

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВИБРАЦИИ В СТЕРЖНЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В. А. Пальмов

(Ленинград)

1. Рассматриваем продольные колебания в стержне с нелинейным определяющим уравнением. Уравнения динамики стержня таковы:

$$Q' - mu'' = 0, \quad \varepsilon = u', \quad Q = Q(\varepsilon, \varepsilon') \quad (1.1)$$

причем Q — растягивающая сила, ε — деформация, u — осевое перемещение, m — погонная масса. Далее, штрихом отмечена производная по координате x , а точкой — по времени. Кроме того, предполагаем, что нелинейная функция $Q(\varepsilon, \varepsilon')$ будет нечетной функцией своих аргументов.

Полагаем, что стержень имеет конечную длину l , причем один конец его ($x = 0$) свободен, а другой ($x = l$) нагружен силой p , представляющей стационарную случайную функцию времени с нулевым математическим ожиданием.

Сформулированная задача будет наиболее простой из серии задач, возникающих при изучении распространения вибрации по таким конструкциям, как самолеты, ракеты и т. п., ибо известно, что конструкционное демпфирование является нелинейным.

Известно, что поставленная задача точного решения в настоящее время не имеет. Ниже предлагается ее приближенное решение, основанное на использовании метода статистической линеаризации [1-3].

В соответствии с этим методом нелинейное третье уравнение (1.1) приближенно заменяется линейным

$$Q \approx h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon' \quad (1.2)$$

Коэффициенты линеаризации h_1 и h_2 здесь выбираются из того условия, чтобы линейное соотношение (1.2) оптимально приближало исходное нелинейное соотношение по критерию минимума среднеквадратической ошибки. Их выражение таково [2]:

$$h_1 = \frac{1}{\sigma_1^2} \iint_{-\infty}^{\infty} Q(\varepsilon, \varepsilon') \varepsilon w(\varepsilon, \varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon', \quad h_2 = \frac{1}{\sigma_2^2} \iint_{-\infty}^{\infty} Q(\varepsilon, \varepsilon') \varepsilon' w(\varepsilon, \varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon' \quad (1.3)$$

Здесь σ_1 и σ_2 — среднеквадратические значения деформации и ее скорости в сечении x , а $w(\varepsilon, \varepsilon')$ — их совместная плотность вероятности. Так как закон распределения ε и ε' неизвестен до решения задачи в целом, предполагают, что он будет нормальным [2]

$$w(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\varepsilon'^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (1.4)$$

Из формул (1.3) и (1.4) видно, что коэффициенты линеаризации зависят от неизвестных пока среднеквадратических значений деформации и ее скорости $h_i = h_i(\sigma_1, \sigma_2)$.

Комбинируя уравнение (1.2) и первые два уравнения (1.1), получим одно уравнение для определения перемещения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h_1 \frac{\partial u}{\partial x} + h_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5)$$

Оно совпадает с уравнением продольных колебаний стержня из материала Кельвина — Фойгта. Следует, однако иметь в виду, что его коэффициенты h_1 и h_2 зависят от неизвестных характеристик решения $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$.

2. Зададим нагрузку p , действующую на конце стержня, ее спектральным представлением

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} V(\omega) d\omega \quad (2.1)$$

где $V(\omega)$ — случайная функция типа белого шума интенсивности $S(\omega)$. Функция $S(\omega)$ называется спектральной плотностью нагрузки.

По аналогии с (2.1) решение уравнения (1.5) будем разыскивать в виде интегрального канонического представления

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Phi(\omega, x) V(\omega) d\omega \quad (2.2)$$

Подставив (2.2) в (1.6), получим уравнение для Φ

$$\frac{d}{dx} \left(C \frac{d\Phi}{dx} \right) + m\omega^2 \Phi = 0, \quad C = h_1 + i\omega h_2 \quad (2.3)$$

причем C ниже будет называться комплексной жесткостью — по аналогии с линейным случаем.

Отметим, что в силу формул (2.3), (1.5) комплексная жесткость зависит от σ_1 и σ_2 , которые до решения задачи в целом будут неизвестными функциями x . Положение здесь такое же, как и в работе [4], где используется метод гармонической линеаризации. Построить же явное решение уравнения (2.3) при произвольном $C(x)$ невозможно. Поэтому ниже рассматривается случай, когда σ_1 и σ_2 , а вместе с ними и комплексная жесткость C будут медленно меняющимися функциями x . Тогда с помощью метода Стеклова — Луивилля [5] можно построить эффективное приближенное решение уравнения (2.3). В соответствии с этим методом проводим замену переменных

$$\Phi = C^{-1/4} v(y), \quad y = \int_0^x (m/C)^{1/2} dx \quad (2.4)$$

в результате которой вместо уравнения (2.3) получаем

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + \left(\omega^2 - C^{-1/4} \frac{d^2}{dy^2} C^{1/4} \right) v = 0 \quad (2.5)$$

Если жесткость достаточно медленно изменяется по длине стержня, то вторым слагаемым в скобке можно пренебречь. Тогда уравнение (2.5) легко интегрируется и тем самым находится общее выражение Φ . Постоянные интегрирования определяются из граничных условий. По известному интегральному каноническому представлению u в (2.2) легко получить интегральные канонические представления деформации и ее скорости

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Psi(\omega, x) V(\omega) d\omega, \quad \dot{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega t} \Psi(\omega, x) V(\omega) d\omega \quad (2.6)$$

Здесь

$$\Psi(\omega, x) = [C(x)]^{-3/4} [C(l)]^{-1/4} \frac{\sin \omega y(x)}{\sin \omega y(l)} \quad (2.7)$$

При помощи выражений (2.6) найдем средние квадраты ε и $\dot{\varepsilon}$

$$\sigma_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 S(\omega) d\omega, \quad \sigma_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 S(\omega) d\omega \quad (2.8)$$

Так как неизвестные функции $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ входят в правые и левые части равенств (2.8), последние должны рассматриваться как уравнения для их определения. В правую часть неизвестные функции σ_1 и σ_2 входят нелинейно под знаки интегралов по частоте и координате x (интегрирование по x заключено в y).

Таким образом, (2.8) представляет систему двух нелинейных интегральных уравнений. После того, как она решена, по приведенным выше формулам легко найти интересующие статистические характеристики поля вибрации. Поэтому основная задача — решение системы интегральных уравнений (2.8). В самом общем случае она может быть решена численными методами, скажем методом последовательных приближений. Ниже будут рассмотрены ситуации, при которых возможно приближенное аналитическое решение.

3. Для получения аналитических решений системы уравнений (2.8) желательно ее максимально упростить. В обозначениях

$$2y(x) = A(x) - i\omega B(x) \quad (3.1)$$

выражение квадрата модуля Ψ запишется следующим образом:

$$|\Psi|^2 = [C(x)]^{-3/2} [C(l)]^{-1/2} \frac{\operatorname{ch} \omega^2 B(x) - \cos \omega A(x)}{\operatorname{ch} \omega^2 B(l) - \cos \omega A(l)} \quad (3.2)$$

Выше было введено предположение о медленном изменении комплексной жесткости $C(x)$. Но из физических соображений ясно, что медленное изменение σ_1 и σ_2 , а также зависящей от них комплексной жесткости возможно только при не слишком большом демпфировании. Это значит, что мнимая часть в формуле (2.3) должна быть мала по сравнению с вещественной для существенных частот из частотного диапазона нагрузки. Указанный факт позволяет использовать следующие приближенные формулы:

$$|C| = h_1, \quad A(x) = 2 \int_0^x \left(\frac{m}{h_1}\right)^{1/2} dx, \quad B(x) = 2 \int_0^x \left(\frac{m}{h_1}\right)^{1/2} \frac{h_2}{h_1} dx \quad (3.3)$$

справедливые с точностью до величин первого порядка относительно малых.

Второе упрощение более серьезно. Дело в том, что при малом демпфировании выражение (3.2) представляет быстропеременную функцию частоты с острыми пиками (в линейном случае это были бы резонансные пики). Поэтому целесообразно провести усреднение $|\Psi|^2$ по частотному диапазону порядка расстояния между указанными пиками, а затем уже вести интегрирование по частоте, предусмотренное формулами (2.8). Проводя это усреднение так же, как и в работе [6], получим

$$|\Psi|_*^2 = h_{1l}^{-1/2} h_{1x}^{-3/2} \frac{\operatorname{ch} \omega^2 B(x)}{\operatorname{sh} \omega^2 B(l)} \quad (3.4)$$

причем здесь и ниже индекс у функции указывает на значение ее аргумента, так что h_{1x} — значение h_1 в сечении x , а h_{1l} — в сечении l .

Подставив (3.4) в (2.8), получим упрощенный вариант системы интегральных уравнений

$$\sigma_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|_*^2 S(\omega) d\omega, \quad \sigma_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|_*^2 \omega^2 S(\omega) d\omega \quad (3.5)$$

Разумеется, описанная выше процедура усреднения предполагает наличие у спектральной плотности нагрузки определенных условий плавности.

Ниже рассматриваются частные случаи, допускающие сравнительно простые решения.

4. Пусть для основных частот из частотного диапазона нагрузки аргумент гиперболических функций мал. Используя асимптотические формулы, приходим к системе уравнений, из которой непосредственно видно, что σ_1 и σ_2 постоянны. Уравнения для их определения таковы:

$$\sigma_1^2 h_1^2 B(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega)}{\omega^2} d\omega, \quad \sigma_2^2 h_1^2 B(l) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (4.1)$$

В другом крайнем случае, когда аргумент гиперболических функций велик, использование соответствующих асимптотических формул в (3.4) приводит систему уравнений (3.5) к следующему виду:

$$\sigma_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \omega^2 [B(x) - B(l)]}{h_{1x}^{3/2} h_{1l}^{1/2}} S(\omega) d\omega, \quad \sigma_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \omega^2 [B(x) - B(l)]}{h_{1x}^{3/2} h_{1l}^{1/2}} \omega^2 S(\omega) d\omega \quad (4.2)$$

Система уравнений (4.2) имеет и самостоятельное значение. В точности к этой системе приводит рассмотрение полубесконечного стержня $x < l$, нагруженного случайной силой в сечении $x = l$. С физической точки зрения переход к системе уравнений (4.2) соответствует пренебрежению отражением вибрации от свободного конца стержня.

Первая трудность, которая возникает при решении системы (4.2) — вычисление интегралов по частоте. Для некоторых классов спектральных плотностей нагрузки такое вычисление возможно в общем виде. Например, если

$$S = D |\omega|^s e^{-\rho\omega^2}, \quad s > 0, \quad \rho > 0, \quad D > 0 \quad (4.3)$$

то дело сводится к табличному интегралу

$$\int_0^{\infty} z^{s-1} e^{-pz^2} dz = \frac{1}{2} p^{-1/2} s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \quad (4.4)$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

В этом случае система уравнений (4.2) после некоторых упрощений принимает вид

$$\left[\frac{\sigma_{1x}}{\sigma_{1l}} \left(\frac{h_{1x}}{h_{1l}} \right)^{s/4} \right]^{-4/(s+1)} = \left[\frac{\sigma_{2x}}{\sigma_{2l}} \left(\frac{h_{1x}}{h_{1l}} \right)^{s/4} \right]^{-4/(s+3)} = 1 - \frac{B(x) - B(l)}{\rho} \quad (4.5)$$

Левое равенство дает непосредственную связь между σ_{1x} и σ_{2x} , тогда как из второго легко получить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{2x}} \left[\frac{\sigma_{2x}}{\sigma_{2l}} \left(\frac{h_{1x}}{h_{1l}} \right)^{s/4} \right]^{-4/(s+3)} \frac{d\sigma_{2x}}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dB(x)}{dx} \quad (4.6)$$

В правой части здесь в силу последней формулы (3.3) стоит известная функция σ_{1x} и σ_{2x} . Граничные значения σ_{1l} и σ_{2l} должны находиться непосредственно из системы (4.2) при $x = l$

$$\sigma_{1l} h_{1l} = \sigma_p, \quad \sigma_{2l} h_{1l} = \sigma_p \quad (4.7)$$

где σ_p и σ_p' — среднеквадратические значения нагрузки и ее скорости изменения.

5. Пусть материал стержня будет линейно упругим со степенным законом сопротивления. Его определяющее уравнение имеет вид

$$Q = k\varepsilon + r |\varepsilon|^\mu \text{sign } \varepsilon \quad (5.1)$$

где k , r , μ — положительные постоянные.

Коэффициенты линеаризации и $B'(x)$ имеют следующие выражения:

$$h_1 = k, \quad h_2 = d\sigma_2^{\mu-1}, \quad dB/dx = \gamma\sigma_2^{\mu-1} \quad (5.2)$$

$$d = \frac{r}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{1+\mu}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right), \quad \gamma = \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} \frac{d}{k}$$

Уравнение (4.6) в данном случае принимает вид

$$\frac{4}{s+3} \left(\frac{\sigma_{2x}}{\sigma_{2l}} \right)^{-1-4/(s+3)} \frac{1}{\sigma_{2l}} \frac{d\sigma_{2x}}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} \sigma_{2x}^{\mu-1} \quad (5.3)$$

Его решение таково:

$$\sigma_{2x} = \sigma_{2l} \left[1 + \frac{(s+3)\gamma\lambda}{4\rho} \sigma_{2l}^{\mu-1} (l-x) \right]^{-1/\lambda}, \quad \lambda = \mu - 1 + \frac{4}{s+3} \quad (5.4)$$

Это выражение позволяет сделать некоторые общие выводы о характере поля вибрации. Для определенности будем говорить о полубесконечном стержне $x < l$. Из формулы (5.4) следует, что при $\lambda > 0$ вибрация охватывает весь стержень, тогда как при $\lambda < 0$ она распространяется лишь на расстояние

$$L = (l-x)_* = \frac{4\rho}{(s+3)\gamma|\lambda|} \sigma_{2l}^{1-\mu} \quad (5.5)$$

Остальная часть стержня оказывается неподвижной.

При $\lambda = 0$ вибрация затухает по экспоненциальному закону.

Полученные выводы приближенно справедливы и для стержня конечных размеров, если только на его длине l происходит существенное уменьшение σ_2 .

6. К сожалению, общий случай, когда аргументы гиперболических функций в (3.4) произвольны, не может быть исследован аналитически в общем виде. Причина этого в трудностях интегрирования по частоте в уравнениях (3.5).

Однако в одном частном случае это интегрирование может быть проведено, хотя и приближенно. Речь идет об узкополосной высокочастотной нагрузке. Система уравнений (3.5) в данном случае принимает вид

$$\sigma_1^2 = |\Psi(\Omega, x)|_*^2 \sigma_p^2, \quad \sigma_2^2 = |\Psi(\Omega, x)|_*^2 \Omega^2 \sigma_p^2 \quad (6.1)$$

где Ω — средняя частота нагрузки, а σ_p — ее среднеквадратическое значение. Разумеется, частотная полоса нагрузки должна быть достаточно широкой, чтобы не потеряло смысла проведенное выше усреднение по частоте.

Система уравнений (6.1) может быть переписана в следующем виде:

$$\sigma_2 = \Omega \sigma_1, \quad \sigma_1^2 = |\Psi(\Omega, x)|_*^2 \sigma_p^2 \quad (6.2)$$

так что для определения σ_1 имеем второе уравнение (6.2), в котором σ_2 должно быть исключено при помощи первого.

Анализ поля вибрации на основе уравнения (6.2) проводится сравнительно легко.

Однородное и сильно неоднородное поля могут быть исследованы методами п. 4. Промежуточный случай — случай слабонеоднородного поля — ранее исследовать не удалось вообще. С него и начнем. Получить точное решение интегрального уравнения (6.2) в этом промежуточном случае едва ли возможно. Поэтому следует ориентироваться на приближенное решение. Известно, что если характер решения уравнения можно предугадать, то удовлетворительные результаты дает применение прямых методов. Один из них — метод коллокаций — применяется ниже.

Выясним возможный характер решения уравнения (6.2). Поскольку σ_1 — среднеквадратическая величина, она неминуемо положительная или нуль. Если поле вибрации однородно, то $\sigma_1 = \text{const}$. Если оно слабонеоднородно, то σ_1 несколько изменяется по длине, уменьшаясь при удалении от нагруженного конца стержня. Поэтому представляется очевидным, что зависимость

$$\sigma_{1x} = \sigma_{1l} e^{-b(x-x'/l)} \quad (6.3)$$

может достаточно хорошо аппроксимировать поле вибрации, если только удачно подобрать ее параметры σ_{1l} и b . Для определения этих параметров потребуем, чтобы уравнение (6.2) удовлетворялось решением (6.3) всего в двух точках — на концах стержня. Получим

$$\sigma_{1l}^2 = |\Psi(\Omega, l)|_*^2 \sigma_p^2, \quad \sigma_{10}^2 = |\Psi(\Omega, 0)|_*^2 \sigma_p^2 \quad (6.4)$$

Так как σ_{1l} выражается формулой (6.3), то уравнения (6.4) представляют собой систему алгебраических или трансцендентных уравнений для определения σ_{1l} и b .

Совершенно ясно, что построенное таким образом приближенное решение хорошо описывает однородное и слабонеоднородное поля вибрации. Подробности сильнонеоднородного поля аппроксимация (6.3) передает плохо. Но именно здесь хорошие результаты дает метод п. 4. В данном случае дело сводится к интегральному уравнению

$$\sigma_{1l}^2 = \sigma_p^2 h_{1l}^{-1/2} h_{1x}^{-3/2} \exp \Omega^2 [B(x) - B(l)] \quad (6.5)$$

Образуя логарифмические производные правой и левой частей, сведем это уравнение к дифференциальному

$$\left[\frac{\partial}{\partial \sigma_{1x}} \ln(\sigma_{1x}^2 h_{1x}^{3/2}) \right] \frac{d\sigma_{1x}}{dx} = \Omega^2 \frac{dB(x)}{dx} \quad (6.6)$$

При вычислении производной по σ_{1x} следует иметь в виду, что σ_{2x} зависит от σ_{1x} в соответствии с первой формулой (6.2).

Граничным условием для уравнения (6.6) будет первое из условий (4.7), ибо оно справедливо при любом виде спектральной плотности нагрузки.

Таким образом, перекрыт весь диапазон возможных значений неоднородности поля вибрации.

7. Рассмотрим пример. Пусть речь идет о материале с реологическим уравнением (5.1). Тогда система (6.4) записывается так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{k\sigma_{1l}}{\sigma_p}\right)^2 &= \text{cth} \left\{ \gamma l \Omega^{\mu+1} \sigma_{1l}^{\mu-1} \frac{1 - e^{-b(\mu-1)}}{b(\mu-1)} \right\} \\ \left(\frac{k\sigma_{1l} e^{-b}}{\sigma_p}\right)^2 &= \text{sh}^{-1} \left\{ \gamma l \Omega^{\mu+1} \sigma_{1l}^{\mu-1} \frac{1 - e^{-b(\mu-1)}}{b(\mu-1)} \right\} \end{aligned} \quad (7.1)$$

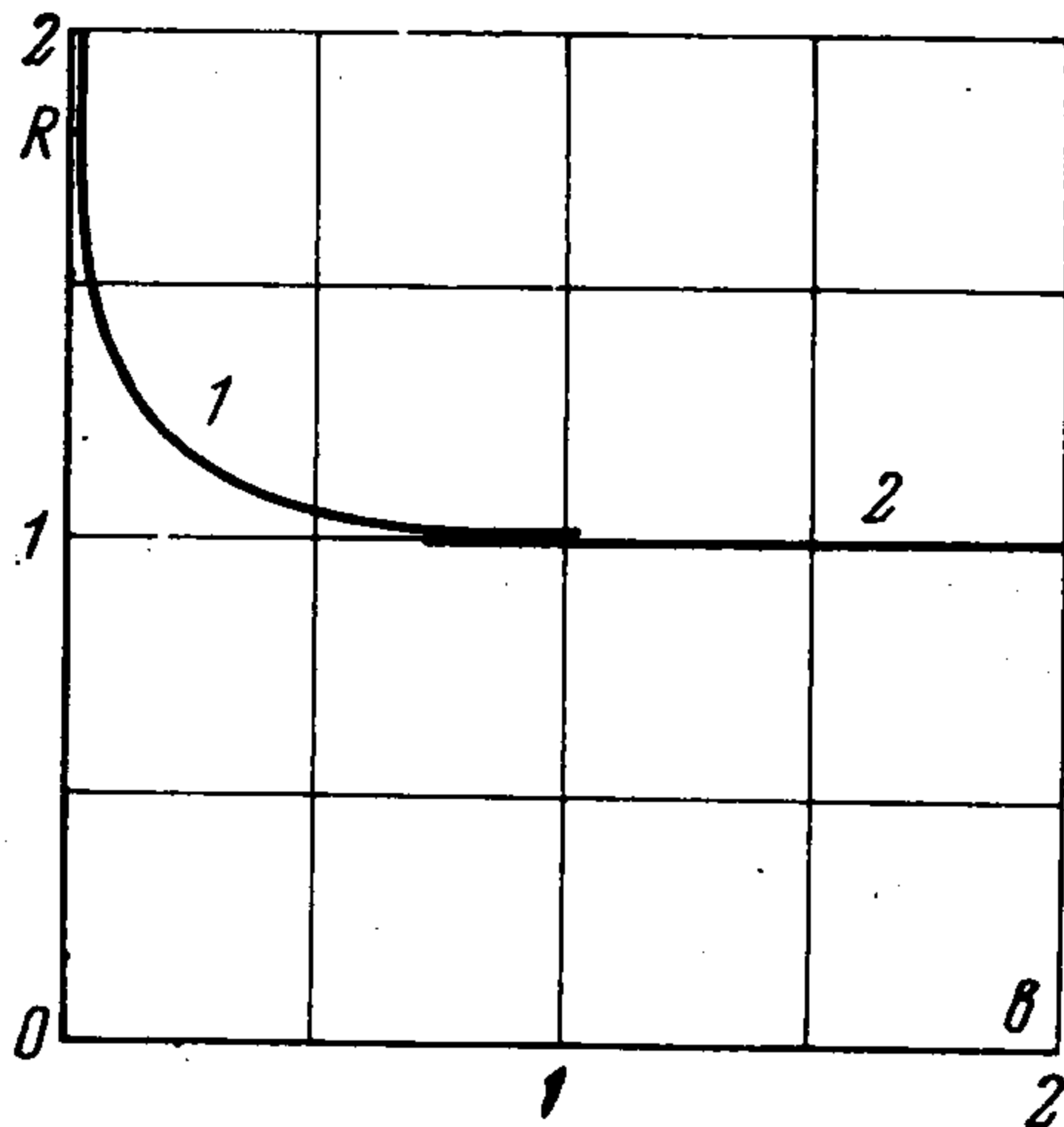
Ее можно преобразовать к более простому виду

$$R = (1 - e^{-4b})^{-1/4}, \quad e^{2b} = \text{ch} \left\{ (BR)^{\mu-1} \frac{1 - e^{-b(\mu-1)}}{b(\mu-1)} \right\} \quad (7.2)$$

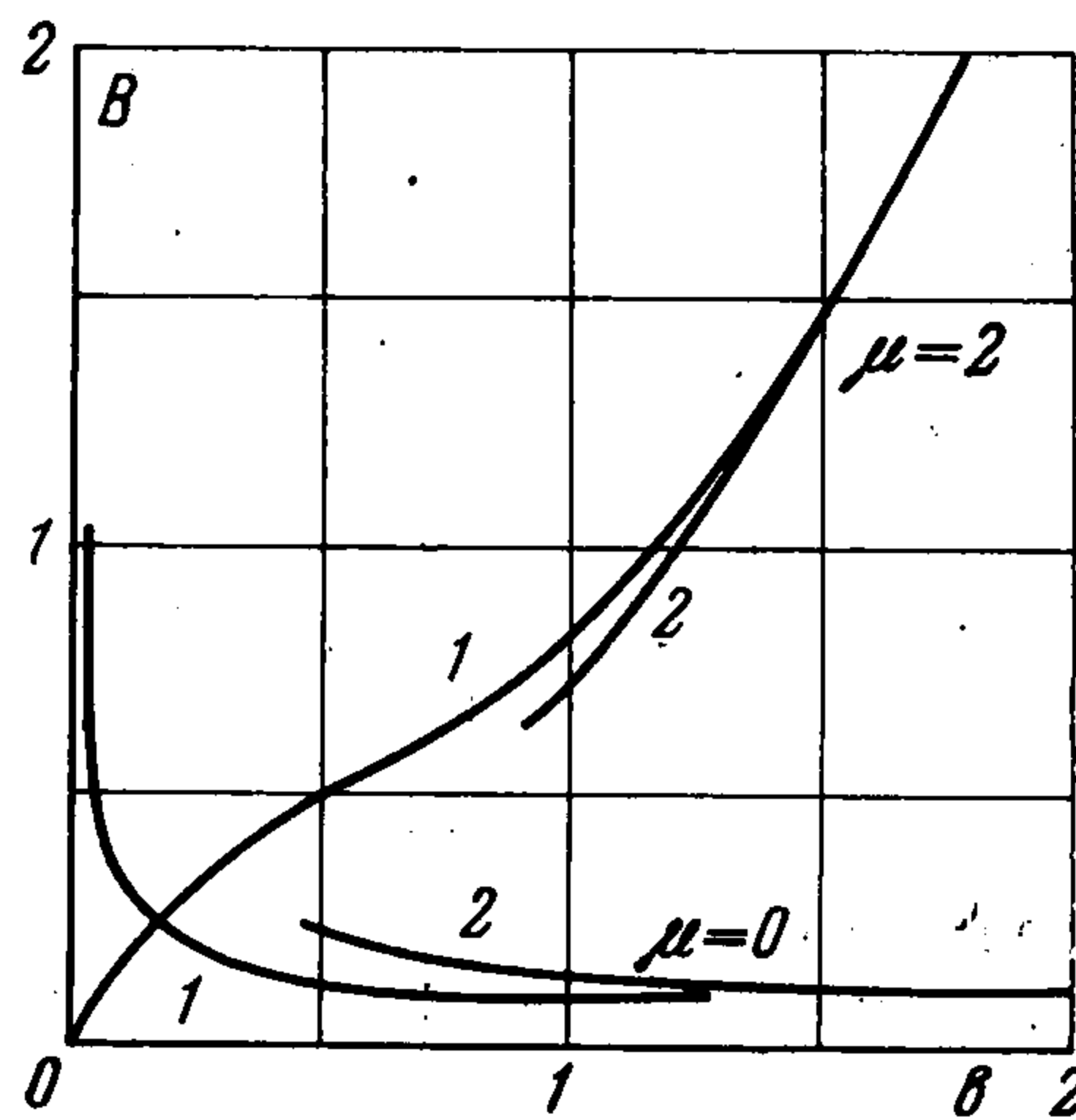
если ввести обозначения

$$R = \frac{k\sigma_{1l}}{\sigma_p}, \quad B = \frac{\sigma_p}{k} (\gamma l \Omega^{\mu+1})^{1/(\mu-1)} \quad (7.3)$$

Зависимости $R = R(b)$ и $B = B(b)$, построенные по формулам (7.2), представлены на фиг. 1 и 2 (это линии, отмеченные значком 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Далее, дифференциальное уравнение неоднородного поля (6.6) в данном случае имеет вид

$$\frac{d\sigma_{1x}}{dx} = \gamma \frac{\Omega^{\mu+1}}{2} \sigma_{1x}^{\mu} \quad (7.4)$$

Его решение таково:

$$\sigma_{1x} = \sigma_{1l} \left[1 + \frac{\mu-1}{2} \gamma \Omega^{\mu+1} \sigma_{1l}^{\mu-1} (l-x) \right]^{-1/(\mu-1)} \quad (7.5)$$

причем σ_{1l} определяется из граничного условия (4.7).

Это выражение пригодно только для тех x , для которых правая часть остается вещественной и положительной. При $\mu > 1$ оно пригодно для всех x . Если $\mu < 1$, то оно обращается в нуль при определенном $x = x_*$ и далее теряет смысл. Поэтому при $x < x_*$ следует принять $\sigma_{1x} = 0$, так как это решение удовлетворяет уравнению (7.4) и непрерывно сопрягается с решением (7.5) для области $x > x_*$.

Для построения решения (7.5) на фиг. 1,2 предварительно заметим, что из граничного условия (4.7) следует:

$$R = 1 \quad (7.6)$$

Далее, за степень неоднородности b примем в данном случае логарифм отношения среднеквадратических деформаций в месте приложения нагрузки ($x = l$) и на свободном конце ($x = 0$). Такое определение показателя неоднородности согласуется с аппроксимацией (6.3). В соответствии с формулой (7.5) имеем в данном случае

$$b = \frac{1}{\mu - 1} \ln \left[1 + \frac{\mu - 1}{2} \gamma \Omega^{\mu+1} \sigma_{1l}^{\mu-1} l \right] \quad (7.7)$$

Используя обозначения (7.3), запишем это соотношение так:

$$B = \frac{1}{R} \left\{ \frac{2}{\mu - 1} [e^{b(\mu-1)} - 1] \right\}^{1/(\mu-1)} \quad (7.8)$$

На фиг. 1 и 2 представлены зависимости $R = R(b)$ и $B = B(b)$, построенные по формулам (7.6) и (7.8) для двух характерных μ (это линии, отмеченные индексом 2). Из формулы (7.8) видно, что при $\mu < 1$ большим b соответствует почти постоянное значение

$$B = \left(\frac{2}{1 - \mu} \right)^{1/(\mu-1)} \quad (7.9)$$

Но ведь B пропорционально нагрузке σ_p . Что же будет при нагрузке, меньшей чем та, которая соответствует пределу (7.9)? В силу формул (7.3), (7.6), (7.9) это будет при выполнении неравенства

$$\frac{1}{2} (1 - \mu) \gamma l \Omega^{\mu+1} \sigma_{1l}^{\mu-1} > 1 \quad (7.10)$$

Но тогда из формулы (7.5) следует, что вибрация не доходит до свободного конца, т. е. имеем $\sigma_{10} = 0$. Следовательно, этому случаю соответствует бесконечно большой показатель неоднородности.

Как уже указывалось выше, в случае слабонеоднородного поля вибрации (скажем, $b < 1$) необходимо использовать линию 1, тогда как в случае сильнонеоднородного (скажем, $b > 1$) — линию 2. Следует отметить, что линии 1 и 2 довольно естественно переходят одна в другую. Таким образом, рассмотрен весь диапазон возможных значений b .

Отметим, наконец, что линия $\mu = 2$ будет характерной для семейства линий $\mu > 1$, тогда как линия $\mu = 0$ характерна для семейства $\mu < 1$. Учитывая этот факт, можно сделать следующие выводы.

Во-первых, каждому значению σ_p соответствует единственное значение b и, следовательно, единственное значение статистических характеристик поля вибрации.

Во-вторых, при $\mu > 1$ увеличение σ_p приводит к росту показателя неоднородности поля вибрации, тогда как при $\mu < 1$ — к его уменьшению.

Поступила 6 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. П у г а ч е в В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.
2. П е р в о з в а н с к и й А. А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М., Физматгиз, 1962.
3. К а з а к о в И. Е., Д о с т у п о в Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1962.
4. П а л ь м о в В. А. Распространение вибраций в нелинейной диссипативной среде. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, стр. 749—756.
5. С т е к л о в В. А. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений. Харьков, Изд-во Харьковск. ун-та, 1956.
6. П а л ь м о в В. А. Распространение случайной вибрации в вязкоупругом стержне. В сб.: «Проблемы надежности в строительной механике», Вильнюс, Республ. ин-т научно-техн. инф. и пропаганды, 1968.