [b + \sigma\eta^{\cdot}(t)]u \tag{1.1}$$

Здесь

$$a_i = \text{const}, \qquad b_i = \text{const} \neq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$