ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. П. Маркеев

(Москва)

Исследуется устойчивость положения равновесия неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае резонанса. Получены условия неустойчивости и формальной устойчивости.

1. Предположим, что начало координат $q_i = p_i = 0$ является положением равновесия канонической системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,2) \tag{1.1}$$

Здесь H — аналитическая в окрестности точки $q_i = p_i = 0$ функция Гамильтона с периодом 2π по независимой переменной t.

Пусть линеаризированная система устойчива, и все ее мультипликаторы различны. Будем считать, что функция Гамильтона в (1.1) при помощи вещественного линейного 2π-периодического канонического преобразования [1] приведена к виду

$$H = {}^1/_2\,\lambda_1 (q_1^2 + p_1^2) + {}^1/_2\,\lambda_2 (q_2^2 + p_2^2) + \sum_{\nu=3}^{\infty} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(t)\, q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\nu_3} p_2^{\nu_4} \tag{1.2}$$

Здесь $\pm i\lambda_1$, $\pm i\lambda_2$ — характеристические показатели линеаризированной системы, ν_i — целые неотрицательные числа,

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4, \quad h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(t + 2\pi) = h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(t)$$

Предположим также, что для целых чисел k_1 и k_2, удовлетворяющих равенству $|k_1| + |k_2| = 3$ или $|k_1| + |k_2| = 4$, выполняется условие

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \not\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 1) \tag{1.3}$$

Тогда существует [2] аналитическое каноническое 2π-периодическое по t преобразование, приводящее гамильтониан (1.2) к виду

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + l_{2020} r_1^2 + l_{1111} r_1 r_2 + l_{0202} r_2^2 + O(|q|^5) \tag{1.4}$$

$$\left(|q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2}, \quad 2r_i = q_i^2 + p_i^2\right)$$

Коэффициенты $l_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ в (1.4) не зависят от t. Пусть квадратичная форма

$$l_{2020} r_1^2 + l_{1111} r_1 r_2 + l_{0202} r_2^2$$

будет знакоопределенной в квадранте $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$. Тогда положение равновесия формально устойчиво [1,3,4]. Это означает, что для системы (1.1) существует степенной ряд, возможно расходящийся

$$G = G_n(q_i, p_i, t) + G_{n+1}(q_i, p_i, t) + \ldots \tag{1.5}$$

который формально будет определенно положительным интегралом с периодом 2π по t. Другими словами, все коэффициенты степенного ряда

$$G_{q_1} H_{p_1} - G_{p_1} H_{q_1} + G_{q_2} H_{p_2} - G_{p_2} H_{q_2} + G_t \tag{1.6}$$

тождественно равны нулю и

$$G_n(q_i, p_i, t) \geqslant 0$$

причем только для $q_i = p_i = 0$

$$G_\nu(q_i, p_i, t) = 0$$

Из формальной устойчивости следует, что неустойчивость по Ляпунову не обнаруживается при учете в разложении (1.2) членов до сколь угодно большого порядка ν, а если и существуют траектории, уходящие от начала координат, то движение по ним происходит крайне медленно [3,5–8].

В предлагаемой работе рассматривается устойчивость при невыполнении условия (1.3) для $k_i \geqslant 0$. Предполагается, что условие (1.3) не выполняется для одной пары неотрицательных целых чисел k_1 и k_2, удовлетворяющих условию $k_1 + k_2 = 3$ или $k_1 + k_2 = 4$, т. е. исследуются некратные резонансы.

Таким образом, будут рассмотрены девять резонансных случаев:

$$\begin{array}{llllll}
(1) & 3\lambda_1 = m, & (2) & 3\lambda_2 = m, & (3) & \lambda_1 + 2\lambda_2 = m \\
(4) & 2\lambda_1 + \lambda_2 = m, & (5) & 4\lambda_1 = m, & (6) & 4\lambda_2 = m \\
(7) & 2(\lambda_1 + \lambda_2) = m, & (8) & \lambda_1 + 3\lambda_2 = m, & (9) & 3\lambda_1 + \lambda_2 = m
\end{array} \qquad (1.7)$$

где m — целое число.

Так как мультипликаторы предполагаются различными, то целые, полуцелые и удовлетворяющие равенству $\lambda_1 \pm \lambda_2 \equiv 0 \pmod 1$ значения λ_i не рассматриваются. Это означает, что исследуется устойчивость системы (1.1) внутри области устойчивости линеаризированной системы.

2. Исследуем сначала устойчивость в случаях (1) — (4). При помощи вещественного аналитического 2π-периодического по t преобразования (см. п. 4) в гамильтониане (1.2). можно уничтожить все члены третьей степени, кроме резонансных. В новых переменных q_i^*, p_i^* функция Гамильтона запишется в виде

$$H^* = H_2^* + H_3^* + O(|q|^4)$$

Здесь $H_2^* = {}^1/_2\lambda_1 (q_1^{*2} + p_1^{*2}) + {}^1/_2\lambda_2 (q_2^{*2} + p_2^{*2})$, а выражения H_3^* для случаев (1)—(4), определенных (1.7), соответственно будут:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad H_3^* = 2u_{0030}^*(q_1^{*3} - 3q_1^*p_1^{*2}) - 2v_{0030}^*(p_1^{*3} - 3p_1^*q_1^{*2})\\
&(2)\quad H_3^* = 2u_{0003}^*(q_2^{*3} - 3q_2^*p_2^{*2}) - 2v_{0003}^*(p_2^{*3} - 3p_2^*q_2^{*2}) \qquad (2.1)\\
&(3)\quad H_3^* = -2u_{0012}^*[q_1^*(p_2^{*2} - q_2^{*2}) + 2p_1^*q_2^*p_2^*] - 2v_{0012}^*[p_1^*(p_2^{*2} - q_2^{*2}) - 2q_1^*q_2^*p_2^*]\\
&(4)\quad H_3^* = -2u_{0021}^*[q_2^*(p_1^{*2} - q_1^{*2}) + 2p_2^*q_1^*p_1^*] - 2v_{0021}^*[p_2^*(p_1^{*2} - q_1^{*2}) - 2q_2^*q_1^*p_1^*]
\end{aligned}$$

В (2.1) введены обозначения

$$u_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^* = x_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\cos mt + y_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\sin mt, \qquad v_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^* = y_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\cos mt - x_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\sin mt$$

$$x_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\cos mt - v'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\sin mt)\,dt \qquad (2.2)$$

$$y_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\sin mt + v'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\cos mt)\,dt$$

Выражения для $u'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$, $v'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ приведены в п. 4.

Для каждого из резонансных случаев (1) — (4) имеет место теорема.

Теорема 2.1. Если $x_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^2 + y_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^2 \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво.

Приведем доказательство для случая (1). После канонического преобразования

$$q_i^* = p_i^\circ \sin(\lambda_i t - \theta) + q_i^\circ \cos(\lambda_i t - \theta)$$
$$p_i^* = p_i^\circ \cos(\lambda_i t - \theta) - q_i^\circ \sin(\lambda_i t - \theta) \qquad (i = 1, 2) \tag{2.3}$$

где

$$\sin 3\theta = \frac{y_{0030}}{\sqrt{x_{0030}^2 + y_{0030}^2}}, \qquad \cos 3\theta = \frac{x_{0030}}{\sqrt{x_{0030}^2 + y_{0030}^2}}$$

гамильтониан приводится к функции, не зависящей от t до членов третьего порядка включительно и имеющей вид

$$H^\circ = 2\sqrt{x_{0030}^2 + y_{0030}^2}\,(q_1^{\circ 3} - 3q_1^\circ p_1^{\circ 2}) + O(|q|^4)$$

Вводя полярные координаты

$$q_i^\circ = \sqrt{2r_i}\sin\varphi_i, \qquad p_i^\circ = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i \qquad (i = 1, 2) \tag{2.4}$$

получаем

$$H^\circ = -4\sqrt{2(x_{0030}^2 + y_{0030}^2)r_1}\,\sqrt{r_1}\sin 3\varphi_1 + O(|q|^4) \tag{2.5}$$

Для доказательства неустойчивости воспользуемся теоремой Четаева [9]. Функцию V возьмем в виде $V = V_1 V_2$, где

$$V_1 = r_1^\alpha - r_2^2, \quad V_2 = r_1\sqrt{r_1}\cos 6\varphi_1 \quad (\alpha > 2) \tag{2.6}$$

За область $V > 0$ примем область ($V_1 > 0$, $-\pi/12 < \varphi_1 < \pi/12$). На границе этой области либо V_1, либо V_2 равны нулю, а внутри области выполняется равенство

$$r_2 = \beta r_1^{\alpha/2} \qquad (0 < \beta < 1) \tag{2.7}$$

Параметр α подберем таким, чтобы производная функции V в силу уравнений движения с гамильтонианом (2.5) была определенно положительной в области $V > 0$.

Легко проверить, что при $2 < \alpha < 3$

$$\frac{dV}{dt} = 6\sqrt{2(x_{0030}^2 + y_{0030}^2)}\, r_1^{\alpha+2}\{[2\alpha\cos 3\varphi_1 + f_1]\cos 6\varphi_1 + 3(1 - \beta^2)\times$$
$$\times[\cos 3\varphi_1 + \sin 3\varphi_1 \sin 6\varphi_1 + f_2]\} \tag{2.8}$$

где функции f_1 и f_2 сколь угодно малы при r_1, стремящемся к нулю.

В области $V > 0$ $\cos 3\varphi_1 > \sqrt{2}/2$, а $\cos 3\varphi_1 + \sin 3\varphi_1 \sin 6\varphi_1 \geqslant 1$.

Поэтому из (2.7) и (2.8) следует, что в области $V > 0$ при достаточно малых $|q|$ функция dV/dt будет определенно положительной, и, согласно теореме Четаева, положение равновесия неустойчиво.

В случае (3) после преобразований (2.3) и (2.4), где теперь

$$\sin 3\theta = \frac{y_{0012}}{\sqrt{x_{0012}^2 + y_{0012}^2}}, \qquad \cos 3\theta = \frac{x_{0012}}{\sqrt{x_{0012}^2 + y_{0012}^2}}$$

получим

$$H^\circ = -4\sqrt{2(x_{0012}^2 + y_{0012}^2)}\, r_2\sqrt{r_1}\sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O(|q|^4) \tag{2.9}$$

Для доказательства неустойчивости функцию Четаева надо взять в виде $V = V_1 V_2$, где

$$V_1 = r_2^\alpha - (r_2 - 2r_1)^2, \quad V_2 = r_2\sqrt{r_1}\cos 2(\varphi_1 + 2\varphi_2) \quad (2 < \alpha < 3) \tag{2.10}$$

а за область $V > 0$ принять область ($V_1 > 0$, $-\pi/4 < \varphi_1 + 2\varphi_2 < \pi/4$).

Доказательство теоремы в случаях (2) и (4) аналогично доказательству в случаях (1) и (3) соответственно.

3. Рассмотрим теперь устойчивость в случаях (5) —(9). Здесь преобразованная функция Гамильтона в полярных координатах имеет вид

$$H^\circ = l_{2020}r_1^2 + l_{1111}r_1 r_2 + l_{0202}r_2^2 - H^{**}(r_i, \varphi_i) + H'(r_i, \varphi_i, t) \tag{3.1}$$

В (3.1) $H' = O(|q|^5)$, а функция H^{**} для случаев (5) — (9) будет соответственно такой:

$$\begin{aligned}
&(5)\ H^{**} = \sqrt{x_{0040}^2 + y_{0040}^2}\, r_1^2 \sin 4\varphi_1 \\
&(6)\ H^{**} = \sqrt{x_{0004}^2 + y_{0004}^2}\, r_2^2 \sin 4\varphi_2 \\
&(7)\ H^{**} = \sqrt{x_{2200}^2 + y_{2200}^2}\, r_1 r_2 \sin 2(\varphi_1 + \varphi_2) \\
&(8)\ H^{**} = \sqrt{x_{1300}^2 + y_{1300}^2}\, r_2 \sqrt{r_1 r_2} \sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) \\
&(9)\ H^{**} = \sqrt{x_{3100}^2 + y_{3100}^2}\, r_1 \sqrt{r_1 r_2} \sin(3\varphi_1 + \varphi_2)
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

При приведении гамильтониана к виду (3.1) считаем, что

$$x_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^2 + y_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^2 \neq 0$$

а в формулах (2.3)

$$\sin 4\theta = -\frac{x_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}{\sqrt{x_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^2 + y_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^2}}, \qquad \cos 4\theta = -\frac{y_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}{\sqrt{x_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^2 + y_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^2}}$$

Формулы для $l_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$, $x_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$, $y_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ приведены в п. 4.

Для каждого из резонансов (5) — (9) введем величины A_j, B_j ($j = 5,6,7,8,9$) по формулам

$$\begin{aligned}
&A_5 = \sqrt{x_{0040}^2 + y_{0040}^2}, && B_5 = l_{2020} \\
&A_6 = \sqrt{x_{0004}^2 + y_{0004}^2}, && B_6 = l_{0202} \\
&A_7 = \sqrt{x_{2200}^2 + y_{2200}^2}, && B_7 = l_{2020} + l_{1111} + l_{0202} \\
&A_8 = 3\sqrt{3(x_{1300}^2 + y_{1300}^2)}, && B_8 = l_{2020} + 3l_{1111} + 9l_{0202} \\
&A_9 = 3\sqrt{3(x_{3100}^2 + y_{3100}^2)}, && B_9 = 9l_{2020} + 3l_{1111} + l_{0202}
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Теорема 3.1. Если одновременно выполняются неравенства $A_j \neq 0$ и $A_j > |B_j|$, то положение равновесия неустойчиво. Если $A_j < |B_j|$, то имеет место устойчивость при учете в функции Гамильтона членов до четвертого порядка. Если функция $H^\circ - H'$ будет знакоопределенной, то положение равновесия формально устойчиво.

Докажем теорему в случае (5). Для доказательства первого утверждения возьмем функцию Четаева в виде $V = V_1 V_2$, где

$$V_1 = r_1^\alpha - r_2^2, \quad V_2 = r_1^2 \cos 4a\varphi_1 \quad (a = 1 + \varepsilon,\ 2 < \alpha < 3,\ \ 0 < \varepsilon \ll 1) \qquad (3.4)$$

За область $V > 0$ примем область ($V_1 > 0, -\pi / 8a < \varphi_1 < \pi / 8a$).

В области $V > 0$

$$r_2 = \beta r_1^{\alpha/2} \qquad (0 < \beta < 1)$$

Для производной получаем выражение

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} = 4r_1^{\alpha+3}\{(\alpha A_5 \cos 4\varphi_1 + g_1)\cos 4a\varphi_1 + 2(1-\beta^2)[A_5 \cos 4\varepsilon\varphi_1 - B_5 \sin 4a\varphi_1 + \\
+ \varepsilon \sin 4a\varphi_1 (A_5 \sin 4\varphi_1 - B_5) + g_2]\}
\end{aligned} \qquad (3.5)$$

где функции g_1 и g_2 сколь угодно малы при r_1, стремящемся к нулю.

Так как по условию $A_5 > |B_5|$, то при некотором достаточно малом значении ε функция dV / dt будет определенно положительной в области $V > 0$ при достаточно малых $|q|$. Тем самым утверждение о неустойчивости доказано.

Второе утверждение теоремы доказывается построением функции Ляпунова для укороченной системы с гамильтонианом $H^\circ - H'$, имеющей два интеграла $r_2 = \text{const}$ и $H^\circ - H' = \text{const}$. Функцию Ляпунова берем в виде

$$W = r_2^4 + (H^\circ - H')^2 \qquad (3.6)$$

Легко проверить, что при $A_5 < |B_5|$ она будет определенно положительной, поэтому положение равновесия устойчиво [10].

Покажем справедливость третьего утверждения теоремы. Применяя преобразования, описанные в п. п. 2 и 4, гамильтониан (1.2) можно формально привести к функции, не зависящей от t во всех порядках. Тогда выражение $G \equiv H^\circ$ будет формальным интегралом системы (1.1), если его записать в исходных переменных q_i, p_i. Получаем

$$G = G_4 + G_5 + \ldots, \qquad (G_4 \equiv H^\circ - H').$$

Поэтому, если $H^\circ - H'$ будет знакоопределенной функцией, то положение равновесия формально устойчиво.

В случае (7) неустойчивость доказывается при помощи функции Четаева $V = V_1V_2$, где

$$V_1 = r_2^{\alpha} - (r_1 - r_2)^2, \qquad V_2 = r_1r_2\cos 2a\,(\varphi_1 + \varphi_2) \qquad (a = 1 + \varepsilon,\ 2 < \alpha < 3,\ 0 < \varepsilon \ll 1) \tag{3.7}$$

За область $V > 0$ можно взять область $(V_1 > 0, -\pi / 4a < \varphi_1 + \varphi_2 < \pi / 4a)$. Устойчивость в случае (7) доказывается при помощи функции Ляпунова

$$W = (r_1 - r_2)^4 + (H^0 - H')^2 \tag{3.8}$$

В случае (8) функцию V можно взять в виде $V = V_1V_2$, где $V_1 = r_2^{\alpha} - (r_2 - 3r_1)^2$, $V_2 = r_2\sqrt{r_1r_2}\cos a(\varphi_1 + 3\varphi_2)$ $(a = 1 + \varepsilon, 2 < \alpha < 3, 0 < \varepsilon \ll 1)$ а за область $V > 0$ можно принять область $(V_1 > 0, -\pi / 2a < \varphi_1 + 3\varphi_2 < \pi / 2a)$ Функцию W в случае (8) можно взять в виде

$$W = (r_2 - 3r_1)^4 + (H^\circ - H')^2$$

Рассмотрение резонансов (6) и (9) аналогично рассмотрению резонансов (5) и (8) соответственно.

Замечания. а) Для утверждения теоремы 3.1 о формальной устойчивости несущественно наличие резонансов $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \equiv 0 \pmod 1$, для которых $|k_1| + |k_2| \geqslant 5$.

б) Если в случаях (1) — (9) выполняется равенство $x^2_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} + y^2_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = 0$, то наличие резонанса не мешает привести гамильтониан к виду (1.4). И тогда применим критерий формальной устойчивости, приведенный в п. 1.

4. Приведем расчетные формулы. Пусть в (1.1) гамильтониан имеет вид (1.2). Введем новые канонические переменные q_i^*, p_i^* при помощи производящей функции

$$S = q_1p_1^* + q_2p_2^* + \sum_{\nu=3} s_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(t)\, q_1^{\nu_1}q_2^{\nu_2}p_1^{*\nu_3}p_2^{*\nu_4}$$

Здесь $s_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(t + 2\pi) = s_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(t)$. Обозначим новую функцию Гамильтона через $H^*(q_i^*, p_i^*, t)$. Имеет место тождество

$$H^*\left(\frac{\partial S}{\partial p_i^*}, p_i^*, t\right) \equiv H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{4.1}$$

Из (4.1) получаем

$$H_2^* = H_2, \qquad H_3^* = H_3 + DS_3 \tag{4.2}$$

$$H_4^* = H_4 + \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\lambda_i\left[\left(\frac{\partial S_3}{\partial q_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_3}{\partial p_i^*}\right)^2\right] + \frac{\partial H_3}{\partial p_i^*}\frac{\partial S_3}{\partial q_i} - \frac{\partial H_3^*}{\partial q_i}\frac{\partial S_3}{\partial p_i^*}$$

Здесь H_k, H_k^*, S_k — однородные функции степени k в разложениях H, H^*, S в степенные ряды, через D обозначен оператор

$$D = \lambda_1 \left(p_1^* \frac{\partial}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial}{\partial p_1^*}\right) + \lambda_2 \left(p_2^* \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial p_2^*}\right) + \frac{\partial}{\partial t}$$

Выберем коэффициенты $s_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ такими, чтобы функция H_3^* приняла наиболее простой вид. Перейдя к комплексно-сопряженным каноническим переменным

$$q_k' = q_k + ip_k^*, \qquad p_k' = q_k - ip_k^* \qquad (k = 1, 2)$$

нетрудно показать [2], что H_3^* можно полностью уничтожить, если число

$$a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = \lambda_1(\nu_3 - \nu_1) + \lambda_2(\nu_4 - \nu_2)$$

не будет целым. Для коэффициентов $s_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ получаем после несложных выкладок такие выражения:

$$\begin{gathered}
s_{0300} = u''_{0003} + u''_{0102}, \quad s_{0102} = u''_{0102} - 3u''_{0003}, \quad s_{0201} = v''_{0102} + 3v''_{0003}, \\
s_{0003} = v''_{0102} - v''_{0003}, \quad s_{3000} = u''_{0030} + u''_{1020}, \quad s_{1020} = u''_{1020} - 3u''_{0030}, \\
s_{2010} = v''_{1020} + 3v''_{0030}, \quad s_{0030} = v''_{1020} - v''_{0030}, \quad s_{1002} = u''_{0111} - u''_{0012} - u''_{0210} \\
s_{1200} = u''_{0012} + u''_{0210} + u''_{0111}, \quad s_{0210} = v''_{0111} + v''_{0012} + v''_{0210}, \quad s_{0111} = 2(u''_{0210} - u''_{0012}) \\
s_{0012} = v''_{0111} - v''_{0012} - v''_{0210}, \qquad s_{1101} = 2(v''_{0012} - v''_{0210}) \\
s_{0120} = u''_{1011} - u''_{0021} - u''_{2001}, \qquad s_{2100} = u''_{0021} + u''_{2001} + u''_{1011} \\
s_{2001} = v''_{1011} + v''_{0021} + v''_{2001}, \qquad s_{0021} = v''_{1011} - v''_{0021} - v''_{2001} \\
s_{1011} = 2(u''_{2001} - u''_{0021}), \qquad s_{1110} = 2(v''_{0021} - v''_{2001})
\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
u''_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} &= g(t)\sin a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}t + f(t)\cos a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}t \\
v''_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} &= g(t)\cos a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}t - f(t)\sin a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}t
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
g(t) &= \operatorname{ctg} \pi a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} I_1(2\pi) + I_2(2\pi) - 2I_2(t) \\
f(t) &= I_1(2\pi) - \operatorname{ctg} \pi a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} I_2(2\pi) - 2I_1(t)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \int_0^t (u'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\cos a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}x - v'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\sin a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}x)\,dx \\
I_2(t) &= \int_0^t (u'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\sin a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}x + v'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\cos a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}x)\,dx
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered}
u'_{0003} = {}^1/_8(h_{0300} - h_{0102}), \qquad v'_{0003} = {}^1/_8(h_{0201} - h_{0003}) \\
u'_{0102} = {}^1/_8(h_{0102} + 3h_{0300}), \qquad v'_{0102} = {}^1/_8(h_{0201} + 3h_{0003}) \\
u'_{0030} = {}^1/_8(h_{3000} - h_{1020}), \qquad v'_{0030} = {}^1/_8(h_{2010} - h_{0030}) \\
u'_{1020} = {}^1/_8(h_{1020} + 3h_{3000}), \qquad v'_{1020} = {}^1/_8(h_{2010} + 3h_{0030}) \\
u'_{0111} = {}^1/_4(h_{1200} + h_{1002}), \qquad v'_{0111} = {}^1/_4(h_{0012} + h_{0210}) \\
u'_{0012} = {}^1/_8(h_{1200} - h_{1002} - h_{0111}), \qquad v'_{0012} = {}^1/_8(h_{0210} - h_{0012} + h_{1101}) \\
u'_{0210} = {}^1/_8(h_{1200} - h_{1002} + h_{0111}), \qquad v'_{0210} = {}^1/_8(h_{0210} - h_{0012} - h_{1101}) \\
u'_{1011} = {}^1/_4(h_{2100} + h_{0120}), \qquad v'_{1011} = {}^1/_4(h_{2001} + h_{0021}) \\
u'_{0021} = {}^1/_8(h_{2100} - h_{0120} - h_{1011}), \qquad v'_{0021} = {}^1/_8(h_{2001} - h_{0021} + h_{1110}) \\
u'_{2001} = {}^1/_8(h_{2100} - h_{0120} + h_{1011}), \qquad v'_{2001} = {}^1/_8(h_{2001} - h_{0021} - h_{1110})
\end{gathered} \tag{4.7}$$

Если же $a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = m$ (m — целое число), то полностью уничтожить функцию H_3^* нельзя. Но можно ее привести к нормальной форме, отражающей резонансный характер задачи. В п. 2 преобразованная функция выписана для частных случаев резонанса $a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = m$.

Аналогичным образом можно упростить функцию H_4^*. Выпишем коэффициенты нормальной формы, необходимые для исследования устойчивости в резонансных случаях (5) — (9):

$$l_{2020} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(h^*_{2020} + 3h^*_{0040} + 3h^*_{4000})\,dt$$
$$l_{1111} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(h^*_{2200} + h^*_{0220} + h^*_{2002} + h^*_{0022})\,dt \qquad (4.8)$$
$$l_{0202} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(h^*_{0202} + 3h^*_{0004} + 3h^*_{0400})\,dt$$

Коэффициенты $x_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$, $y_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ вычисляются по формулам (2.2), в которых надо положить

$$u'_{0040} = {}^1/_2(h^*_{0040} + h^*_{4000} - h^*_{2020}), \quad v'_{0040} = {}^1/_2(h^*_{3010} - h^*_{1030})$$
$$u'_{0004} = {}^1/_2(h^*_{0004} + h^*_{0400} - h^*_{0202}), \quad v'_{0004} = {}^1/_2(h^*_{0301} - h^*_{0103})$$
$$u'_{1300} = {}^1/_2(h^*_{1300} + h^*_{0013} - h^*_{1102} - h^*_{0211}), \quad v'_{1300} = {}^1/_2(h^*_{0112} +$$
$$+ h^*_{1003} - h^*_{0310} - h^*_{1201}), \quad u'_{3100} = {}^1/_2(h^*_{3100} + h^*_{0031} - h^*_{1120} - h^*_{2011}) \qquad (4.9)$$
$$v'_{3100} = {}^1/_2(h^*_{1021} + h^*_{0130} - h^*_{2110} - h^*_{3001}), \quad u'_{2200} = {}^1/_2(h^*_{0022} +$$
$$+ h^*_{2200} - h^*_{0220} - h^*_{2002} - h^*_{1111}), \quad v'_{2200} = {}^1/_2(h^*_{0121} + h^*_{1012} - h^*_{1210} - h^*_{2101})$$

Здесь $h^*_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ — коэффициенты при соответствующих степенях в функции H_4^*, вычисляемой по формулам (4.2).

В заключение отметим, что в статье [11] при доказательстве неустойчивости допущены неточности. Производные функций (2.8) и (3.8) этой статьи могут принимать отрицательные значения вблизи границы соответствующих областей $V > 0$ и потому могут не быть определенно положительными в этих областях. Функции V при $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$ следует взять, как в этой работе в случаях (3) и (8), соответственно, а в условии неустойчивости при $\omega_1 = 3\omega_2$ знак $\geqslant$ надо заменить знаком $>$.

Выражаю признательность А. Л. Куницыну и Ю. А. Садову, любезно указавшим на упомянутые неточности.

Поступила 17 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Moser J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian sistems. Comm. Pure appl. math., 1958, vol. 11, No. 1, p. 81.
2. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.—Л., Гостехтеориздат, 1941.
3. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems. Comm. Pure appl. math., 1964, vol. 17, No. 4. pp. 509—526.
4. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона. Матем. заметки, 1967, т. 1, вып. 3, стр. 325—330.
5. Moser J. Stabilitätsverhalten kanonischer Differentialgleichungssysteme. Nachricht. Akad. Wiss. Gottingen, Math. Phys. Kl., 1955, 2a, Nr. 6, S. 87—120.
6. Moser J. On the elimination of the irrationality condition and Birkhoff's concept of complete stability, Bol. Soc. mat. Mexicana, 1960, vol. 5, p. 167.
7. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
8. Арнольд В. И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 1, стр. 9—12.
9. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
10. Ляпунов А. М. Собрание сочинений, т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1956.
11. Маркеев А. П. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.